

О ДИФРАКЦИИ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ПЛОСКОМ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ВОЛНОВОДЕ С УПРУГИМИ СТЕНКАМИ

Д. П. Коузов, В. А. Пачин

(Ленинград)

Методом разложения по плоским волнам находится точное аналитическое выражение функции Грина уравнения Гельмгольца для полуполосы при граничных условиях, содержащих производные высоких порядков. Указанная задача возникает при нахождении акустического поля, возбуждаемого точечным источником внутри плоского полубесконечного акустического волновода с тонкими упругими стенками, а также внутри бесконечного акустического волновода, имеющего тонкую упругую перегородку.

1. Постановка задачи. Примеры. Ищется решение задачи

$$(1.1) \quad (\Delta + k^2) P(x, y) = -\delta(x - x_0, y - y_0), \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < h$$

$$(1.2) \quad L_\alpha P(x, y_\alpha) = 0, \quad 0 < x < \infty \quad \alpha = 1, 2; \quad y_1 = 0, \quad y_2 = h$$

$$(1.3) \quad L_3 P(0, y) = 0, \quad 0 < y < h$$

$$L_\alpha = (-1)^{\alpha+1} m_{\alpha 1} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial y} + m_{\alpha 2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right), \quad \alpha = 1, 2$$

$$L_3 = m_{31} \left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} + m_{32} \left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

Здесь P — акустическое давление в среде, Δ — оператор Лапласа, k — волновое число, зависимость от времени задана множителем $e^{-i\omega t}$, который всюду ощущен, $m_{\alpha\beta}$ — полиномы своих аргументов, коэффициенты этих полиномов не зависят от пространственных переменных x и y . Искомое решение должно быть непрерывным в рассматриваемой области вплоть до границы, за исключением точки (x_0, y_0) , в которой расположен источник, и удовлетворять принципу предельного поглощения.

Для случая простейших граничных условий Дирихле или Неймана поставленная задача имеет единственное решение, которое находится элементарно методом изображений. При граничных операторах, дифференциальный порядок которых превосходит единицу, решение утрачивает единственность и содержит N произвольных постоянных. Число этих постоянных может быть найдено по формулам [1,2]

$$(1.4) \quad N = N^{(1)} + N^{(2)}$$

$$N^{(1)} = E \left(\frac{N_1 + N_3 - 1}{2} \right), \quad N^{(2)} = E \left(\frac{N_2 + N_3 - 1}{2} \right)$$

где N_α ($\alpha = 1, 2, 3$) — дифференциальный порядок оператора L_α , $E(x)$ обозначает целую часть числа x .

Произвол в решении устраняется после добавления в постановку задачи N гранично-контактных условий, задающих механический режим в условных точках области

