Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 62—50 : 534

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ПОМОЩИ МАЛЫХ СИЛ

Л. Д. Акуленко

(Москва)

В первом приближении по малому параметру ε решаются некоторые задачи оптимального управления движением одночастотной колебательной системы, которая в невозмущенном состоянии состоит из произвольного числа колеблющихся звеньев. Предполагается, что частота зависит от медленного времени, а управление входит только в возмущающие члены, так что система формально слабо управляема [1]. Но так как интервал времени, на котором развивается процесс — величина $\sim 1/\varepsilon$, то все управляемые величины успевают измениться существенно [2,3], т. е. исследуются интересные для практики случаи малых, но длительных управляющих сил.

В качестве механических примеров рассчитываются некоторые задачи оптимального управления колебаниями систем типа плоского осциллятора и др.

1. Постановка задач оптимального управления и построение усредненных краевых задач принципа максимума. Рассмотрим механическую квазилинейную систему вида

$$\mu(\tau)r^{\cdot\cdot} + k(\tau)r = \varepsilon f(\tau, r, r^{\cdot}, u) + F(\tau) \tag{1.1}$$
$$r(t_0) = r_0,\ r^{\cdot}(t_0) = r_0^{\cdot}$$

распадающуюся на n осциллирующих звеньев при $\varepsilon = 0$. Здесь $r = (x_1, \ldots, x_n)$, $r^{\cdot} = dr/dt$ — обобщенные координаты, $t \geqslant t_0$ — время, $\tau = \varepsilon t + \text{const}$ — «медленное время», $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ — малый параметр, $\varepsilon > 0$; $u = (u_1, \ldots, u_m)$ — вектор управляющих воздействий, $u \in U$; U — некоторое выпуклое фиксированное множество; t_0, r_0, $r_0^{\cdot}$ — начальные данные. Матричные функции μ — «масса» и k — «коэффициент жесткости» предполагаются диагональными и строго положительными. Все функции считаются достаточно гладкими в рассматриваемой области изменения аргументов.

Формально система (1.1) слабо управляема [1], так как при $\varepsilon = 0$ управление отсутствует

$$\mu(\tau)r^{\cdot\cdot} + k(\tau)r = F(\tau), \quad \tau = \text{const} \tag{1.2}$$

Используя известное решение системы (1.2), приведем (1.1) к более удобному для исследований стандартному виду при помощи соотношений

$$r = a\sin\psi + b\cos\psi + k^{-1}F, \quad r^{\cdot} = \nu(a\cos\psi - b\sin\psi) \tag{1.3}$$
$$\nu^2 = \mu^{-1}k, \quad \psi = \int_{t_0}^{t} \nu(\tau_1)\, dt_1$$

Здесь a, b — новые (медленные) переменные, ν^2 — диагональная матрица квадратов собственных частот, а выражение типа $a\sin\psi$ есть вектор вида ($a_1 \sin \psi_1, \ldots, a_n \sin \psi_n$). Дифференцируя соотношения (1.3) в силу возмущенной системы (1.1), получим

$$
\begin{aligned}
(1.4)\qquad & a^\cdot = \varepsilon\nu^{-1}\mu^{-1}f \cos\psi - \varepsilon\nu^{-1}\nu' (a\cos\psi - b\sin\psi)\cos\psi - \\
& - \varepsilon (k^{-1}F)' \sin\psi \equiv \varepsilon A \\
& b^\cdot = -\varepsilon\nu^{-1}\mu^{-1}f \sin\psi + \varepsilon\nu^{-1}\nu' (a\cos\psi - b\sin\psi)\sin\psi - \\
& -\varepsilon (k^{-1}F)' \cos\psi \equiv \varepsilon B \\
& \psi^\cdot = \nu(\tau), \quad \psi(t_0) = 0 \\
& (a(t_0) = \nu^{-1}[\nu(r - k^{-1}F)\sin\psi + r^\cdot \cos\psi]_{t_0} \equiv a_0, \quad b(t_0) = \\
& = \nu^{-1}[\nu(r - k^{-1}F)\cos\psi - r^\cdot \sin\psi]_{t_0} \equiv b_0)
\end{aligned}
$$

Здесь штрих означает производную по τ. В координатной записи, например, первый член верхнего уравнения имеет вид

$$
\begin{aligned}
& \nu_i^{-1}\mu_i^{-1}f_i(\tau, a_j \sin\psi_j + b_j\cos\psi_j + k_j^{-1}F_j, \ \nu_j^{-1}(a_j\cos\psi_j - \\
& - b_j\sin\psi_j), u_l)\cos\psi_i \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned}
$$

Правая часть системы (1.4) — сложная многочастотная функция, применение методики усреднения к которой приводит к значительным трудностям, вызываемых резонансами [4, 5]. Задачи оптимального управления для аналогичной системы с $\nu = \mathrm{const}$ рассматривались в [6]. Для систем с переменными частотами предположения о «нерезонансности» и «резонансности» представляются весьма искусственными. Поэтому далее будет исследоваться система (1.4) при условии, что все $\nu_i(\tau)$ совпадают — случай одночастотной системы. Тогда правая часть (1.4) периодична по ψ с периодом 2π. Применяя методику канонического усреднения, развитую в [2, 3] для одночастотных систем, будем решать некоторые конкретные механические задачи оптимального в смысле различных критериев управления медленными переменными a и b. При этом естественно предположить, что функционал и конечное многообразие не сильно зависят от времени t или фазы ψ.

