Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 62—50

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Ю. И. Бердышев

(Свердловск)

На основании принципа максимума Л. С. Понтрягина с использованием свойств рассматриваемой системы устанавливается структура оптимального управления и оптимальных траекторий. Предлагается правило построения программного управления, удовлетворяющего принципу максимума. В случае, когда конечное состояние лежит вне некоторой ограниченной области, доказывается, что указанное правило определяет оптимальное управление и позволяет решить задачу синтеза.

1. Постановка задачи. Пусть движение точки в плоскости xy описывается системой уравнений

$$x^{\cdot} = v\cos\varphi,\quad y^{\cdot} = v\sin\varphi,\quad \varphi^{\cdot} = \frac{K_1}{v}u_1,\quad v^{\cdot} = K_2u_2 \tag{1.1}$$

где $\varphi = \varphi(t)$ — угол между осью x и направлением вектора скорости $\mathbf{v}(t) = (x^{\cdot},\ y^{\cdot})$, K_1, K_2 — заданные положительные постоянные, а $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$ — управляющие измеримые функции, удовлетворяющие условиям

$$|u_1| \leqslant 1,\qquad |u_2| \leqslant 1 \tag{1.2}$$

В данной работе решается задача о быстрейшем попадании изображающей точки (x, y, φ, v) на многообразие $(x = 0,\ y = 0)$ из заданного начального состояния $(x_0,\ y_0,\ \varphi_0,\ v_0)$. Будем предполагать, что $v_{-10} \geqslant c$, где $c = \mathrm{const} > 0$. При этом условии и при $K_2K_1 \leqslant 0{,}1$ можно доказать существование такого положительного числа $a = a(c)$, что на траектории, претендующей на оптимальность, $v(t) > a$. Тогда справедлива теорема существования оптимального управления (см. [1], стр. 284).

Под траекторией системы (1.1), (1.2) целесообразно понимать проекцию фазовой траектории на плоскость xy и исследования проводить в плоскости xy. Многообразию $(x = 0,\ y = 0)$ соответствует на этой плоскости начало координат $O = (0,\ 0)$.

Функция Гамильтона H в данном случае имеет вид [1]

$$H = \psi_1 v\cos\varphi + \psi_2 v\sin\varphi + \psi_3\frac{1}{v}K_1u_1 + \psi_4K_2u_2 \tag{1.3}$$

где вспомогательные функции ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 удовлетворяют системе уравнений (1.4) и условиям трансверсальности (1.5)

$$\psi_1^{\cdot} = 0,\ \psi_2^{\cdot} = 0,\ \psi_3^{\cdot} = \psi_1 v\sin\varphi - \psi_2 v\cos\varphi \tag{1.4}$$

$$\psi_4^{\cdot} = -\psi_1\cos\varphi - \psi_2\sin\varphi + \psi_3 v^{-2}K_1u_1$$

$$\psi_3(T) = \psi_4(T) = 0 \tag{1.5}$$

(T — момент попадания в начало координат). Используя два первых уравнения системы (1.1), имеем

$$\psi_1 = c_1, \quad \psi_2 = c_2, \quad \psi_3^{\cdot} = c_1 y^{\cdot} - c_2 x^{\cdot} \tag{1.6}$$

Отсюда, учитывая граничные условия (1.5), $x(T) = y(T) = 0$, получим, что $\psi_3 = c_1 y - c_2 x$. В плоскости xy

$$c_1 y - c_2 x = 0 \tag{1.7}$$

является уравнением прямой, которую будем называть прямой переключения. В дальнейшем коэффициенты этой прямой будем считать нормированными: $c_1 = \cos\theta$, $c_2 = \sin\theta$ (θ — угол между осью x и вектором (c_1, c_2)). Из (1.4), (1.3) следует, что уравнение для $\psi_4(t)$ можно привести к виду

$$\psi_4^{\cdot} = -v^{-1} K_2 \psi_4 \cdot u_2 + v^{-1} [H - 2v \cos(\varphi - \theta)] \tag{1.8}$$

В соответствии с принципом максимума оптимальное управление удовлетворяет соотношениям

$$u_1 = \operatorname{sign} \psi_3, \quad \psi_3 \neq 0, \quad u_2 = \operatorname{sign} \psi_4, \quad \psi_4 \neq 0 \tag{1.9}$$

Отметим, что некоторые вопросы, связанные с оптимальностью движения системы (1.1), были затронуты в работе [2]. При $v = \mathrm{const}$ рассматриваемая задача решена в [3] и в несколько иной постановке — в работе [4].

2. Некоторые свойства системы (1.1), (1.4). 1°. Пусть $\psi_3(t) = 0$, $t \in [t_a, t_b]$, $t_a < t_b$, т. е. движение происходит вдоль прямой (1.7). Тогда из (1.1) следует, что $u_1(t) = 0$, $t \in [t_a, t_b]$.

2°. Если в точке $(x(t_a), y(t_a))$ вектор скорости $\mathbf{v}(t_a)$ направлен в начало координат, то оптимальной траекторией при $t \geqslant t_a$ будет прямая, соединяющая эту точку с началом координат, а оптимальным управлением — ($u_1^\circ = 0$, $u_2^\circ = 1$).