$$(1.5) \quad (R_\beta^\alpha + S_\beta^\alpha) P(0, y_\alpha) = 0$$

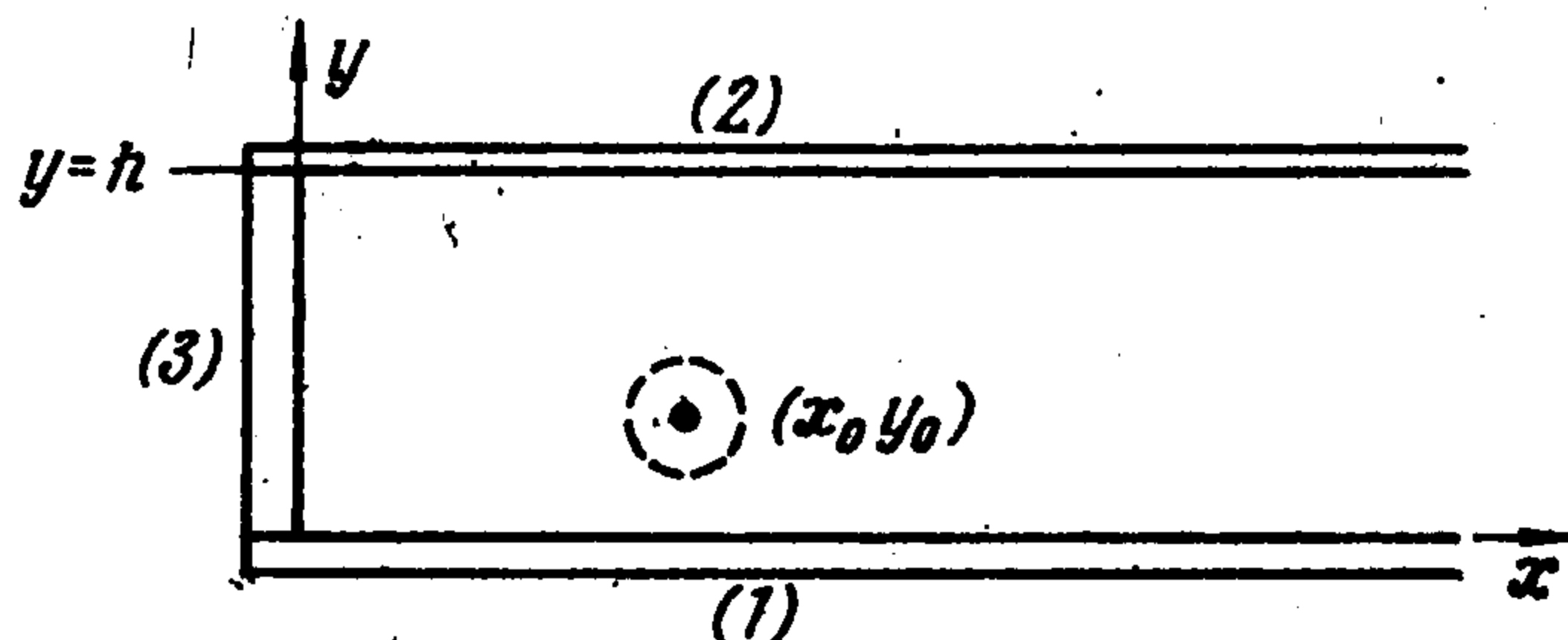
$$R_\beta^\alpha P(0, y_\alpha) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(-1)^{\alpha+1} r_{\beta 1}^\alpha \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} + r_{\beta 2}^\alpha \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] P(x, y_\alpha)$$

$$S_\beta^\alpha P(0, y_\alpha) = \lim_{y \rightarrow y_\alpha} \left[\left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) s_{\beta 1}^\alpha \left(-\frac{\partial}{\partial y} \right) + s_{\beta 2}^\alpha \left(-\frac{\partial}{\partial y} \right) \right] P(0, y)$$

$$\beta = 1, 2, \dots, N^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2$$

Здесь $r_{\beta\gamma}^\alpha, s_{\beta\gamma}^\alpha$ ($\gamma = 1, 2$) — полиномы своих аргументов.

Пример 1. Поле точечного источника в полубесконечном волноводе, стенками которого служат упругие пластины, движения которых являются



ся чисто изгибными (фигура)

$$(1.6) \quad L_\alpha = (-1)^{\alpha+1} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} - k_\alpha^4 \right) \frac{\partial}{\partial y} + v_\alpha, \quad \alpha = 1, 2$$

$$L_3 = \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} - k_3^4 \right) \frac{\partial}{\partial x} + v_3, \quad v_\alpha = \frac{\rho \omega^2}{D_\alpha}$$

Здесь k_α — волновые числа изгибных волн в пластинах, ρ — плотность акустической среды, D_α — цилиндрические жесткости пластин ($\alpha = 1, 2, 3$).

Будем считать, что в точках $(0, y_\alpha)$ пластины жестко спаяны между собой. Этому случаю соответствуют следующие гранично-контактные условия:

$$(1.7) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial y} P(x, y_\alpha) = \lim_{y \rightarrow y_\alpha} \frac{\partial}{\partial x} P(0, y) = 0$$

$$(1.8) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} P(x, y_\alpha) + \lim_{y \rightarrow y_\alpha} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} P(0, y) = 0$$

$$(1.9) \quad (-1)^\alpha D_\alpha \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} P(x, y_\alpha) + D_3 \lim_{y \rightarrow y_\alpha} \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} P(0, y) = 0 \quad (\alpha = 1, 2)$$

Условие (1.7) означает отсутствие смещений пластин в местах их спая, (1.8) — неизменность угла между пластинами, (1.9) — отсутствие сторонних вращающих моментов в местах спая. Общее число гранично-контактных условий в соответствии с (1.4) равно восьми.

