Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ПРИ ВНУТРЕННЕМ РЕЗОНАНСЕ

Я. М. Гольцер, А. Л. Куницын

(Алма-Ата, Москва)

При исследовании устойчивости тривиального решения автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в критическом случае n пар чисто мнимых корней существенную роль может играть наличие целочисленных линейных зависимостей между частотами системы или, иначе, внутренний резонанс. Различные частные случаи этой задачи рассматривались в [1–6].

Цель данной работы — получение специальной (нормальной) формы системы дифференциальных уравнений при наличии в ней внутреннего резонанса в наиболее общем случае; выяснение, при каких условиях наличие внутреннего резонанса не позволяет применять для исследования устойчивости методы, разработанные для безрезонансных систем; решение задачи устойчивости в одном наиболее важном случае внутреннего резонанса нечетного порядка, обобщающем предшествующие исследования. При решении последней задачи даются необходимые и достаточные условия устойчивости модельной (упрощенной) системы. С помощью теоремы Н. Г. Четаева показывается, что из неустойчивости модельной системы, как правило, следует и неустойчивость исходной системы. Выделяются случаи негрубой неустойчивости, в которых модельная система не решает вопроса об устойчивости. Полученные результаты распространяются, в частности, на гамильтоновы системы.

1. Приведение к нормальной форме. Рассмотрим систему автономных дифференциальных уравнений

$$x_*^{\bullet} = Ax_* + X_*(x_*) \tag{1.1}$$

$$x_* = (x_1^*, \ldots, x_{2n}^*), \quad X_* = (X_1^*, \ldots, X_{2n}^*), \qquad X_*(0) = 0$$

где x_* и X_* — $2n$-мерные векторы евклидова пространства E_{2n}, $X_s^*(x_*)$ — голоморфные функции x_*, A — квадратная постоянная матрица с чисто мнимыми собственными значениями λ_s, $-\lambda_s$ ($\lambda_s^2 < 0$, $s = 1, 2, \ldots, n$), среди которых нет кратных.

Определение. Система (1.1) обладает внутренним резонансом k-го порядка, если между собственными значениями выполняется соотношение вида

$$\langle P\Lambda \rangle = 0, \qquad \Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \tag{1.2}$$

$$P = (p_1, \ldots, p_n), \quad |P| = p_1 + \ldots + p_n = k \geqslant 3, \; P \in E_n$$

Здесь Λ — вектор собственных значений матрицы A, а $p_s > 0$ — взаимно-простые целые числа.

Ограничимся рассмотрением случая, когда существует единственная пара резонансных векторов P и Λ, т. е. отсутствует сложный резонанс [1].

[1] Некоторые вопросы взаимодействия резонансов третьего порядка были рассмотрены в [7], где также приведены результаты исследования резонансов третьего порядка без учета взаимодействия, частным образом вытекающие из работ [2–4].

Построим нелинейное преобразование, приводящее исходную систему к нормальной форме [8] до членов сколь угодно высокого порядка. Для этого первоначально посредством невырожденного линейного преобразования представим систему (1.1) в виде

$$(1.3)\qquad x^{\boldsymbol{\cdot}} = \lambda x + \sum_{l=m\geqslant 2}^{\infty} X^{(l)}(x, y), \quad y^{\boldsymbol{\cdot}} = -\lambda y + \sum_{l=m\geqslant 2}^{\infty} Y^{(l)}(x, y)$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, \ldots, y_n), \quad \lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$$

Здесь x, y — комплексно-сопряженные векторы, λ — диагональная матрица, $X^{(l)}$, $Y^{(l)}$ — комплексно-сопряженные вектор-функции, компоненты которых $X_s^{(l)}$ и $Y_s^{(l)}$ ($s = 1, 2, \ldots, n$) представляются формами l-го порядка.