3°. На интервалах постоянства управляющих функций u_1, u_2 и функции Гамильтона H имеют место равенства

$$Hv - 2K_2 u_2 (c_1 x + c_2 y) - vK_2 \psi_4 u_2 = \mathrm{const} \tag{2.1}$$

$$K_1 u_1 \psi_3 - 2K_2 u_2 (c_1 x + c_2 y) + v^2 \cos(\varphi - \theta) = \mathrm{const} \tag{2.2}$$

Пусть в некоторый момент t_2 функция $\psi_4(t_2) = \psi_4(T) = 0$, $\psi_4(t) > 0$, $t \in (t_2, T)$, а в момент t_3 функция $\psi_4(t_3) = 0$, $\psi_4(t) < 0$, $t \in (t_3, t_2)$, тогда из (2.1), (1.5) вытекают соотношения

$$v(t) K_2 \psi_4(t) = H(v(t) - v(T)) - 2K_2 (c_1 x(t) + c_2 y(t)), \quad t \in (t_2, T] \tag{2.3}$$

$$c_1 x(t_2) + c_2 y(t_2) < 0 \tag{2.4}$$

$$v(t) K_2 |\psi_4(t)| = H(v(t) - v(t_2 - 0)) + 2K_2 (c_1 x + c_2 y)\big|^{t}_{t_2 - 0}, \quad t \in (t_3, t_2) \tag{2.5}$$

4°. Пусть на отрезке $[t_\alpha, t_\beta]$, управляющие функции u_1, u_2 постоянны и принимают значения, равные ± 1. Тогда

$$
\begin{aligned}
&(2.6) \qquad y - y(t_\alpha) = b\,[v^2 K_2^{-1} u_2 \quad (2\sin\varphi - K^{-1}u_1u_2 \quad \cos\varphi)]\,|_{t_\alpha}{}^{t} \\
&\qquad\qquad x - x(t_\alpha) = b\,[v^2 K_2^{-1} u_2 \quad (2\cos\varphi + K^{-1}u_1u_2 \quad \sin\varphi)]\,|_{t_\alpha}{}^{t} \\
&\qquad\qquad v(t) = v(t_\alpha)\exp\,(Ku_1u_2\,(\varphi(t) - \varphi(t_\alpha))) \\
&\qquad\qquad v(t) = v(t_\alpha) + K_2u_2\,(t - t_\alpha), \qquad t \in [t_\alpha,\ t_\beta] \\
&\qquad\qquad K = K_2K_1^{-1}, \qquad b = (4 + K^{-1})^{-1}
\end{aligned}
$$

Отсюда видно, что соответствующие траектории будут логарифмическими спиралями.

5°. Рассмотрим плоскость $v\varphi$, каждой точке которой соответствует радиус-вектор длины v, повернутый на угол φ относительно некоторой фиксированной оси z. На плоскости $v\varphi$ соотношения

$$
(2.7) \qquad v\cos(\varphi - \theta) = H, \qquad 2v\cos(\varphi - \theta) = H
$$

являются уравнениями прямых, ортогональных к прямой $\varphi = \theta$. Из (1.3), (1.5) следует, что точка $(v(T),\ \varphi(T))$ находится на первой прямой (2.7). Вторая прямая делит плоскость $v\varphi$ на две полуплоскости Π_1, Π_2. Пусть в полуплоскости Π_1 величина $H - 2v\cos(\varphi - \theta)$ отрицательна, а в Π_2 — положительна.

Лемма 2.1. При движении изображающей точки в полуплоскости Π_1 функция $\psi_4(t)$ убывает, а в Π_2 может менять знак лишь с минуса на плюс.

Справедливость леммы следует непосредственно из (1.8).

3. Необходимые условия оптимальности траектории. Структура оптимального управления. Знак выражения $\sigma_0 = x_0\sin\varphi_0 - y_0\cos\varphi_0$ определяет взаимное расположение начала координат и прямой

$$
(3.1) \qquad (x - x_0)\sin\varphi_0 = (y - y_0)\cos\varphi_0
$$

Из неравенства $\sigma_0 > 0$ $(\sigma_0 < 0)$ следует, что начало координат находится слева (справа), если смотреть из точки $M_0 = (x_0,\ y_0)$ по направлению вектора v_0.

Пусть $(u_1^\circ(t),\ u_2^\circ(t))$ — оптимальное управление, $M_1 = (x(t_1),\ y(t_1))$ — первая точка встречи траектории с прямой переключения. С использованием свойства 2° и условия трансверсальности (1.5) доказывается

Лемма 3.1. Пусть $\sigma_0 \neq 0$, $u_1^\circ(t) = \operatorname{sign}\sigma_0$, $t \in [0,\ t_1)$, тогда а) на дуге M_0M_1 (исключая M_1) нет точки, вектор скорости в которой направлен в начало координат, б) в точке M_1 вектор скорости направлен в начало координат и $u_1^\circ(t) = 0$, $t \in [t_1,\ T]$.

Лемма 3.2. В условиях леммы 3.1 оптимальная управляющая функция $u_2^\circ(t)$ имеет не более одного переключения и последовательность значений $u_2^\circ(t)$ может быть лишь одной из следующих: (-1), (1), $(-1,\ 1)$.

Доказательство, которое здесь опускается, опирается на лемму 2.1 и соотношения (2.4), (2.5).

Используя леммы 3.1, 3.2, можно показать справедливость следующих теорем.