Пример 2. Поле точечного источника в бесконечном волноводе с упругими стенками перекрыто упругой перегородкой, жестко скрепленной со

стенками. Как и в примере 1, ограничимся чисто изгибными движениями пластин. Здесь требуется найти решение уравнения (1.1) при $x \neq 0$, $0 < y < h$, удовлетворяющее граничным условиям (1.2) при $x \neq 0$ и условиям сопряжения при $x = 0$, $0 < y < h$, выражающим непрерывность нормальных смещений на границе пластина — акустическая среда и баланс сил, действующих на пластину

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} P(-0, y) &= \frac{\partial}{\partial x} P(+0, y) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} - k_3^4 \right) \left[\frac{\partial}{\partial x} P(-0, y) + \frac{\partial}{\partial x} P(+0, y) \right] &= \\ &= \nu_3 [P(-0, y) - P(+0, y)] \end{aligned}$$

После разбиения искомого акустического поля на четную и нечетную части по переменной x задача сводится к двум независимым задачам рассматриваемого типа.

2. Решение задачи. Ниже строится решение, удовлетворяющее всем требованиям задачи, кроме гранично-контактных условий. Будем искать решение в виде

$$(2.1) \quad P(x, y) = P_0(x, y) + P^*(x, y)$$

$$(2.2) \quad P_0(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda(x - x_0) - \gamma|y - y_0|) \frac{d\lambda}{\gamma}$$

Здесь функция $P_0(x, y)$ представляет собой поле точечного источника с координатами (x_0, y_0) в безграничной среде. В (2.2) введено обозначение $\gamma = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$, при этом выбор ветви радикала фиксирован требованием $\operatorname{Re} \gamma > 0$ при $\operatorname{Im} \lambda = 0$, $\operatorname{Im} k > 0$.

В связи с тем, что поле источника P_0 дается различными представлениями для $y < y_0$ и $y > y_0$, P^* удобно искать в виде

$$(2.3) \quad P^*(x, y) = \begin{cases} P_1(x, y), & 0 < y < y_0 \\ P_2(x, y), & y_0 < y < h \end{cases}$$

$$(2.4) \quad P_\alpha(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Lambda} [p_\alpha(\lambda) e^{\gamma y} + q_\alpha(\lambda) e^{-\gamma y}] e^{i\lambda x} \frac{d\lambda}{\gamma}$$

Здесь p_α, q_α — неизвестные функции комплексной переменной λ , Λ — непрерывный контур интегрирования, проходящий по действительной оси комплексной плоскости λ от $-\infty$ до $+\infty$, за исключением некоторого конечного участка. Поведение контура на этом участке будет описано ниже.

Функции P_α^* дополнительно должны удовлетворять условиям сопряжения при $y = y_0$, $0 < x < \infty$, $x \neq x_0$

$$(2.5) \quad P_1^*(x, y_0) = P_2^*(x, y_0), \quad \frac{\partial}{\partial y} P_1^*(x, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} P_2^*(x, y_0)$$

На основании граничных условий (1.2) и условий сопряжения (2.5) получаем систему интегральных уравнений, которым должны удовлетво-