Преобразуем систему (1.3) посредством нелинейной замены

$$x = u + \sum_{l=m}^{2N+1} \Phi^{(l)}(u, v), \quad y = v + \sum_{l=m}^{2N+1} \Psi^{(l)}(u, v)$$

где N — сколь угодно большое число, а $\Phi^{(l)}$ и $\Psi^{(l)}$ — комплексно-сопряженные вектор-функции, компоненты которых $\Phi_s^{(l)}$, $\Psi_s^{(l)}$ — формы l-го порядка. Тогда, как известно [9,10], в новых переменных получим следующую систему уравнений:

$$(1.4)\qquad u^{\boldsymbol{\cdot}} = \lambda u + \sum_{l=m}^{2N+1} U^{(l)}(u, v) + U(u, v)$$

$$v^{\boldsymbol{\cdot}} = -\lambda v + \sum_{l=m}^{2N+1} V^{(l)}(u, v) + V(u, v)$$

в которой разложения комплексно-сопряженных вектор-функций U и V начинаются членами не ниже, чем $2(N+1)$-го порядка, а $U^{(l)}$ и $V^{(l)}$ представляют комплексно-сопряженные формы l-го порядка, так что

$$U_s^{(l)}(u, v) = \sum_{|k_s|+|l_s|=l} R_{k_s l_s} u_1^{k_{s1}} \ldots u_n^{k_{sn}} v_1^{l_{s1}} \ldots v_n^{l_{sn}}, \quad s = 1, 2, \ldots, n$$

При этом отличными от нуля могут быть лишь те коэффициенты R_{k_s, l_s}, для которых целочисленные векторы

$$k_s = (k_{s1}, \ldots, k_{sn}), \quad l_s = (l_{s1}, \ldots, l_{sn}), \quad k_{sj}, l_{sj} \geqslant 0$$

удовлетворяют одному из соотношений

$$(1.5)\qquad \langle (k_s - l_s)\, \Lambda \rangle = \lambda_s, \quad |k_s| + |l_s| = l, \quad s = 1, 2, \ldots, n$$

Такие векторы k_s и l_s и соответствующие им члены в системе (1.4) будем называть резонансными. Для решения задачи устойчивости важно выяснить структуру резонансных членов.

Как легко убедиться, при l нечетном соотношения (1.5) будут выполняться тождественно по λ_s, если

$$(1.6)\qquad k_{sj} = l_{sj} + \delta_{sj}, \quad s, j = 1, 2, \ldots, n$$

где δ_{sj} — символ Кронекера. Соответствующие этим резонансным векторам слагаемые в формах l-го порядка будем называть членами тождественного резонанса.

Но если Λ удовлетворяет условию внутреннего резонанса (1.2), то соотношения (1.5) будут еще удовлетворяться и при других значениях векторов k_s, l_s, отличных от (1.6). Соответствующие этим векторам слагаемые будем называть членами внутреннего резонанса. Очевидно, соотношения (1.5) сводятся к условию (1.2) в двух случаях

$$\begin{aligned} &1)\ l_{sj} = \varepsilon p_j + h_{sj} - \delta_{sj}, \quad k_{sj} = h_{sj} \\ &2)\ k_{sj} = \varepsilon p_j + h_{sj} + \delta_{sj}, \quad l_{sj} = h_{sj} \end{aligned} \tag{1.7}$$

где ε — любое натуральное число, а h_{sj} — всевозможные неотрицательные целые числа, такие, что (знак плюс берется в первом случае, а минус — во втором)

$$\varepsilon k + 2\sum_{j=1}^{n} h_{sj} = l \pm 1$$

Из (1.7) следует, что члены внутреннего резонанса k-го порядка могут появиться лишь в формах не ниже, чем k — 1-го порядка. Число ε принимает все натуральные значения $\varepsilon = 1, 2, \ldots, \varepsilon_*$, где ε_* — максимальное целое число, содержащееся в дроби $(l + 1) / k$ в первом случае и в $(l - 1) / k$ — во втором.