Теорема 3.1. На оптимальной траектории нет точки, отличной от начальной, вектор скорости в которой направлен от начала координат. Оптимальная управляющая функция $u_1^\circ(t)$ имеет не более двух переключений и последовательность значений $u_1^\circ(t)$ может быть лишь одной из следующих; при $\sigma_0 \neq 0$ $(\operatorname{sign}\sigma_0)$, $(\operatorname{sign}\sigma_0,\ 0)$, $(-\operatorname{sign}\sigma_0,\ \operatorname{sign}\sigma_0)$, $(-\operatorname{sign}\sigma_0,$ $\operatorname{sign}\sigma_0,\ 0)$ при $\sigma_0 = 0$ (0), (± 1), $(\pm 1{,}0)$.

Теорема 3.2. Оптимальная управляющая функция $u_2^\circ(t)$ имеет не более одного переключения, а последовательность значений $u_2^\circ(t)$ может быть лишь одной из следующих: (-1), $(+1)$, $(-1,\ +1)$.

4. Некоторые свойства функции $\psi_4(t)$. Пусть управление $u_1(t) = u_2(t) = 1$, $t \in [t_\alpha,\ T]$ удовлетворяет принципу максимума. Тогда, подставив (1.9), (2.6) в (2.1), имеем

$$
\begin{aligned}
(4.1)\qquad & K_2\psi_4(t) - K_2\psi_4(T)\,E = v(t)\,\Phi(\varphi^*(t), \alpha), \quad t \in [t_\alpha,\ T] \\
& \Phi(\varphi^*(t), \alpha) = E(1 - E)\cos\alpha + 2b\{(2\cos\alpha - K^{-1}\sin\alpha)E - \\
& -(2\cos(\varphi^*(t) + \alpha) - K^{-1}\sin(\varphi^*(t) + \alpha)\} \\
& \varphi^*(t) = \varphi(T) - \varphi(t), \quad E = \exp(K\varphi^*(t)), \quad \alpha = \theta - \varphi(T)
\end{aligned}
$$

Если $t_\alpha = t_2$, $\psi_4(T) = 0$ (t_2 — момент переключения по u_2), то

$$
(4.2)\qquad \Phi(\varphi^*(t_2), \alpha) = 0
$$

Определение. Пусть $\sigma_0 > 0$. Будем говорить, что управление $(u_1(t);$ $u_2(t))$, $t \in [0,\ T]$ принадлежит классу X, если а) это управление удовлетворяет принципу максимума и условию трансверсальности, б) на траектории, соответствующей этому управлению, нет точки, отличной от начальной, вектор скорости в которой направлен от точки $(x(T),\ y(T))$, в) управляющие функции u_1, u_2 в процессе движения принимают одну из следующих последовательностей значений:

$$
u_1 : (0),\ (1),\ (1{,}0),\ (-1,\ 1,\ 0); \quad u_2 : (-1),\ (1),\ (-1,\ 1)
$$

Оказывается, что если управление $(u_1,\ u_2)$ принадлежит классу X и $u_1(t) = -1$, $t \in [0,\ t_1)$, то

$$
(4.3)\qquad u_2(t) = -1, \quad t \in [0,\ t_1]
$$

Используя лемму 2.1, плоскость $v\varphi$ и вид производных $\psi_4^{\cdot}(t)$, $\psi_4^{\cdot\cdot}(t)$, можно доказать, что справедлива

Лемма 4.1. Пусть управление

$$
u_1(t) = \begin{cases} +1, & t \in [t_2,\ \tau), \\ 0, & t \in [\tau,\ T], \end{cases} \quad u_2(t) = 1, \quad t \in [t_2,\ T]
$$

принадлежит классу X, $\psi_4(t_2) = 0$, тогда на отрезке $[t_2,\ T]$ функция $\psi_4(t)$ вначале строго возрастает, а затем строго убывает.

5. Построение управления из класса X. Пользуясь соображениями симметрии, задачу достаточно решить для случая $\sigma_0 \geqslant 0$. Траекторию с управлением ($u_1 = \pm 1$, $u_2 = 1$) будем называть траекторией разгона, а с управлением ($u_1 = \pm 1$, $u_2 = -1$) траекторией торможения. Будем считать управления, принадлежащие классу X, непрерывными справа.

Покажем, что существует такой момент $\tau^* > 0$, что для любого $\tau \leqslant \tau^*$ управление

(5.1) $$u_1(t) = u_2(t) = 1, \quad t \in [0, \tau]$$

приводящее изображающую точку в положение $(x(\tau), y(\tau))$, удовлетворяет принципу максимума. Для этого прямую

(5.2) $$(y - y(\tau))c_1 - (x - x(\tau))c_2 = 0, \quad c_1 = \cos\varphi(\tau)$$
$$c_2 = \sin\varphi(\tau)$$

примем за прямую переключения. Обозначим через $\psi_{41}(\tau, t)$ функцию $\psi_4(t)$, вычисленную при прямой переключения (5.2) и условии $\psi_{41}(\tau, \tau) = 0$. При малых τ из (4.1) имеем $\psi_{41}(\tau, t) > 0$, $t \in [0, \tau)$. Отсюда следует, что при малых τ и функции $\psi_4(t) = \psi_{41}(\tau, t)$ управление (5.1) удовлетворяет принципу максимума. Будем увеличивать момент τ и определять значение $\psi_4(\tau, 0)$. Пусть $\tau = \tau^*$ — наименьший момент, для которого $\psi_{41}(\tau^*, 0) = 0$. При любых $\tau \leqslant \tau^*$, прямой переключения (5.2), соотношения (1.9), (1.5) будут иметь место, а следовательно, управление (5.1) будет удовлетворять принципу максимума.