рять искомые функции

$$(2.6) \quad \int_{\Lambda} [l_2 p_2 e^{\gamma h} + l_2^{\circ} q_2 e^{-\gamma h} + l_2^{\circ} e^{-i\lambda x_0 - \gamma(h-y_0)}] e^{i\lambda x} \frac{d\lambda}{\gamma} = 0$$

$$\int_{\Lambda} [l_1^{\circ} p_1 + l_1 q_1 + l_1^{\circ} e^{-i\lambda x_0 - \gamma y_0}] e^{i\lambda x} \frac{d\lambda}{\gamma} = 0 \quad (x > 0)$$

$$\int_{\Lambda} [(p_2 - p_1) e^{\gamma y_0} + (q_2 - q_1) e^{-\gamma y_0}] e^{i\lambda x} \frac{d\lambda}{\gamma} = 0$$

$$\int_{\Lambda} [(p_2 - p_1) e^{\gamma y_0} - (q_2 - q_1) e^{-\gamma y_0}] e^{i\lambda x} d\lambda = 0$$

Здесь

$$l_{\alpha}(\lambda) = -\gamma m_{\alpha 1}(\lambda^2) + m_{\alpha 2}(\lambda^2)$$

$$l_{\alpha}^{\circ}(\lambda) = \gamma m_{\alpha 1}(\lambda^2) + m_{\alpha 2}(\lambda^2), \quad \alpha = 1, 2$$

Интегральные уравнения (2.6) будут выполнены, если положить

$$(2.7) \quad l_2 p_2 e^{\gamma h} + l_2^{\circ} q_2 e^{-\gamma h} + l_2^{\circ} e^{-i\lambda x_0 - \gamma(h-y_0)} = \gamma \Phi_2^+(\lambda)$$

$$l_1^{\circ} p_1 + l_1 q_1 + l_1^{\circ} e^{-i\lambda x_0 - \gamma y_0} = \gamma \Phi_1^+(\lambda)$$

$$(p_2 - p_1) e^{\gamma y_0} + (q_2 - q_1) e^{-\gamma y_0} = 2\gamma A_+(\lambda)$$

$$(p_2 - p_1) e^{\gamma y_0} - (q_2 - q_1) e^{-\gamma y_0} = 2B_+(\lambda)$$

Здесь Φ_{α}^+ , A_+ , B_+ — функции аналитические выше контура Λ . Выражение $P = P_0 + P^*$ через функции Φ_{α}^+ , A_+ , B_+ имеет вид

$$(2.8) \quad P_0(x, y) + P_2^*(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Lambda} e^{i\lambda x} \frac{d\lambda}{D(\lambda)} \{t_2(\lambda, y) \Phi_1^+(\lambda) +$$

$$+ t_1(\lambda, y) \Phi_2^+(\lambda) + t_2(\lambda, y) t_1(\lambda, y_0) [e^{-i\lambda x_0} - B_+(\lambda)] +$$

$$+ t_2(\lambda, y) t_1'(\lambda, y_0) A_+(\lambda)\} \quad (y_0 < y < h)$$

$$P_0(x, y) + P_1^*(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Lambda} e^{i\lambda x} \frac{d\lambda}{D(\lambda)} \{t_2(\lambda, y) \Phi_1^+(\lambda) +$$

$$+ t_1(\lambda, y) \Phi_2^+(\lambda) + t_1(\lambda, y) t_2(\lambda, y_0) [e^{-i\lambda x_0} - B_+(\lambda)] +$$

$$+ t_1(\lambda, y) t_2'(\lambda, y_0) A_+(\lambda)\} \quad (0 < y < h)$$

Здесь

$$\gamma D(\lambda^2) = l_1 l_2 e^{\gamma h} - l_1^{\circ} l_2^{\circ} e^{-\gamma h}$$

$$\gamma t_1(\lambda, y) = l_1 e^{\gamma y} - l_1^{\circ} e^{-\gamma y}, \quad \gamma t_2(\lambda, y) = l_2 e^{\gamma(h-y)} - l_2^{\circ} e^{-\gamma(h-y)}$$

$$t_{\alpha}'(\lambda, y) = \frac{\partial}{\partial y} t_{\alpha}(\lambda, y)$$

На основании граничного условия (1.3) получим следующую систему интегральных уравнений:

$$(2.9) \quad \int_{\Lambda} \frac{n_3(\lambda) d\lambda}{D(\lambda)} \{t_2(\lambda, y) \Phi_1^+(\lambda) + t_1(\lambda, y) \Phi_2^+(\lambda) +$$