Переходим к постановке задач оптимального управления системой (1.4) и краткой формулировке результатов применения метода усреднения. Критерий качества пусть имеет вид

$$
(1.5)\qquad J = g(\tau, a, b)|_\theta + \varepsilon\int_{t_0}^{\theta} G(\tau, a, b, \psi, u)\,dt \to \min_{u\in U}
$$

Здесь $\theta = T$ ($T \sim 1 / \varepsilon$) — заданная величина для задачи с фиксированным моментом окончания процесса и $\theta = t_1$ — неизвестная величина, подлежащая определению в случае задачи оптимального быстродействия. Тогда момент t_1 выбирается из условия

$$
(1.6)\qquad M(\tau, a, b)|_{t_1} = 0, \quad M = (M_1, \ldots, M_L), \quad L \leqslant 2n
$$

Пусть поставленные задачи имеют решение. Тогда оптимальное управление и траектория удовлетворяют принципу максимума [7]

$$
(1.7)\qquad H^* \equiv [-\varepsilon G + \varepsilon(pA) + \varepsilon(qB) + p_\psi\nu]^* = \max_{u\in U} H, \quad t \in [t_0, \theta]
$$

Здесь H — функция Гамильтона, звездочка означает, что функции берутся при $u = u^*(t)$ — оптимальном управлении и соответствующем ему решении системы (1.4), а круглые скобки означают скалярное произведение. Переменные p, q и p_ψ, сопряженные a, b и ψ соответственно, удовлетворяют системе

$$(1.8)\qquad p^\cdot = -\varepsilon(\partial h/\partial a)^*, \quad q^\cdot = -\varepsilon(\partial h/\partial b)^*, \quad p_\psi^\cdot = -\varepsilon(\partial h/\partial\psi)^*$$
$$H \equiv \varepsilon h_*^* + \nu p_\psi$$

и некоторым краевым условиям. Для задачи с фиксированным $\theta = T$

$$(1.9)\qquad p(T) = -(\partial g/\partial a)_T, \quad q(T) = -(\partial g/\partial b)_T, \quad p_\psi(T) = 0$$

Для задачи типа оптимального быстродействия

$$(1.10)\qquad p(t_1) = -\frac{\partial}{\partial a}(g + (\lambda M))_{t_1}, \quad q(t_1) = -\frac{\partial}{\partial b}(g + (\lambda M))_{t_1}, \quad p_\psi(t_1) = 0$$

Здесь $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_L)$ — параметр, исключаемый в процессе решения. Замыкает систему краевых условий равенство

$$(1.11)\qquad H^*|_{t_1} = \varepsilon\left(\frac{\partial g}{\partial\tau} + \left(\lambda\frac{\partial M}{\partial\tau}\right)\right)_{t_1}$$

Если максимум H достигается внутри множества U, а H непрерывно дифференцируема по u_i, то

$$(1.12)\qquad \partial H/\partial u_i = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

Эти соотношения могут рассматриваться как уравнения относительно неизвестного вектора u. Итак, пусть из условия (1.7) или, в частности, из уравнений (1.12) вектор управления найден

$$(1.13)\qquad u^* = V(\tau, a, b, \psi, p, q)$$

и является гладкой функцией, периодической по ψ. Подставляя ее в уравнения (1.4), (1.8), получим краевую задачу, описываемую стандартной системой с вращающейся фазой и периодической правой частью.

Используя развитую в [2, 3] методику, выпишем краевые задачи первого приближения. Соответствующие уравнения не содержат быстрой переменной в правой части и могут быть записаны в медленном времени $s = \varepsilon t$

$$(1.14)\qquad \frac{d\alpha}{ds} = A_0(\tau, \alpha, \beta, \xi, \eta), \quad \alpha(s_0) = a_0; \quad \frac{d\xi}{ds} = -\frac{\partial k_0}{\partial\alpha}(\tau, \alpha, \beta, \xi, \eta)$$
$$\frac{d\beta}{ds} = B_0(\tau, \alpha, \beta, \xi, \eta), \quad \beta(s_0) = b_0; \quad \frac{d\eta}{ds} = -\frac{\partial k_0}{\partial\beta}(\tau, \alpha, \beta, \xi, \eta)$$

Здесь α, β, ξ и η — усредненные значения переменных a, b, p и q соответственно. Независимая переменная s изменяется на интервале порядка единицы: $s \in [s_0, \sigma]$, где $s_0 = \varepsilon t_0$, а $\sigma = \varepsilon T = S$ или $\sigma = \varepsilon t_1 \equiv s_1$. Правая часть системы (1.14) строится при помощи усредненного гамильтониана k_0

$$(1.15)\qquad k_0(\tau, \alpha, \beta, \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h^*(\tau, \alpha, \beta, \psi, \xi, \eta)\,d\psi \equiv \langle h^*\rangle$$
$$h^*(\tau, a, b, \psi, p, q) = (pA(\tau, a, b, \psi, V)) + (qB(\tau, a, b, \psi, V)) -$$
$$- G(\tau, a, b, \psi, V)$$