Покажем, что управление (5.1) при $\tau > \tau^*$ и прямой (5.2) не удовлетворяет принципу максимума. Предположим противное. Тогда существует такой момент $\tau_1 > 0$, что $\varphi(\tau) - \varphi(\tau_1) = \varphi(\tau^*) - \varphi_0$. Ввиду леммы 4.1 и равенства (4.2) будем иметь $\psi_{41}(\tau, t) > 0$, $t \in (\tau_1, \tau)$, $\psi_{41}(\tau, \tau_1 - 0) < 0$. Следовательно, при $\tau > \tau^*$ соотношения (1.9), (1.5) не могут выполняться одновременно, что и требовалось показать.

Сделаем следующее построение. Будем двигаться некоторое время $\tau > \tau^*$ по траектории разгона, а затем некоторое время $T_1 - \tau$ по прямой (5.2). Из (1.4) имеем $\psi_4(T_1) = \psi_4(\tau) - T_1 + \tau$. Выбором достаточно большого отрезка $[\tau, T_1]$ можно добиться выполнения неравенства $\psi_4(t) > 0$, $t \in [0, T_1)$ при условии $\psi_4(T_1) = 0$. Из леммы 4.1 вытекает, что в рассматриваемом случае найдется $T_{1*}(\tau) = T_1$ — наименьший момент времени, при котором $\psi_4(0) = \psi_4(T_{1*}) = 0$, $\psi_4(t) > 0$, $t \in (0, T_{1*})$. Отметим точку $M_\tau = (x(T_{1*}(\tau)), y(T_{1*}(\tau)))$. При $\tau \leqslant \tau^*$ положим $T_{1*}(\tau) = \tau$. Изменяя τ от нуля до τ_0 (τ_0 — момент пересечения траектории разгона с прямой (3.1)), получим множество точек $\{M_\tau\}$, которое на рассматриваемой полуплоскости представляет собой некоторую кривую γ_{10}.

Очевидно, кривую γ_{10} можно определить и так. Обозначим через $\psi_4(\tau, t)$ функцию $\psi_4(t)$, вычисленную при прямой переключения (5.2) и начальном условии $\psi_4(\tau, 0) = 0$. Вычислим значение $\psi_4(\tau, \tau)$. Пусть $\psi_4(\tau, \tau) > 0$. Тогда, двигаясь по прямой переключения с управлением ($u_1 = 0$, $u_2 = 1$), определим момент $T_{1*}(\tau)$, в который $\psi_4(\tau, T_{1*}(\tau)) = 0$. Отметим точку $(x(T_{1*}(\tau)), y(T_{1*}(\tau)))$. Если $\psi_4(\tau, \tau) \leqslant 0$, то положим $T_{1*}(\tau) = \tau$. Множество точек $\{(x(T_{1*}(\tau)), y(T_{1*}(\tau)))\}$ на рассматриваемой полуплоскости представляет собой кривую γ_{10}, которая может быть записана в параметрической форме

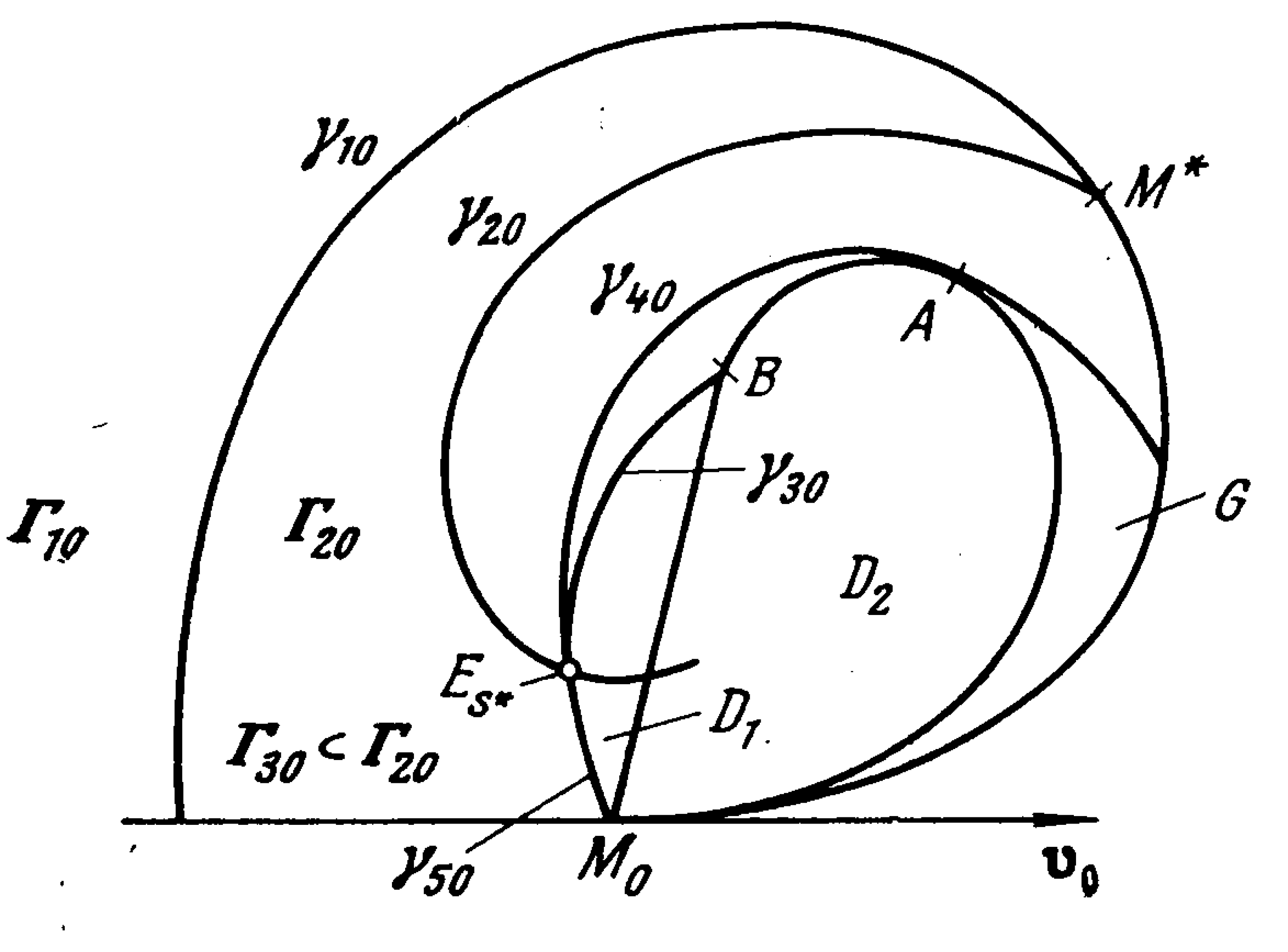
(5.3)
$$y = y(\tau) + d(\tau)\sin\varphi(\tau), \quad x = x(\tau) + d(\tau)\cos\varphi(\tau)$$
$$d(\tau) = 2^{-1}K_2(T_{1*}(\tau) - \tau)^2 + v(\tau)(T_{1*}(\tau) - \tau)$$
$$T_{1*}(\tau) - \tau = \begin{cases} K_2^{-1}(H(\tau) - v(\tau)), & H(\tau) > v(\tau) \\ 0, & H(\tau) \leqslant v(\tau) \end{cases}$$
$$H(\tau) = v_0\cos(\varphi - \varphi(\tau)) + K_1 v_0^{-1} \mid (y_0 - y(\tau))\cos\varphi(\tau) - (x_0 - x(\tau))\sin\varphi(\tau) \mid$$