Таким образом, с точностью до членов $2N + 1$-го порядка первая группа комплексно-сопряженных уравнений примет вид

$$\begin{aligned} v_s u_s^{\cdot} = \lambda_s r_s + r_s \sum_{l \geqslant m}^{2N+1} \sum_{2|k_s| = l-1} C_{k_{sj}} \prod_{j=1}^{n} r_j^{k_{sj}} + \\ + \sum_{l=k-1}^{2N+1} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon_1} \prod_{j=1}^{n} v_j^{\varepsilon p_j} \sum_{2|h_s| = l+1-\varepsilon k} C_{h_{sj}}^{(\varepsilon)} \prod_{j=1}^{n} r_j^{h_{sj}} + \\ + r_s \sum_{l=k+1}^{2N+1} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon_2} \prod_{j=1}^{n} u_j^{\varepsilon p_j} \sum_{2|h_s| = l-1-\varepsilon k} C_{h_{sj}}^{(\varepsilon)} \prod_{j=1}^{n} r_j^{h_{sj}} + \ldots, \quad r_s = u_s v_s \end{aligned} \tag{1.8}$$

Здесь невыписанные члены имеют выше, чем $2(N + 1)$, порядок, а ε_1 и ε_2 — наибольшие целые числа, содержащиеся в дробях $(l + 1) / k$ и $(l - 1) / k$ соответственно. Первая группа нелинейных членов соответствует тождественному резонансу и представляет сумму нечетных форм начиная со степени m или $m + 1$ в случае четного m. Остальные слагаемые — члены внутреннего резонанса в первом и во втором случаях (1.7).

Из рассмотрения (1.8) следует, что члены внутреннего резонанса не влияют на устойчивость тривиального решения (при условии, что задача решается первыми нелинейными членами), если $k > m + 1$ при m нечетном и если $k > m + 2$ при m четном. В противном случае задача должна решаться с привлечением резонансных членов. Решение задачи при этом осложняется тем, что она не может быть сведена к критическому случаю n нулевых корней, как это можно сделать в безрезонансном случае, т. е. при наличии лишь членов тождественного резонанса [9–11].

Дальнейшие исследования удобнее проводить в полярных координатах r_s, θ_s

$$u_s = \sqrt{r_s}\, e^{i\theta_s}, \quad v_s = \sqrt{r_s}\, e^{-i\theta_s}, \quad s = 1, \ldots, n$$

Отделяя вещественные и мнимые части в (1.8), получим

$$\frac{1}{2} r_s^{\boldsymbol{\cdot}} = r_s \sum_{l \geqslant m}^{2N+1} \sum_{2|k_s|=l-1} a_{k_{sj}} \prod_{j=1}^{n} r_j^{k_{sj}} + \tag{1.9}$$

$$+ \sum_{l=k-1}^{2N+1} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon_1} \prod_{j=1}^{n} r_j^{1/2\varepsilon p_j} \sum_{2|h_s|=l+1-\varepsilon k} Q_{h_{sj}}(\varepsilon\theta) \prod_{j=1}^{n} r_j^{h_{sj}} +$$

$$+ r_s \sum_{l=k+1}^{2N+1} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon_2} \prod_{j=1}^{n} r_j^{1/2\varepsilon p_j} \sum_{2|h_s|=l-1-\varepsilon k} P_{h_{sj}}(\varepsilon\theta) \prod_{j=1}^{n} r_j^{h_{sj}} + \ldots$$

$$\theta^{\boldsymbol{\cdot}} = \sum_{s=1}^{n} p_s \Bigg[\sum_{l \geqslant m}^{2N+1} \sum_{2|k_s|=l-1} b_{k_{sj}} \prod_{j=1}^{n} r_j^{k_{sj}} +$$

$$+ \frac{1}{r_s} \sum_{l=k-1}^{2N+1} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon_1} \prod_{j=1}^{n} r_j^{1/2\varepsilon p_j} \sum_{2|h_s|=l+1-\varepsilon k} \frac{dQ_{h_{sj}}(\varepsilon\theta)}{d(\varepsilon\theta)} \prod_{j=1}^{n} r_j^{h_{sj}} -$$