Отметим, что при этом используются тождества

$$(1.16)\qquad \left.\frac{\partial h}{\partial p}\right|_V=\frac{\partial h^*}{\partial p}=A,\quad \left.\frac{\partial h}{\partial a}\right|_V=\frac{\partial h^*}{\partial a}=\left(p\,\frac{\partial A}{\partial a}\right)^*+\left(q\,\frac{\partial B}{\partial a}\right)^*$$

$$\left.\frac{\partial h}{\partial q}\right|_V=\frac{\partial h^*}{\partial q}=B,\quad \left.\frac{\partial h}{\partial b}\right|_V=\frac{\partial h^*}{\partial b}=\left(p\,\frac{\partial A}{\partial b}\right)^*+\left(q\,\frac{\partial B}{\partial b}\right)^*$$

Из (1.16) следует, что

$$(1.17)\qquad \frac{\partial k_0}{\partial \xi}=A_0,\quad \frac{\partial k_0}{\partial \alpha}=\left(\xi\,\frac{\partial A_0}{\partial \alpha}\right)+\left(\eta\,\frac{\partial B_0}{\partial \alpha}\right)$$

$$\frac{\partial k_0}{\partial \eta}=B_0,\quad \frac{\partial k_0}{\partial \beta}=\left(\xi\,\frac{\partial A_0}{\partial \beta}\right)+\left(\eta\,\frac{\partial B_0}{\partial \beta}\right)$$

Здесь и в (1.14) введены обозначения

$$(1.18)\qquad \begin{Bmatrix}A_0\\B_0\end{Bmatrix}(\tau,\alpha,\beta,\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\begin{Bmatrix}A\\B\end{Bmatrix}(\tau,\alpha,\beta,\psi,V)\,d\psi$$

Граничные условия для задачи с фиксированным временем

$$(1.19)\qquad \xi(S)=-(\partial g(\tau,\alpha,\beta)/\partial\alpha)_S,\qquad \eta(S)=-(\partial g(\tau,\alpha,\beta)/\partial\beta)_S$$

В задаче оптимального быстродействия краевые условия (1.10) записываются аналогичным образом

$$(1.20)\qquad \xi(s_1)=-\frac{\partial}{\partial\alpha}(g+(\lambda M))_{s_1},\qquad \eta(s_1)=-\frac{\partial}{\partial\beta}(g+(\lambda M))_{s_1}$$

$$g=g(\tau,\alpha,\beta),\qquad M=M(\tau,\alpha,\beta)$$

И аналогично для (1.11)

$$(1.21)\qquad k_0|_{s_1}=\left[\frac{\partial g}{\partial\tau}+\left(\lambda\,\frac{\partial M}{\partial\tau}\right)\right]_{s_1}$$

Таким образом, если решения приближенных краевых задач построены и притом единственным образом, то они дают приближенное с ε-погрешностью решение исходных краевых задач, а также задач оптимального управления с ε-погрешностью по медленным переменным и функционалу и с погрешностью порядка единицы в определении момента t_1.

Обоснование метода усреднения для гладких правых частей содержится в [4, 5]. Однако в случае замкнутого множества U с линейной по u правой частью системы (1.4), что часто имеет место на практике [8], максимум гамильтониана (1.7) достигается, как правило, на границе множества U, т. е. функция V (1.13) кусочно-непрерывна, причем число разрывов первого рода правой части усредняемой системы порядка $[1/\varepsilon]$. Для обоснования метода усреднения в этом случае могут быть применены результаты работы [9], где проводится исследование для стандартных систем с разрывными правыми частями.

Отметим, что при помощи развитого в [2,3] метода канонического усреднения могут быть построены высшие приближения.

2. Приближенное решение некоторых конкретных задач оптимального управления. Пусть далее всюду функция f линейна по u, $m=n$, т. е. $f=f_0(\tau,r,r^{\cdot})+u$. Рассмотрим сначала задачу минимизации квадратического функционала вида (1.5) с заданным моментом T. Пусть $G=u^2=\Sigma u_i^2$, множество U неограниченно, а $g=\varkappa E$, $E=mr^{\cdot 2}/2+k(r-k^{-1}F)^2/2=k(a^2+b^2)/2$.

Величина E имеет смысл энергии колебаний; выражения типа $mr^{\cdot 2}$ суть скаляры: $mr^{\cdot 2} = r^{\cdot T}mr^{\cdot} = m_1 r_1^{\cdot 2} + \ldots + m_n r_n^{\cdot 2}$.