Кривая γ_{10} до точки $M^* = (x(\tau^*), y(\tau^*))$ совпадает с траекторией разгона, а затем расходится с ней. При этом, используя лемму 4.1, (4.1), можно доказать, что, если $\tau_2 > \tau_1 > \tau^*$, то $d(\tau_2) > d(\tau_1)$. Кривая γ_{10} делит полуплоскость на две части Γ_{10} ($\gamma_{10} \subset \Gamma_{10}$), Γ_{20} (фиг. 1).

Лемма 5.1. Если начало координат находится в области Γ_{10}, то управление

(5.4)
$$u_1(t) = \begin{cases} +1, & t \in [0, \tau), \\ 0, & t \in [\tau, T], \end{cases} \quad u_2(t) = 1, \quad t \in [0, T]$$

(где τ — первый момент времени, в который вектор скорости направлен в начало координат) принадлежит классу X.



Фиг. 1

Доказательство. Поскольку на отрезке $[0, \tau]$ траектория является дугой раскручивающейся спирали, то траектория лежит по одну сторону от прямой (5.2), т. е. выполняется первое соотношение в (1.9), и на траектории нет точки, отличной от начальной, вектор скорости в которой направлен от начала координат. Для выполнения второго соотношения в (1.9) и условия трансверсальности (1.5) достаточно выбрать при $\tau \leqslant \tau^*$ функцию $\psi_4(t) = \psi_{41}(\tau, t) - \psi_{41}(\tau, T)$, а при $\tau > \tau^*$ — функцию $\psi_4(t) = \psi_4(\tau, t) - \psi_4(\tau, T)$.

Оказывается, что при любом $\tau > \tau^*$ управление (5.1) не удовлетворяет принципу максимума. Отсюда и из построения кривой γ_{10} вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 5.2. Если управление (u_1, u_2) принадлежит классу X, точка $(x(T), y(T))$ находится в области Γ_{20} и $u_1(0) = 1$, то $u_2(0) = -1$.

Из точки M_0 с направлением v_0 выпустим траекторию с управлением $u_1(t) = 1$, $u_2(t) = -1$, $t \in [0, s]$. На этой траектории через A обозначим первую точку, в которой нормаль к траектории проходит через M_0, а через B — первую точку, в которой касательная к траектории проходит через M_0. Пусть точке A соответствует момент $t = s_+$, а точке B — момент $t = s_-$. Для точки $M_s = (x(s), y(s))$ и вектора $\mathrm{v}(s)$, как для начальных, построим кривую γ_{1s}, аналогичную кривой γ_{10} и совпадающую с ней при $s = 0$. Изменяя $0 \leqslant s \leqslant s_-$, получим множество кривых γ_{1s}. На каждой из этих кривых выделим точку $(x(\tau_s^*), y(\tau_s^*))$, в которой кривая γ_{1s} расходится с траекторией разгона, выпущенной из точки M_s. Эти точки образуют кривую γ_{20} (фиг. 1). Из (4.2) имеем

$$\varphi(\tau_s^*) - \varphi(s) = \text{const} \tag{5.5}$$

Проведем кривую γ_{30}, являющуюся совокупностью первых точек E_s на кривых γ_{1s}, в которых вектор скорости направлен в M_0. Нетрудно видеть, что точки E_s могут существовать лишь для $s \in [s_+, s_-]$, при этом точка E_{s-} совпадает с B, и кривая γ_{30} проходит через M_0. Ввиду тождества (5.5) кривые γ_{20}, γ_{30} могут пересекаться в единственной точке, которую будем обозначать через E_{s^*}. Кривая, состоящая из дуг $M^*E_{s^*} \subset \gamma_{20}$, $E_{s^*}M_0 \subset \subset \gamma_{30}$ вырезает из Γ_{20} область Γ_{30} (фиг. 1). Если точки E_{s^*} не существует, то область Γ_{30} отделяется от Γ_{20} кривой γ_{20}.