$$- \sum_{l=k+1}^{2N+1} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon_2} \prod_{j=1}^{n} r_j^{1/2\varepsilon p_j} \sum_{2|h_s|=l-1-\varepsilon k} \frac{dP_{h_{sj}}(\varepsilon\theta)}{d(\varepsilon\theta)} \prod_{j=1}^{n} r_j^{h_{sj}} \Bigg] + \ldots$$

$$Q_{h_{sj}}(\varepsilon\theta) = a_{h_{sj}}^{(\varepsilon)} \cos \varepsilon\theta + b_{h_{sj}}^{(\varepsilon)} \sin \varepsilon\theta$$

$$P_{h_{sj}}(\varepsilon\theta) = a_{h_{sj}}^{(\varepsilon)} \cos \varepsilon\theta - b_{h_{sj}}^{(\varepsilon)} \sin \varepsilon\theta$$

$$a_{k_{sj}} = \operatorname{Re} c_{k_{sj}}, \; a_{h_{sj}}^{(\varepsilon)} = \operatorname{Re} c_{h_{sj}}^{(\varepsilon)}, \; b_{k_{sj}} = \operatorname{Im} c_{k_{sj}}, \; b_{h_{sj}}^{(\varepsilon)} = \operatorname{Im} c_{h_{sj}}^{(\varepsilon)}$$

Если система $2q$-го порядка ($q > n$) вида (1.1) обладает n-частотным резонансом (1.2), то нормальная форма этой системы также может быть записана в виде (1.8) или (1.9) с заменой всюду n на q в членах тождественного резонанса.

Систему, получаемую из (1.9) отбрасыванием членов выше $2N + 1$ порядка относительно $r_1, \ldots, r_q$, будем называть модельной.

Ниже будет дано решение задачи устойчивости для системы (1.9) в простейшем (и в то же время наиболее важном) случае внутреннего резонанса нечетного порядка, когда $k = m + 1$.

2. Исследование модельной системы. При $k = m + 1$ модельная система, получаемая из (1.9) при $2N + 1 = k$, может быть записана в следующем виде:

$$r_s^{\boldsymbol{\cdot}} = 2Q_s(\theta) \prod_{j=1}^{n} r_j^{p_j/2}, \quad s = 1, \ldots, n \tag{2.1}$$

$$\theta^{\boldsymbol{\cdot}} = \sum_{s=1}^{n} p_s \frac{dQ_s}{d\theta} \prod_{j=1}^{n} r_j^{p_j/2 - \delta_{sj}}, \quad r_j^{\boldsymbol{\cdot}} = 0, \quad j = n+1, \ldots, q$$

$$(\theta = p_1\theta_1 + \ldots + p_n\theta_n, \quad Q_s(\theta) = a_s \cos\theta + b_s \sin\theta)$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$C = \begin{Vmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{Vmatrix}$$

с помощью которой составим всевозможные матрицы

$$C_{s_1s_2s_3} = \begin{Vmatrix} a_{s1} & a_{s2} & a_{s3} \\ b_{s1} & b_{s2} & b_{s3} \end{Vmatrix}, \quad s_1 < s_2 < s_3$$

Для каждой матрицы $C_{s_1s_2s_3}$ составим по три определителя

$$D_{s_js_h} = \begin{Vmatrix} a_{s_j} & a_{s_h} \\ b_{s_j} & b_{s_h} \end{Vmatrix}, \quad s_j < s_h$$

Вводя еще вспомогательные углы ψ_s

$$\sin\psi_s = -a_s/\Delta_s, \ \cos\psi_s = b_s/\Delta_s, \ \Delta_s = \sqrt{a_s^2 + b_s^2}, \quad s=1,2,\ldots,n$$

получим

$$Q_s(\theta) = \Delta_s \sin(\theta - \psi_s), \quad D_{s_js_h} = \Delta_{s_j}\Delta_{s_h}\sin(\psi_{s_h} - \psi_{s_j})$$

Все случаи, которые могут встретиться при исследовании системы (2.1), разобьем на следующие группы.