Согласно (1.12), (1.13) находим: $u^* = (\nu^{-1}\mu^{-1} / 2)(p \cos\psi - q \sin\psi)$. Вычислим теперь среднее значение гамильтониана (1.15), определяющее усредненную систему уравнений

$$k_0 = (\nu^{-1}\mu^{-1})^2 (\xi^2 + \eta^2) / 8 - \nu^{-1}\nu' (\alpha\xi + \beta\eta) / 2 + \nu^{-1}\mu^{-1} (\xi f_{0c} - \eta f_{0s})$$

Здесь обозначены

$$\begin{Bmatrix} f_{0c} \\ f_{0s} \end{Bmatrix} (\tau, \alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0 (\tau, \alpha \sin\psi + \beta \cos\psi + k^{-1}F,$$

$$\nu (\alpha \cos\psi - \beta \sin\psi)) \begin{Bmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{Bmatrix} d\psi$$

Пусть на систему (1.1) действует малое вязкое трение — $\varepsilon\gamma r^{\cdot}$ ($\gamma(\tau)$ — диагональная матрица с положительными элементами). Тогда $f_{0c} = -\gamma\alpha / 2$, $f_{0s} = \gamma\beta / 2$. В результате получается краевая задача с разделяющимися переменными, допускающая явное интегрирование. Решение запишем при помощи обозначений с индексами

$$\begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} (s) = \begin{Bmatrix} a_{i0} \\ b_{i0} \end{Bmatrix} \exp\left(-\int_{s_0}^{s} \Lambda_i ds'\right) + \tag{2.1}$$

$$+ \begin{Bmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{Bmatrix} (S) \int_{s_0}^{s} \Gamma_i (s') \exp\left(\int_S^{s'} \Lambda_i ds'' + \int_s^{s'} \Lambda_i ds''\right) ds'$$

$$\begin{Bmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{Bmatrix} (s) = \begin{Bmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{Bmatrix} (S) \exp\left(\int_S^{s} \Lambda_i ds'\right), \quad s \in [s_0, S]$$

Здесь

$$\Lambda_i (s) = \nu_i^{-1}\nu_i' / 2 + \mu_i^{-1}\gamma_i, \quad \Gamma_i (s) = (\nu_i^{-1}\mu_i^{-1}) / 2, \quad \tau = s + \text{const} \tag{2.2}$$

$$\begin{Bmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{Bmatrix} (S) = -\varkappa k_i (S) \left[1 + \varkappa k_i (S) \int_{s_0}^{S} \Gamma_i (s) \exp\left(2 \int_S^{s} \Lambda_i ds'\right) ds\right]^{-1} \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} a_{i0} \\ b_{i0} \end{Bmatrix} \exp\left(-\int_{s_0}^{S} \Lambda_i ds\right)$$

Полученные выражения (2.1), (2.2) дают приближенное решение задачи оптимального управления с погрешностью порядка ε для интервала времени $t \in [t_0, T]$, где $T \sim 1 / \varepsilon$. Отметим, что увеличением постоянной $\varkappa > 0$ значение E может быть сделано сколь угодно малым, причем величина функционала при этом остается конечной. При помощи полученных формул получается также приближенное оптимальное решение задачи «раскачки», т. е. увеличения энергии колебаний, что соответствует случаю $\varkappa < 0$.

Рассмотрим теперь задачу оптимального быстродействия по энергии

$$E|_{t_1} = E_1, \quad J = \chi\varepsilon t_1 + \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} u^2 dt \to \min \quad (E, \chi > 0)$$

без ограничений на управление. Пусть выполнены аналогичные предыдущему примеру предположения. Тогда приближенное оптимальное управление имеет вид $u^* = \nu^{-1}\mu^{-1}(\xi\cos\psi - \eta\sin\psi)/2 + O(\varepsilon)$, где ξ и η вычисляются по формулам (2.1), (2.2), в которых параметры $\varkappa$ и σ — корни уравнений

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} k_i(\sigma)(a_{i0}^2 + b_{i0}^2)\exp\Big(-\int_{s_0}^{\sigma}\Lambda_i ds\Big)\Big[1 + \varkappa k_i(\sigma)\int_{s_0}^{\sigma}\Gamma_i(s)\times$$

$$\times\exp\Big(2\int_{\sigma}^{s}\Lambda_i ds_1\Big)ds\Big]^2 = E_1$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{8\nu^2\mu_i^2} + \frac{1}{\varkappa k_i(\sigma)}\left(\frac{\nu'}{2\nu} + \frac{\gamma_i}{\mu_i}\right) - \frac{k_i'}{\varkappa k_i^2}\right]_{\sigma}\varkappa^2(a_{i0}^2 + b_{i0}^2)k_i^2\times$$

$$\times\exp\Big(-2\int_{s_0}^{\sigma}\Lambda_i ds\Big)\Big[1 + \varkappa k_i(\sigma)\int_{s_0}^{\sigma}\Gamma_i(s)\exp\Big(2\int_{\sigma}^{s}\Lambda_i ds_1\Big)ds\Big]^2 = \chi$$

Если параметры системы одинаковы и постоянны, т. е. зависимость от τ отсутствует, то задача допускает явное решение [3].