$$+ t_2(\lambda, y) t_1(\lambda, y_0) [e^{-i\lambda x_0} - B_+(\lambda)] + t_2(\lambda, y) t_1'(\lambda, y_0) A_+(\lambda)\} = 0$$

$$(y_0 < y < h)$$

$$\int_{\Lambda} \frac{n_3(\lambda) d\lambda}{D(\lambda)} \{t_2(\lambda, y) \Phi_1^+(\lambda) + t_1(\lambda, y) \Phi_2^+(\lambda) + t_1(\lambda, y) t_2(\lambda, y_0) \times \\ \times [e^{-i\lambda x_0} - B_+(\lambda)] + t_1(\lambda, y) t_2'(\lambda, y_0) A_+(\lambda)\} = 0 \quad (0 < y < h)$$

Интегральные уравнения (2.9) будут удовлетворены, если контур интегрирования Λ выбрать симметричным относительно начала координат и положить

$$(2.10) \quad n_3(\lambda) \Phi_\alpha^+(\lambda) = \lambda \Phi_\alpha(\lambda^2), \quad n_3(\lambda) A_+(\lambda) = \lambda A(\lambda^2) \\ n_3(\lambda) B_+(\lambda) - n_3(-\lambda) e^{i\lambda x_0} = \lambda B(\lambda^2) \\ n_3(\lambda) = i\lambda m_{31}(-\gamma^2) + m_{32}(-\gamma^2)$$

Здесь $\Phi_\alpha(\lambda^2)$, $A(\lambda^2)$, $B(\lambda^2)$ — четные функции комплексной переменной λ . Согласно теореме об аналитическом продолжении они являются целыми функциями комплексной переменной λ .

Для непрерывности $P^*(x, y)$ в области $x \geq 0$, $0 \leq y \leq h$ достаточно выполнения следующих оценок в окрестности бесконечно удаленной точки комплексной плоскости λ :

$$n_3(\lambda) \Phi_\alpha^+(\lambda) = O(\lambda^{N_\alpha + N_3 - 1 - \varepsilon_\alpha}) \\ n_3(\lambda) A_+(\lambda) = O(\lambda^{N_3 - 1 - \varepsilon_3}) \\ n_3(\lambda) B_+(\lambda) - n_3(-\lambda) e^{i\lambda x_0} = O(\lambda^{N_3 - \varepsilon_4})$$

На основании теоремы Лиувилля функция $\Phi_\alpha(\lambda^2)$, $A(\lambda^2)$, $B(\lambda^2)$ — полиномы комплексной переменной λ^2 , при этом степень $\Phi_\alpha(\lambda^2)$ равна $N^{(\alpha)} - 1$.

Функции Φ_α^+ , A_+ , B_+ должны быть аналитическими выше контура Λ . В силу этого контур Λ должен быть выбран таким образом, чтобы корни $n_3(\lambda)$ располагались под ним [2]. Заметим, что $L_3 P(0, y)$, где $P(x, y)$ определяется формулами (2.8), представляет собой линейную комбинацию $\delta(y - y_0)$ и некоторых ее производных. Коэффициенты этой комбинации выражаются через коэффициенты полиномов $A(\lambda^2)$ и $B(\lambda^2)$, т. е. часть $P(x, y)$, зависящая от $A(\lambda^2)$ и $B(\lambda^2)$, описывает поле точечной неоднородности границы, возникающей в связи с разбиением области линией $y = y_0$. Таким образом, для удовлетворения условия (1.3) следует $A(\lambda^2)$ и $B(\lambda^2)$ положить равными нулю.