Случай 1. a) Rank $C = 2$. Существует такая матрица $C_{s_1s_2s_3}$, что все соответствующие ей определители $D_{s_js_h} \neq 0$, причем

$$\operatorname{sign} D_{s_1s_2} = \operatorname{sign} D_{s_2s_3} = -\operatorname{sign} D_{s_1s_3} \tag{2.2}$$

б) Rank $C = 1$. Существует такая пара элементов a_j, $a_h \neq 0$ (или b_j, $b_h \neq 0$), что $\operatorname{sign} a_ja_h = -1$ (или $\operatorname{sign} b_jb_h = -1$).

Случай 2. a) Rank $C = 2$. Для любой матрицы $C_{s_1s_2s_3}$ либо среди определителей $D_{s_1s_2}$, $D_{s_1s_3}$, $D_{s_2s_3}$ есть нулевые, либо нарушаются условия (2.2).

б) Rank $C = 1$. Для любых отличных от нуля пар элементов a_ja_k (или b_j, b_h) выполняется условие

$$\operatorname{sign} a_ja_h = 1 \quad \text{или} \ \operatorname{sign} b_jb_h = 1$$

Замечание. Случаи 1б и 2б содержат такой особо вырожденный случай, когда все определители $D_{jh} = 0$ ($j, h = 1, 2, \ldots, n$; $j \neq h$). Несмотря на частность этого случая, его исследование представляет большой интерес. Действительно, нетрудно показать, что именно такое вырождение имеет место для всякой гамильтоновой системы[1].

Решение задачи устойчивости в случае 1 дает

Теорема 2.1. В случае 1 нулевое решение модельной системы (2.1) устойчиво.

Доказательство. Справедливость теоремы вытекает из того, что в условиях случая 1 система (2.1) обладает знакоопределенным интегралом вида

---

[1] Нурпеисов С. Об устойчивости в критическом случае n пар чисто мнимых корней при наличии внутреннего резонанса. Кандидатская диссертация, 1972, Алма-Ата.

(c_j — произвольные постоянные)

2.3) $$I \equiv \gamma_1 r_1 + \ldots + \gamma_n r_n + c_{n+1} r_{n+1} + \ldots + c_q r_q = \mathrm{const}$$

Действительно, вычисляя $dI\,/\,dt$ в силу системы (2.1) и рассматривая уравнение $dI\,/\,dt \equiv 0$, получим для определения γ_s следующую систему уравнений:

$$\gamma_1 a_1 + \ldots + \gamma_n a_n = 0, \qquad \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_n b_n = 0 \tag{2.4}$$

Можно убедиться, что как при выполнении условий 1а, так и условий 1б эта система имеет строго положительное решение. Существование положительного решения и доказывает теорему.

Переходя к рассмотрению случая 2, предварительно сформулируем лемму (не останавливаясь на доказательстве), связывающую свойства матрицы C и вспомогательных углов ψ_s.

Лемма. При выполнении условий 2а углы ψ_s можно занумеровать таким образом, что будут выполняться неравенства

$$0 \leqslant \psi_s - \psi_1 < \pi, \quad 0 \leqslant \psi_h - \psi_j < \pi, \quad s = 2, \ldots, \quad n, \quad j < h$$

Считая эту нумерацию углов ψ_s выполненной, произведем в системе (2.1) нумерацию переменных r_s в том же порядке. В вырожденном случае порядок нумерации безразличен, так как в этом случае $\psi_s = \psi_1$ для всех s.

Нетрудно видеть, что в результате произведенной перенумерации матрица C обладает тем свойством, что все определители $D_{jh} \geqslant 0$ при $j < h$. В частности, $D_{ns} \leqslant 0$ для всех s.

Теорема 2.2. В случае 2 нулевое решение модельной системы (2.1) неустойчиво.