Пусть теперь имеет место случай задачи с ограничениями на управление вида $|u_i| \leqslant u_{i0}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Из условия максимума функции Гамильтона (1.7) получим $u_1^* = u_{i0}\operatorname{sign}(p_i\cos\psi - q_i\sin\psi)$. Усреднение по ψ приводит к следующему выражению для k_0

$$k_0 = \frac{2}{\pi\nu}\sum_{i=1}^{n}\frac{u_{i0}}{\mu_i}\sqrt{\xi_i^2 + \eta_i^2} - \frac{1}{2}\nu^{-1}\nu'(\alpha\xi + \beta\eta) + \nu^{-1}\mu^{-1}(\xi f_{0c} - \eta f_{0s})$$

При условии $\nu = \text{const}$ и $f_0 \equiv 0$ можно получить решения задач с фиксированным временем и типа быстродействия, так как ξ, $\eta = \text{const}$, а α_i, β_i — кусочно-линейные функции. Решение усложняется, если имеют место особые управления. Однако и в этих ситуациях метод усреднения существенно упрощает исследование задачи оптимального управления.

3. Решение задачи для плоского осциллятора в полярных координатах. В некоторых задачах может оказаться удобным рассмотрение уравнений движения в недекартовой системе координат. Например, в трехмерном случае (пространственный осциллятор) управления могут быть направлены вдоль ортов сферической системы координат $u = (u_r, u_\theta, u_\varphi)$ или возмущающие силы просто записываются в сферических координатах. Выпишем соответствующие уравнения движения:

$$mr^{\cdot\cdot} + kr - mr\theta^{\cdot 2} - mr\varphi^{\cdot 2}\sin^2\theta = \varepsilon u_r + \varepsilon f_r$$
$$0 \leqslant r_1 \leqslant r \leqslant r_2 < \infty$$
$$mr\theta^{\cdot\cdot} + 2mr^{\cdot}\theta^{\cdot} - mr\varphi^{\cdot 2}\sin\theta\cos\theta = \varepsilon u_\theta + \varepsilon f_\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$
$$mr\sin\theta\varphi^{\cdot\cdot} + 2mr\varphi^{\cdot}\theta^{\cdot}\cos\theta + 2mr^{\cdot}\varphi^{\cdot}\sin\theta = \varepsilon u_\varphi + \varepsilon f_\varphi$$
$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

Для иллюстрации приведенных соображений исследуем случай плоской задачи $(\theta \simeq \pi/2)$. Уравнения движения плоского осциллятора в полярных координатах (r, φ) под действием управляющего воздействия

$\varepsilon u = (\varepsilon u_r, \varepsilon u_\varphi)$ возьмем в виде

$$(3.1)\qquad \begin{aligned} &r^\cdot = v_r, && r(t_0) = r_0\\ &v_r^\cdot = v_\varphi^2 / r - kr / m + \varepsilon u_r / m + \varepsilon\delta r^3 / m, && v_r(t_0) = v_{r0}\\ &\varphi^\cdot = v_\varphi / r, && \varphi(t_0) = \varphi_0\\ &v_\varphi^\cdot = -v_r v_\varphi / r + \varepsilon u_\varphi / m, && v_\varphi(t_0) = v_{\varphi 0}\end{aligned}$$

Здесь r — расстояние до неподвижного центра, k — коэффициент жесткости возвращающей силы, $\varepsilon\delta r^3$ — нелинейное возмущение возвращающей силы, m — масса, εu_r и εu_φ — радиальная и трансверсальная составляющие вектора управления. Справа в (3.1) заданы соответствующие начальные условия. Простоты ради предполагается, что параметры задачи постоянны.

Приведем систему (3.1) к стандартному виду с вращающейся фазой [2, 3]. Для этого воспользуемся известным общим решением невозмущенной системы, взяв следующий набор интегралов движения:

$$1)\quad m(v_r^2 + v_\varphi^2) / 2 + kr^2 / 2 = E > 0, \quad 2)\ mrv_\varphi = M, \quad 3)\ r^2 = Ez/k$$

$$4)\quad \varphi = \gamma + \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\psi + w}{\sqrt{1-w^2}} = \gamma + \operatorname{arctg}\left[w + \sqrt{1-w^2}\times\right.$$
$$\left.\times\operatorname{tg}\left(\psi - \operatorname{arctg}\frac{w}{\sqrt{1-w^2}}\right)\right]$$

Здесь

$$z = 1 + w\sin 2\psi, \quad w = [1 - (\nu M / E)^2]^{1/2}$$
$$\psi = \nu(t - t_0) + \psi_0, \quad \nu^2 = k / m, \quad E(1-w)/k \leqslant r^2 \leqslant$$
$$\leqslant E(1+w)/k$$

Величины E, M (w), ψ_0 и γ — постоянные интегрирования. Отметим, что вместо соотношения 3) или 4) можно взять эквивалентное: $r^2 = M^2 / mE\,[1 - w\sin 2(\varphi - \gamma)]$. Формулы 3) и 4) дают явные выражения для $r(t)$ и $\varphi(t)$. Соответствующие им скорости равны

$$r^\cdot = v_r(t) = w\sqrt{E/mz}\cos 2\psi, \quad v_\varphi(t) = r\varphi^\cdot = M/mr =$$
$$= (M/m)\sqrt{k/Ez}$$