После преобразований выражение для P принимает вид

$$(2.11) \quad P(x, y) = P_1(x, y) + P_2(x, y) + Q_1(x, y) + Q_2(x, y)$$

$$(2.12) \quad P_1(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Lambda} e^{i\lambda(x-x_0)} \frac{t(\lambda, y, y_0)}{D(\lambda)} d\lambda \\ P_2(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Lambda} e^{i\lambda(x+x_0)} \frac{n_3(-\lambda) t(\lambda, y, y_0)}{n_3(\lambda) D(\lambda)} d\lambda \\ Q_1(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Lambda} e^{i\lambda x} \frac{t_2(\lambda, y) \Phi_1(\lambda^2)}{n_3(\lambda) D(\lambda)} \lambda d\lambda \\ Q_2(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Lambda} e^{i\lambda x} \frac{t_1(\lambda, y) \Phi_2(\lambda^2)}{n_3(\lambda) D(\lambda)} \lambda d\lambda$$

$$\begin{aligned} \gamma^2 t(\lambda, y, y_0) = & l_1 l_2 e^{\gamma(h-|y-y_0|)} + l_1^{\circ} l_2^{\circ} e^{-\gamma(h-|y-y_0|)} - l_1^{\circ} l_2 e^{\gamma(h-y-y_0)} - \\ & - l_1 l_2^{\circ} e^{-\gamma(h-y-y_0)} \end{aligned}$$

Здесь P_1 — поле точечного источника в бесконечном волноводе, P_2 — поле изображения источника относительно границы $x = 0$, Q_{α} — поле, расходящееся от угловых точек $(0, y_{\alpha})$ области.

Подынтегральные функции в этих выражениях не имеют точек ветвления при $\lambda = \pm k$ и являются дробными функциями комплексной переменной λ . Полюса этих функций расположены в точках λ_s , для которых $D(\lambda_s) = 0$, а также в корнях полинома $n_3(\lambda)$.

Корни $D(\lambda)$ представляют собой волновые числа нормальных волн. В силу четности $D(\lambda)$ волновые числа нормальных волн располагаются симметрично относительно $\lambda = 0$. При $\text{Im } k > 0$ $D(\lambda)$ не имеет вещественных корней, и контур Λ лежит на вещественной оси, за исключением окрестности начала координат, где он, являясь симметричным относительно $\lambda = 0$, оставляет корни $n_3(\lambda)$ снизу, а корни $D(\lambda)$, для которых $0 < \arg \lambda_s < \pi$ — сверху. При этом предполагается, что ни один из корней $n_3(\lambda)$ не совпадает с каким-либо корнем $D(\lambda)$ и $n_3(-\lambda)$. При $\text{Im } k = 0$ некоторые из корней $D(\lambda)$ выходят на вещественную ось, причем на ее положительную часть выходят корни из верхней полуплоскости, а на отрицательную — из нижней. Поэтому в случае отсутствия поглощения Λ смещается с вещественной оси и обходит положительные корни $D(\lambda)$ снизу, а отрицательные — сверху. Контур интегрирования сходного вида уже встречались при рассмотрении дифракции акустических волн на пластинах, скрещенных под прямым углом [2].

При отсутствии поглощения в среде и стенках волновода на участке $(-k, k)$ располагается некоторое конечное число корней, причем оно растет с безразмерной толщиной волновода kh . Далее на мнимой оси находится счетное множество корней, при больших натуральных s асимптотически располагающихся в точках $\pm i s \pi / h$. Наконец имеется некоторый конечный набор корней, которые при возрастании kh переходят в те корни $l_{\alpha}(\lambda)$, для которых $\text{Re } \gamma > 0$. Количество этих корней определяется свойствами дифференциальных операторов L_{α} и не зависит от толщины волновода kh . В их числе могут иметься вещественные корни, расположенные на участках $(-\infty, -k)$ и (k, ∞) . Эти корни определяют волновые числа «пристеночных» волн, амплитуда которых экспоненциально убывает при удалении от стенок волновода. В случае граничных операторов, определяемых формулами (1.6), имеется две такие волны. Они связаны с изгибными движениями каждой из стенок волновода.