В силу построения области Γ_{30} справедлива

Лемма 5.3. Если начало координат находится в области Γ_{30}, то управление

$$u_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau), \\ 0, & t \in [\tau, T], \end{cases} \quad u_2(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, s] \\ +1, & t \in [s, T] \end{cases} \tag{5.6}$$

(где τ — первый момент времени, в который вектор скорости направлен в начало координат, s $(s < \tau)$ — первый момент времени, при котором кривая γ_{1s} проходит через начало координат) принадлежит классу X.

Обозначим через D_1 область, ограниченную дугами кривых γ_{20}, γ_{30} и отрезком BM_0 (фиг. 1), через D_2 — открытую область, ограниченную дугой торможения M_0B и отрезком BM_0, а $\Gamma_{40} = \Gamma_{20} \setminus (\Gamma_{30} \cup D_1 \cup D_2)$. Выберем какую-нибудь траекторию $L_{s\tau}$, состоящую из дуги торможения $M_0M_s : \{(x(t), y(t)), t \in [0, s]\}$ и дуги разгона $M_sO : \{(x, t), y(t)), t \in \in [s, \tau], \tau < \tau_s^*\}$. Очевидно, в любую точку области Γ_{40} можно попасть с помощью траектории $L_{s\tau}$. Можно показать, что для любых $s, \tau \in [s, \tau_s^*)$, при которых $(x(\tau), y(\tau)) \in \Gamma_{40}$, выбором угла α можно добиться того, чтобы функция $\psi_4(t)$, вычисленная при $c_1 = \cos(\varphi(\tau) + \alpha)$, $c_2 = = \sin(\varphi(\tau) + \alpha)$, $\psi_4(\tau) = 0$, удовлетворяла условиям: $\psi_4(s) = 0$, $\psi_4(t) > > 0$, $t \in (s, \tau)$; $\psi_4(t) < 0$, $t \in [0, s)$. Угол α определяется из уравнения (4.2) при $\varphi^* = \varphi(\tau) - \varphi(s)$ однозначно. Если траектория $L_{s\tau}$ лежит по одну сторону от прямой переключения, определяемой углом $\theta = \varphi(\tau) + + \alpha$, то точку $(x(\tau), y(\tau))$ отнесем к множеству S_2. В противном случае точку $(x(\tau), y(\tau))$ отнесем к множеству S_1. Поскольку $\tau < \tau_s^*$, то в начало координат $0 \in S_1$ невозможно попасть с управлением из класса X, которое удовлетворяло бы условию $u_1(0) = 1$. При $0 \in D_1 \cup D_2$ управление (5.6) также не удовлетворяет принципу максимума, поскольку траектория не может лежать по одну сторону от прямой переключения. Обозначим через Γ_{50} множество $S_1 \cup D_1 \cup D_2$. Можно показать, что Γ_{50} — односвязная открытая область. Частью границы области Γ_{50} является дуга торможения M_0A и дуга $M_0E_{s^*} = \gamma_{50} \subset \gamma_{30}$. Оставшаяся часть границы (обозначим ее через γ_{40}) совместно с дугой γ_{50} обладает тем свойством, что при $0 \in \gamma_{50} \cup \gamma_{40}$ прямая переключения, определяемая углом $\varphi(\tau) + \alpha$, проходит через M_0.

Пусть $\Gamma_{60} = \Gamma_{20} \setminus \Gamma_{50}$. В силу построения областей Γ_{60}, Γ_{50} и условия (4.3) справедливы следующие утверждения.

Лемма 5.4. Если начало координат находится в области Γ_{60}, то управление (5.6) принадлежит классу X.

Лемма 5.5. Если начало координат принадлежит области Γ_{50}, то оптимальное управление удовлетворяет условиям $u_1^\circ(0) = -1$, $u_2^\circ(0) = -1$.