Дифференцируя интегралы 1) — 4) в силу возмущенной системы (3.1), получим искомую систему уравнений и начальных значений

$$(3.2)\qquad \begin{aligned} &E^\cdot = \varepsilon v_r(u_r + \delta r^3) + \varepsilon v_\varphi u_\varphi, && E(t_0) = E_0\\ &M^\cdot = \varepsilon r u_\varphi, && M(t_0) = M_0\\ &\gamma^\cdot = -\frac{\sqrt{1-w^2}}{wz}\cos\psi(\cos\psi + w\sin\psi)\left(\frac{E^\cdot}{E} - \frac{M^\cdot}{M}\right), && \gamma(t_0) = \gamma_0\\ &\psi^\cdot = \nu - \varepsilon\frac{w + \sin 2\psi}{2w\sqrt{mEz}}(u_r + \delta r^3) - \frac{M\nu\cos 2\psi}{2w\sqrt{mE^3z}}u_\varphi, && \psi(t_0) = \psi^\circ\end{aligned}$$

Здесь ν — постоянная частота; начальные условия для новых переменных задаются согласно 1) — 4)

$$(3.3)\qquad 2E_0 = m(v_{r0}^2 + v_{\varphi 0}^2) + kr_0^2, \quad M_0 = mr_0 v_{\varphi 0}, \quad w_0 = \sqrt{1 - (\nu M_0 / E_0)^2}$$
$$\sin 2\psi^\circ = (kr_0^2 - E_0)/w_0, \quad \gamma_0 = \varphi_0 - \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\psi^\circ + w_0}{\sqrt{1-w_0^2}}$$

причем ψ° и γ_0 определяются с точностью до $N\pi$ (N — целое). Далее отметим, что правая часть системы (3.2) периодична по ψ с периодом π, а величина ω изменяется согласно уравнению

$$w^\cdot = \frac{\nu^2}{w}\left(\frac{M}{E}\right)^2\left(\frac{E^\cdot}{E} - \frac{M^\cdot}{M}\right) \tag{3.4}$$

В проводимых исследованиях предполагается, что переменная w заключена в пределах: $w \in [w_1, w_2]$, где $w_1 > 0$, $w_2 < 1$, т. е. движение является невырожденным эллипсом, если в каждый момент t полагать ε равным нулю. Очевидно, одно из первых двух уравнений (3.2) может быть заменено уравнением (3.4) с соответствующим начальным условием (3.3). Отметим также, что правая часть системы (3.2) не зависит от γ. Поэтому если функции u_r, u_φ не зависят от γ, то уравнение для γ интегрируется отдельно, а соответствующая сопряженная переменная сохраняется.

Поставим теперь следующую задачу «оптимального быстродействия по энергии»: перевести систему в состояние с энергией E_1 в некоторый нефиксированный момент времени t_1 таким образом, чтобы достигал минимума функционал типа (1.5)

$$J = \varepsilon l t_1 + \varepsilon \int_0^{t_1} (u_r^2 + u_\varphi^2)\, dt \tag{3.5}$$

Здесь $l > 0$ — заданное число. Остальные переменные считаются свободными на правом конце. Выпишем функцию Гамильтона (1.7)

$$\begin{aligned} H &= -\varepsilon l - \varepsilon\,(u_r^2 + u_\varphi^2) + \varepsilon\,(p_E v_r + p_\gamma f_{\gamma r} + q f_{\psi r}) u_r + \\ &+ \varepsilon\,(p_E v_\varphi + p_M r + p_\gamma f_{\gamma\varphi} + q f_{\psi\varphi})\, u_\varphi + \nu q + \varepsilon p_E \delta r^3 v_r \end{aligned}$$

Здесь p_E, p_M, p_γ и q — соответствующие сопряженные переменные, а функции $f_{\gamma r}$, $f_{\gamma\varphi}$, $f_{\psi r}$ и $f_{\psi\varphi}$ суть коэффициенты при u_r и u_φ в третьем и четвертом уравнениях (3.2), вид которых пока несуществен. Из условия максимума H по u (1.12) получим

$$\begin{aligned} u_r^* &= \frac{1}{2}(p_E v_r + p_\gamma f_{\gamma r} + q f_{\psi r}) \quad \left(\frac{\partial H}{\partial u_r} = 0\right) \\ u_\varphi^* &= \frac{1}{2}(p_E v_\varphi + p_M r + p_\gamma f_{\gamma\varphi} + q f_{\psi\varphi}) \quad \left(\frac{\partial H}{\partial u_\varphi} = 0\right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Отметим очевидные свойства получающейся краевой задачи. Так как функция H^* не зависит от γ, то $p_\gamma^\cdot = 0$, а вследствие нулевого граничного условия получим, что $p_\gamma \equiv 0$. Далее, из вида правой части уравнения для q и из нулевого граничного условия следует, что $q = O(\varepsilon)$, т. е. величиной q в рассматриваемом первом приближении можно пренебречь [2, 3]. Таким образом, усредняя по ψ, получим

$$k_0 = \langle h \rangle = -l + \frac{\eta_E^2}{4}\frac{\xi}{m} + \frac{\eta_M^2}{4}\frac{\xi}{k} + \frac{\eta_E \eta_M}{2}\frac{\mu}{m}$$

так как

$$\langle v_r^2 \rangle = \frac{\xi}{m}\left(1 - \frac{\mu}{\xi}\nu\right), \quad \langle r^2 \rangle = \frac{\xi}{k}, \quad \langle v_\varphi^2 \rangle = \frac{\mu}{m}\nu, \quad \langle v_\varphi r \rangle = \frac{\mu}{m}$$