Интегрирование в (2.12) можно свести к суммированию ряда из вычетов, представляющего наложение нормальных волн

$$(2.13) \quad \begin{aligned} P_1(x, y) = & \frac{i}{2} \sum_s e^{i\lambda_s |x-x_0|} \frac{t_1(\lambda_s, y_0) t_2(\lambda_s, y)}{D'(\lambda_s)} \\ P_2(x, y) = & - \frac{i}{2} \sum_s e^{i\lambda_s (x+x_0)} \frac{n_3(-\lambda_s) t_1(\lambda_s, y_0) t_2(\lambda_s, y)}{n_3(\lambda_s) D'(\lambda_s)} \end{aligned}$$

$$Q_1(x, y) = \frac{i}{2} \sum_s e^{i\lambda_s x} \frac{\lambda_s t_2(\lambda_s, y) \Phi_1(\lambda_s^2)}{n_3(\lambda_s) D'(\lambda_s)}$$

$$Q_2(x, y) = \frac{i}{2} \sum_s e^{i\lambda_s x} \frac{\lambda_s t_1(\lambda_s, y) \Phi_2(\lambda_s^2)}{n_3(\lambda_s) D'(\lambda_s)} \left(D'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} D(\lambda) \right)$$

Здесь суммирование распространяется на корни $D(\lambda)$, лежащие выше Λ . Заметим, что имеет место следующее равенство:

$$t_1(\lambda_s, y_0) t_2(\lambda_s, y) = t_1(\lambda_s, y) t_2(\lambda_s, y_0)$$

отражающее факт симметрии функции Грина P относительно перестановки (x, y) и (x_0, y_0) .

3. Гранично-контактные условия. Формальное применение гранично-контактных операторов R_{β^α} , S_{β^α} к Q_α приводит к расходящимся интегралам, причем переход от интегрирования к суммированию ряда из вычетов не устраняет расходимостей. Ниже указывается способ регуляризации этих интегралов при следующих ограничениях на L_α и R_{β^α} , S_{β^α} :

$$(3.1) \quad r_{\beta^\alpha}(\lambda) l_\alpha(\lambda) - r_{\beta^{\circ\alpha}}(\lambda) l_\alpha^\circ(\lambda) = O(\lambda^{N_\alpha})$$

$$(3.2) \quad s_{\beta^\alpha}(\lambda) n_3(-\lambda) - s_{\beta^\alpha}(-\lambda) n_3(\lambda) = O(\lambda^{N_3})$$

$$s_{\beta^{\circ\alpha}}(\lambda) n_3(-\lambda) - s_{\beta^{\circ\alpha}}(-\lambda) n_3(\lambda) = O(\lambda^{N_3}) \quad (\alpha = 1, 2)$$

Здесь

$$r_{\beta^\alpha}(\lambda) = -\gamma r_{\beta_1^\alpha}(\lambda) + r_{\beta_2^\alpha}(\lambda), \quad r_{\beta^{\circ\alpha}}(\lambda) = \gamma r_{\beta_1^\alpha}(\lambda) + r_{\beta_2^\alpha}(\lambda)$$

$$s_{\beta^\alpha}(\lambda) = \lambda s_{\beta_1^\alpha}(\gamma) + s_{\beta_2^\alpha}(\gamma), \quad s_{\beta^{\circ\alpha}}(\lambda) = \lambda s_{\beta_1^\alpha}(-\gamma) + s_{\beta_2^\alpha}(-\gamma)$$

Подобные соотношения дают возможность регуляризации гранично-контактных интегралов для полубесконечных пластин, являющихся продолжением друг друга [1], и пластин, состыкованных под прямым углом [2].

Ограничимся рассмотрением $R_{\beta^1} Q_1$ и $S_{\beta^1} Q_1$, так как случай $R_{\beta^2} Q_2$ и $S_{\beta^2} Q_2$ может быть рассмотрен аналогично.