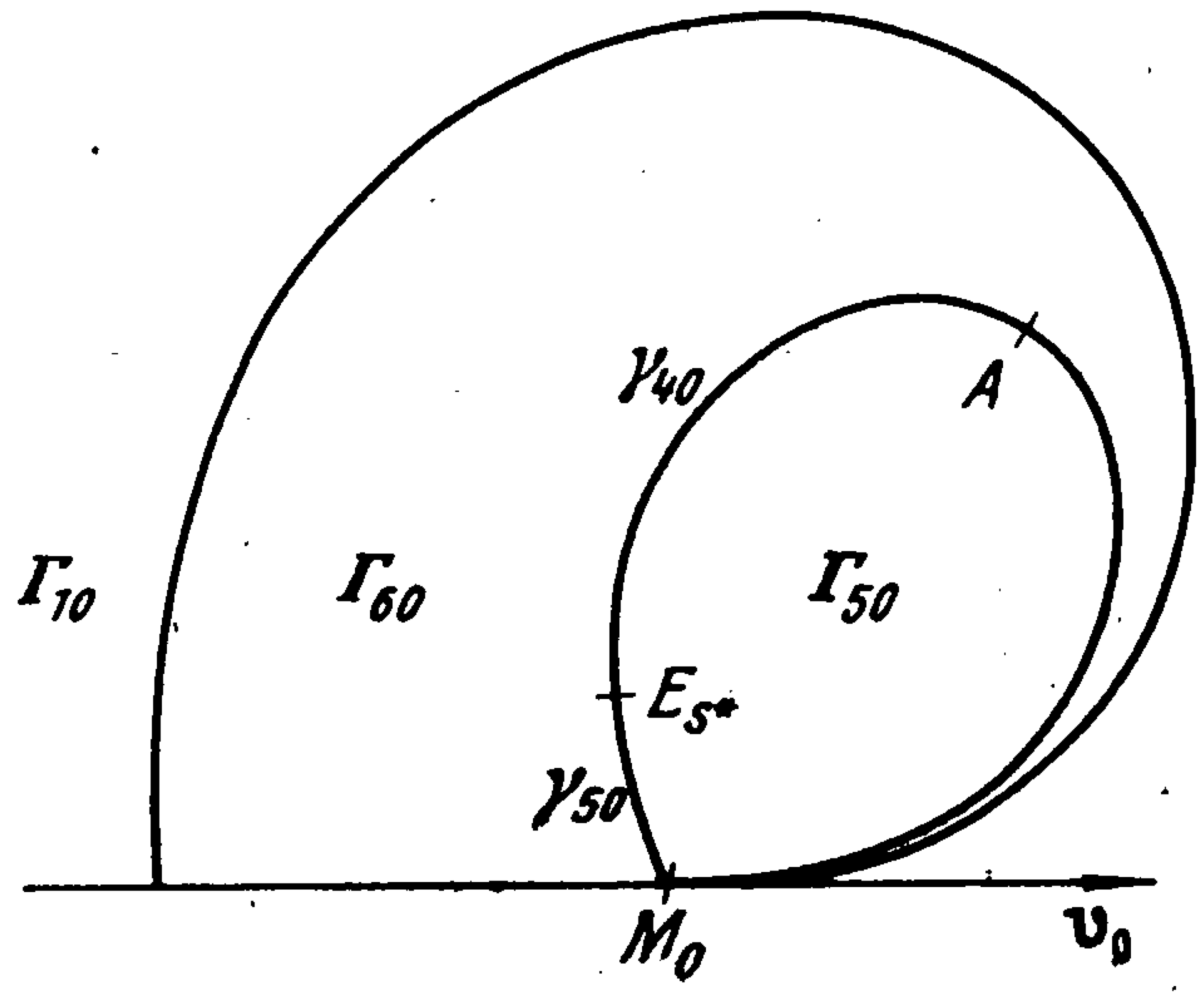
Из леммы 5.5 вытекает, что при $O \in \Gamma_{50}$

$$u_1^\circ(t) = u_2^\circ(t) = -1, \quad t \in [0, t_1) \tag{5.7}$$

где t_1 — первый момент времени, в который кривая $(\gamma_{5t_1} \cup \gamma_{4t_1})$ — граница области Γ_{5t_1}, построенной для точки $(x(t_1), y(t_1))$, как для начальной, проходит через начало координат. Область Γ_{5t_1} строится аналогично области Γ_{50}. Поскольку $u_2(t_1) = -1$ (см. (4.3)), то $O \in \Gamma_{6t_1}$. Ввиду леммы 5.4 управление

$$u_1(t) = \begin{cases} -1, & t \in [t_1, \tau) \\ 0, & t \in [\tau, T] \end{cases} \tag{5.8}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} -1, & t \in [t_1, s) \\ +1, & t \in [s, T] \end{cases}$$



Фиг. 2

(где s — первый момент времени, в который кривая γ_{1s}, построенная для точки $(x(s), y(s))$, как для начальной, проходит через начало координат) принадлежит классу X. Поскольку $O \in \gamma_{5t_1} \cup \gamma_{4t_1}$, то прямая переключения проходит через точку $(x(t_1), y(t_1))$. Отсюда следует, что на всем отрезке $[0, T]$ будет выполнено первое соотношение в (1.9). Второе соотношение в (1.9) будет выполнено в силу равенства (4.3). Таким образом, при $O \in \Gamma_{50}$ управление (5.7), (5.8) принадлежит классу X.

6. *Правило 6.1.* В начальный момент времени проведем прямую (3.1), и ту полуплоскость, где находится начало координат, разобъем на области Γ_{10}, Γ_{50}, Γ_{60}. Будем выбирать управление: (5.4), если $O \in \Gamma_{10}$; (5.6), если $O \in \Gamma_{60}$; (5.7), (5.8), если $O \in \Gamma_{50}$ (фиг. 2).

Из предыдущего пункта следует, что управление, построенное по этому правилу, принадлежит классу X.

Сделаем следующее построение. Будем двигаться с управлением $u_1(t) = u_2(t) = -1$, $t \in [0, s_3]$, где s_3 определяется из уравнения $\varphi(s_3) = \varphi_0 - \pi$, и для каждой точки $(x(t), y(t))$, как для начальной, строить области Γ_{5t}, $t \in [0, s_3]$. Эти области на плоскости $\sigma_0 \geqslant 0$ покроют некоторую область G_1. Пусть $G = \Gamma_{20} \cap G_1$.

Теорема 6.1. Правило 6.1 при $O \in G$ определяет оптимальное управление.