Здесь ξ, η_E и μ, η_M — усредненные значения переменных E, p_E и M, p_M соответственно, а угловые скобки означают усреднение по ψ (см. (1.15), (1.18)). Усредненные уравнения для ξ, η_E, μ, η_M записываются в каноническом виде при помощи функции k_0. Решение краевой задачи имеет вид

$$\xi(s, s_1) = \left[\sqrt{E_0} - \frac{s}{s_1}\left(\sqrt{E_0} - \sqrt{E_1}\right)\right]^2 \tag{3.7}$$

$$\mu(s, s_1) = M_0 \frac{E_1}{E_0}\left[1 + \frac{s_1 - s}{s_1}\left(\sqrt{\frac{E_0}{E_1}} - 1\right)\right]^2$$

$$\eta_E = \frac{4m}{s_1}\left(\sqrt{\frac{E_0}{E_1}} - 1\right) \Big/ \left[1 + \frac{s_1 - s}{s_1}\left(\sqrt{\frac{E_0}{E_1}} - 1\right)\right]$$

$$\eta_M \equiv 0, \quad s_1 = \varepsilon t_1$$

Выражение для s_1 получается приравниванием величины k_0 нулю; в результате

$$s_1 = 2\sqrt{\frac{m}{l}}\,\left|\sqrt{E_0} - \sqrt{E_1}\right| \tag{3.8}$$

Приближенное оптимальное управление согласно (3.6) равно

$$u_{r0}{}^* = \frac{\eta_E(s, s_1)}{2}\,\omega(s, s_1)\sqrt{\frac{\xi(s, s_1)}{m}}\cos 2\psi \Big/ \sqrt{1 + \omega\sin 2\psi} \tag{3.9}$$

$$u_{\varphi0}{}^* = \frac{\eta_E(s, s_1)}{2m}\,\mu(s, s_1)\sqrt{\frac{k}{\xi(s, s_1)}} \Big/ \sqrt{1 + \omega\sin 2\psi}$$

$$\psi = \frac{\nu}{\varepsilon}s + \Delta\psi(s) + \psi^\circ + O(\varepsilon), \quad \omega = \sqrt{1 - (\nu\mu/\xi)^2}$$

После того как найдены ξ, η_E и μ, η_M, выражения для средних значений переменных γ и ψ получаются квадратурой. Приближенное значение угла наклона α вектора управления u к трансверсали вычисляется при помощи (3.9)

$$\operatorname{tg}\alpha = u_{r0}{}^* / u_{\varphi0}{}^* = \frac{\omega(s, s_1)\,\xi(s, s_1)}{\nu\mu(s, s_1)}\cos 2\psi.$$

В результате выражения (3.7) — (3.9) дают приближенное решение задачи оптимального управления (3.2), (3.5) с условием окончания процесса управления $E(t_1) = E_1$. Конечно, это решение приводит к погрешности порядка ε по медленным переменным и функционалу, а момент окончания процесса $t_1 = s_1/\varepsilon \sim 1/\varepsilon$ определяется с погрешностью $O(1)$. Интересно отметить, что значения ξ и μ не зависят явно от жесткости k; не зависят они также от δ, т. е. нелинейной добавки к возвращающей силе. Изменение частоты за счет этой добавки равно $-3\delta\langle E\rangle/(4mk\nu)$, что соответствует одномерному случаю [2].

Заметим также, что если $w \to 1$ ($w < 1$) — колебания вдоль прямой или $w \to 0$ ($w > 0$) — движение по окружности, то уравнения (3.2) вырождаются, и требуется дополнительное исследование. В этом случае можно рассматривать движение системы в декартовой системе координат (см. (1.1)) или в любой другой, например в системе (a, b, ψ) (см. п. 1, 2), в которой уравнения движения не вырождаются. В декартовой системе координат рассматриваемая задача при $\delta = 0$ описывается линейной системой восьми дифференциальных уравнений, и с квадратическим условием окончания процесса $[(m/2)r'^2 + (k/2)r^2]_{t_1} = E_1$ при заданном значении t_1 может быть в принципе аналитически решена точно. Однако для определения момента окончания процесса управления t_1 получается трансцендентное уравнение типа (1.11), допускающее при $\varepsilon \to 0$ бесчисленное множество корней, из которых нужно выбрать наилучший в смысле рассматриваемого критерия. Так как получающиеся выражения чрезвычайно громоздки даже для одномерного случая, то очевидно преимущество применения метода усреднения для исследования многомерных систем [2, 3].