Используя тождество

$$(3.3) \quad r_{\beta^{\circ 1}} l_2 e^{\gamma h} - r_{\beta^1} l_2^\circ e^{-\gamma h} = \frac{2\gamma r_{\beta^1} r_{\beta^{\circ 1}} D(\lambda)}{l_1 r_{\beta^1} + l_1^\circ r_{\beta^{\circ 1}}} + (r_{\beta^1} l_2^\circ e^{-\gamma h} + r_{\beta^{\circ 1}} l_2 e^{\gamma h}) \frac{l_1^\circ r_{\beta^{\circ 1}} - l_1 r_{\beta^1}}{l_1 r_{\beta^1} + l_1^\circ r_{\beta^{\circ 1}}}$$

получаем

$$(3.4) \quad R_{\beta^1} Q_1(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Lambda} \frac{r_{\beta^1} r_{\beta^{\circ 1}} \Phi_1(\lambda^2)}{n_3(l_1 r_{\beta^1} + l_1^\circ r_{\beta^{\circ 1}})} e^{i\sigma\lambda} \lambda d\lambda +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{\Lambda} \frac{(r_{\beta^{\circ 1}} l_2 e^{\gamma h} + r_{\beta^1} l_2^\circ e^{-\gamma h}) (r_{\beta^{\circ 1}} l_1^\circ - l_1 r_{\beta^1}) \Phi_1(\lambda^2)}{\gamma n_3 D(\lambda) (l_1^\circ r_{\beta^{\circ 1}} + l_1 r_{\beta^1})} e^{i\sigma\lambda} \lambda d\lambda$$

Деформируем контур Λ в (3.4) в новый контур Λ_1 , обходящий корни выражения $l_1^\circ(\lambda) r_{\beta^{\circ 1}}(\lambda) + l_1(\lambda) r_{\beta^1}(\lambda)$, сверху, чтобы при этом не пересечь корни $n_3(\lambda) D(\lambda)$. В результате первый интеграл в (3.4) по контуру Λ_1 равен нулю и $R_{\beta^1} Q_1(0, 0)$ сводится ко второму интегралу по контуру Λ_1 , который в силу оценки (3.1) сходится, и множитель $e^{i\sigma\lambda}$, указываю-

щий на характер предельного перехода, можно опустить. Заменяя интегральное представление (3.4) рядом из вычетов, получаем следующее выражение:

$$R_{\beta^1} Q_1(0, 0) = \frac{i}{2} \sum_s \frac{(r_{\beta^1}^{o1} l_2 e^{\gamma h} + r_{\beta^1} l_2^o e^{-\gamma h}) (r_{\beta^1}^{o1} l_1^o - r_{\beta^1} l_1) \lambda \Phi(\lambda^2)}{\gamma n_3 D'(\lambda) (r_{\beta^1}^{o1} l_1^o + r_{\beta^1} l_1)} \Big|_{\lambda=\lambda_s}$$

Здесь, как и в (2.13), суммирование распространяется на корни $D(\lambda)$, лежащие выше Λ .

Для регуляризации $S_{\beta^1} Q_1(0, 0)$ достаточно в подынтегральном выражении, получающемся после применения оператора S_{β^1} , выделить четную часть по переменной λ . В силу симметрии интеграл от нечетной части равен нулю. В результате имеем

$$S_{\beta^1} Q_1(0, 0) = \frac{1}{8\pi} \{ l_2 e^{\gamma h} [s_{\beta^1}(\lambda) n_3(-\lambda) - s_{\beta^1}(-\lambda) n_3(\lambda)] - \\ - l_2^o e^{\gamma h} [s_{\beta^1}^{o1}(\lambda) n_3(-\lambda) - s_{\beta^1}^{o1}(-\lambda) n_3(\lambda)] \} \frac{\lambda \Phi_1(\lambda^2) d\lambda}{\gamma n_3(\lambda) n_3(-\lambda) D(\lambda)}$$

Здесь в силу оценки (3.2) стоят сходящиеся интегралы. Их также можно представить в виде ряда из вычетов, причем суммирование будет распространяться на корни $D(\lambda)$, лежащие выше контура Λ , а также на корни $n_3(-\lambda)$.

Поступила 31 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Коузов Д. П. Дифракция цилиндрической гидроакустической волны на стыке двух полубесконечных пластин. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
2. Белинский Б. П., Коузов Д. П., Чельцова В. Д. О дифракции акустических волн на пластинах, сочлененных под прямым углом. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.