Доказательство. Будем через (u_{1*}, u_{2*}) обозначать управление, определяемое правилом 6.1. Далее для обозначения всех величин, относящихся к управлению (u_{1*}, u_{2*}), будем использовать звездочку, а оптимальному управлению (u_1°, u_2°) — градус. Пусть $O \in \Gamma_{10}$, $u_1^\circ(0) = 1$. Тогда, согласно теореме 3.1, функция $u_1^\circ(t)$ имеет вид (5.4). Предположим, что $u_2^\circ(0) = -1$. Поскольку $O \in \Gamma_{10}$, то в некоторый момент t_2 необходимо переключение по u_2. Из (2.3), (2.5) имеем равенства

$$v_0 K_2 \mid \psi_4^\circ(0) \mid = H^\circ(v_0 - 2v(t_2) + v(T^\circ)) + 2K_2(c_1^\circ x_0 + c_2^\circ y_0) \tag{6.1}$$

$$v_0 K_2 \mid \psi_{4*}(0) \mid = H_*(v_0 - v(T_*)) - 2K_2(c_{1*}x_0 + c_{2*}y_0)$$

Можно показать, что

$$c_1^\circ x_0 + c_2 y_0 < c_{1*}x_0 + c_{2*}y_0 < 0, \quad H_* = v(T_*) > H^\circ = v(T^\circ) \tag{6.2}$$

Кроме того, из (1.1) имеем $v(T_*) - v_0 = K_2 T_*$, $v(T^\circ) - 2v(t_2) + v_0 = K_2 T^\circ$. Теперь, используя неравенства (6.2), из (6.1) получим $T^\circ > T_*$, что невозможно. Итак, если $O \in \Gamma_{10}$, $u_1^\circ(0) = 1$, то управление (5.4) оптимально.

Пусть $O \in \Gamma_{60}$, $u_1^\circ(0) = 1$. Из теорем 3.1, 3.2, леммы 5.2 вытекает, что $u_2^\circ(t) = -1$ до тех пор, пока кривая γ_{1s} не пройдет через начало координат. При дальнейшем движении, как было показано выше, $u_2^\circ(t) = 1$. Таким образом, если $O \in \Gamma_{60}$, $u_1^\circ(0) = 1$, то управление (5.6) оптимально.

Покажем, что если $O \in \Gamma_{10} \cup \Gamma_{60}$, то $u_1^\circ(0) = 1$. Предположим противное, т. е. $u_2^\circ(0) = -1$. Из теоремы 3.1, равенства (4.3) вытекает, что существует t° — момент переключения по u_1°, $u_2^\circ(t) = -1$, $t \in [0, t^\circ]$, при этом $O \in (\gamma_{4t^\circ} \cup \gamma_{5t^\circ}) \subset G_1$. Следовательно, $O \in \Gamma_{6t^\circ}$ и управление (5.8) при $t_1 = t^\circ$ оптимально. Нетрудно показать, что при $O \in \Gamma_{10} \cap G_1$ траектория L° не может быть оптимальной. Поэтому $O \in G$, что противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

Можно показать, что если $O \in \Gamma_{50}$, то в процессе движения начало координат вначале попадает в область Γ_{6t}, а затем в Γ_{1t}. При этом из области Γ_{6t} начало координат не может попасть в Γ_{5t}, а из Γ_{1t} в Γ_{6t}.

Правило 6.1 позволяет выбирать управление в начальный момент времени. Если текущее время t принять за начальное, то получим закон управления с обратной связью:

$$u_1(t) = \operatorname{sign}\sigma_t, \quad u_2(t) = 1, \quad O \in \Gamma_{1t}, \quad \sigma_t \neq 0$$

$$u_1(t) = \operatorname{sign}\sigma_t, \quad u_2(t) = -1, \quad O \in \Gamma_{6t}, \ \sigma_t \neq 0$$

$$u_1(t) = -\operatorname{sign}\sigma_t, \quad u_2(t) = -1, \quad O \in \Gamma_{5t}, \ \sigma_t \neq 0$$

$$u_1(t) = 0, \quad u_2(t) = 1, \quad \sigma_t = 0, \quad \sigma_{1t} < 0$$

$$u_1(t) = \pm 1, \quad u_2 = \begin{cases} +1, & 0 \in \Gamma_{1t}, \\ -1, & 0 \in \Gamma_{6t}, \end{cases} \sigma_t = 0, \ \sigma_{1t} > 0$$

$$\sigma_t = x(t) \sin \varphi(t) - y(t) \cos \varphi(t), \quad \sigma_{1t} = x(t) \cos \varphi(t) + + y(t) \sin \varphi(t)$$

Таким образом, синтезировано управление из класса X. Согласно теореме 6.1 это управление при $O \overline{\in} G$ является оптимальным.

Поступила 13 I 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М., «Наука», 1972.
2. *Хамза М. Х., Колас И., Рунгальдер В.* Оптимальные по быстродействию траектории полета в задаче преследования. В сб.: Управление космическими аппаратами и кораблями. М., «Наука», 1971.
3. *Бердышев Ю. И.* Синтез оптимального управления для одной системы 3-го порядка. В сб.: Вопросы анализа нелинейных систем автоматического управления. Свердловск, 1973 (Уральский научный центр АН СССР).
4. *Pecsvaradi T.* Optimal horizontal guidance law for aircraft in the terminal area. IEEE Trans. Automatic Control, 1972, vol. AC-17, No. 6.