Рассмотрим теперь задачу «чистого быстродействия». Пусть $|u_r| \leqslant u_{r0}$, $|u_\varphi| \leqslant u_{\varphi 0}$, условие окончания процесса управления имеет вид $E(t_1) = E_1$, а остальные фазовые переменные считаются при этом свободными на правом конце. Выписывая, как и раньше, функцию Гамильтона (1.7) и сохраняя те же обозначения, получим из условия максимума H по u

$$u_r^* = u_{r0} \operatorname{sign}(p_E v_r + p_\gamma f_{\gamma r} + q f_{\psi r}) \equiv \operatorname{sign} h_r$$
$$u_\varphi^* = u_{\varphi 0} \operatorname{sign}(p_E v_\varphi + p_M r + p_\gamma f_{\gamma\varphi} + q f_{\psi\varphi}) \equiv \operatorname{sign} h_\varphi$$

Система уравнений и граничные условия для сопряженных переменных имеют вид (1.8), где $h^* = |h_r| + |h_\varphi|$, $h^*(t_1) = 0$, $q(t) = -\varepsilon h^* / \nu$. Искомые медленные переменные в первом приближении описываются канонической системой типа (1.14) с гамильтонианом $k_0 = u_{r0} |\eta_E| \langle |v_r| \rangle + u_{\varphi 0} \langle |\eta_E v_\varphi + \eta_M r| \rangle$. Из уравнений видно, что наилучший результат достигается при условии $\operatorname{sign} \eta_E = \operatorname{sign}(\eta_E v_\varphi + \eta_M r) = \operatorname{sign}(E_1 - E_0)$. Тогда получаем задачу Коши

$$d\xi / ds = (u_{r0} \langle |v_r| \rangle + u_{\varphi 0} \langle v_\varphi \rangle) \operatorname{sign}(E_1 - E_0), \quad \xi(0) = E_0$$
$$d\mu / ds = u_{\varphi 0} \langle r \rangle \operatorname{sign}(E_1 - E_0), \quad \mu(0) = M_0$$

и условие $\xi(s_1) = E_1$, однозначно определяющее s_1. Теперь искомое решение может быть получено простыми вычислительными средствами.

Рассмотрим в заключение случай переменных $m(\tau)$, $k(\tau)$ $(\delta = 0)$ и ограничений на управление вида $u_x^2 + u_y^2 \leqslant u_0^2$. Пусть $\varepsilon\mu_x(\tau)u_x$ и $\varepsilon\mu_y(\tau)u_y$ — управляющие воздействия, где μ_x, μ_y — заданные функции. В результате применения методики п. 1 получим ($\Pi(\tau)$ — усредненный сопряженный вектор)

$$u_x = u_0 (\mu_x / R)(\Pi_a \cos\psi - \Pi_b \sin\psi) + O(\varepsilon)$$
$$u_y = u_0 (\mu_y / R)(\Pi_c \cos\psi - \Pi_d \sin\psi) + O(\varepsilon)$$
$$R^2 = \mu_x^2 (\Pi_a \cos\psi - \Pi_b \sin\psi)^2 + \mu_y^2 (\Pi_c \cos\psi - \Pi_d \sin\psi)^2$$
$$\Pi(\tau) = \Pi(\sigma)[m(\tau)\nu(\tau) / m(\sigma)\nu(\sigma)]^{1/2}$$

Соответствующий усредненный фазовый вектор имеет вид

$$\xi(\tau) = \xi_0 \left[\frac{m(\tau_0)\nu(\tau_0)}{m(\tau)\nu(\tau)}\right]^{1/2} + \frac{u_0}{\sqrt{m(\tau)\nu(\tau)}} \int_{s_0}^{s} \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial \Pi} \frac{ds'}{\sqrt{m(\tau')\nu(\tau')}}$$
$$\xi_0 = (a_0, b_0, c_0, d_0)$$

$$\langle R(\tau, \Pi)\rangle \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} R(\tau, \Pi, \psi)\,d\psi = \frac{2}{\pi}\begin{cases} \sqrt{\beta}\, E\left(\sqrt{(\beta-\alpha)/\beta}\right), & \beta \geqslant \alpha \\ \sqrt{\alpha}\, E\left(\sqrt{(\alpha-\beta)/\alpha}\right), & \alpha > \beta \end{cases}$$

$$\alpha = (A + C)/2 + [(A - C)^2/4 + B^2]^{1/2}, \quad \beta = A + C - \alpha$$

$$A = \mu_x^2\Pi_b^2 + \mu_y^2\Pi_d^2, \quad B = -(\mu_x^2\Pi_a\Pi_b + \mu_y^2\Pi_c\Pi_d), \quad C = \mu_x^2\Pi_a^2 + \mu_y^2\Pi_c^2$$

Здесь E — эллиптический интеграл второго рода, а вектор $\Pi(\sigma)$ определяется из конечных выражений — условий трансверсальности на правом конце.

Поступила 10 I 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черноусько Ф. Л.* Некоторые задачи оптимального управления с малым параметром ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
2. *Акуленко Л. Д.* Исследование некоторых оптимальных систем методом усреднения. ПММ, 1974, т. 38, вып. 3.
3. *Акуленко Л. Д.* Асимптотическое решение некоторых задач типа оптимального быстродействия. ПММ, 1975, т. 39, вып. 4.
4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
5. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М., Изд-во Моск. ун-та, 1971.
6. *Евтушенко Ю. Г.* Приближенный расчет задач оптимального управления. ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.
7. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1969.
8. *Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В.* Механика космического полета с малой тягой. М., «Наука», 1966.
9. *Самойленко А. М.* Обоснование принципа усреднения для дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. В сб.: Приближенные методы решения дифференциальных уравнений, вып. 1. Киев, Изд-во АН УССР, 1963.