Доказательство проведем с помощью теоремы Четаева [12]. Очевидно, достаточно рассмотреть систему (2.1) без уравнений $r_j^{\boldsymbol{\cdot}} = 0$, $j = n + 1, \ldots, q$.

Случай 2а. Рассмотрим функцию

$$V_1 = \prod_{s=1}^{n} r_s^{p_s/2} \cos(\theta - \psi_n)$$

Вычисляя ее производную в силу (2.1), после ряда преобразований получим

$$V_1^{\boldsymbol{\cdot}} = \Delta_n^{-1} \sum_{s=1}^{n-1} p_s D_{sn} \prod_{j=1}^{n} r_j^{p_j - \delta_{js}}$$

откуда видно, что $V_1^{\boldsymbol{\cdot}} > 0$ в области $r_s > 0$. С помощью уравнения $V_1 = 0$ можно построить область $r_s > 0$, $\theta' \leqslant \theta \leqslant \theta''$, в которой выполняются все условия теоремы Четаева о неустойчивости.

Случай 2б. В этом случае теореме Четаева о неустойчивости удовлетворяют либо функция

$$V_2 = \prod_{s=1}^{n} r_s^{p_s/2} \cos\theta$$

(когда среди a_s есть отличные от нуля), либо функция

$$V_3 = \prod_{s=1}^{n} r_s^{p_s/2} \sin\theta$$

(когда среди b_s есть отличные от нуля).

Теоремы 2.1 и 2.2 дают необходимые и достаточные условия устойчивости нулевого решения модельной системы (2.1).

В дальнейшем при рассмотрении полной системы понадобится более детальное исследование неустойчивых модельных систем, которое и проведем ниже.

Как было показано, для всякой неустойчивой модельной системы выполняются неравенства (2.5). Разобьем теперь все случаи неустойчивости на два клесса А и Б

$$(2.5)\qquad 0 \leqslant \psi_s - \psi_1 < \pi, \quad s = 2, \ldots, n \quad (\text{А})$$

$$0 \leqslant \psi_s - \psi_1 < \pi, \quad s = 2, \ldots, l; \quad \psi_{l+1} = \ldots = \psi_n = \psi_1 + \pi; \quad 2 \leqslant l \leqslant n-1 \quad (\text{Б})$$

Теорема 2.3. Неустойчивые модельные системы класса А обладают растущим решением вида

$$(2.6)\qquad \theta = \theta_0, \; r_s = \gamma_s z(t), \; \gamma_s > 0, \quad s = 1, 2, \ldots, n$$

Подставляя это решение в (2.1), имеем

$$(2.7)\qquad z^{\cdot} = 2z^{k/2}$$

$$(2.8)\qquad \gamma_s = Q_s(\theta) \prod_{j=1}^{n} \gamma_j^{p_j/2}, \quad s = 1, 2, \ldots, n$$

$$(2.9)\qquad \sum_{s=1}^{n} \frac{p_s}{\gamma_s} Q_s'(\theta) = 0, \quad Q_s' = \frac{dQ_s}{d\theta}$$

Прежде всего, используя условия А, убедимся, что уравнение (2.9), которое с использованием (2.8) приводится к виду

$$\sum_{s=1}^{n} p_s \operatorname{ctg}(\theta - \psi_s) = 0$$

обладает корнем $\theta = \theta_0$, таким, что $Q_s(\theta_0) > 0$, для всех s. При этом $\theta_0 \in (\psi_n, \psi_1 + \pi)$ или $\theta_0 \in (\psi_n + \pi, \psi_1)$. Теперь $\gamma_s > 0$ определятся из (2.8) в виде

$$(2.10)\qquad \gamma_s = Q_{s0} \Big(\prod_{j=1}^{n} Q_{j0}^{p_j} \Big)^{\varkappa}, \quad Q_{s0} = Q_s(\theta_0), \quad \varkappa = \frac{1}{2-k}$$

Функция $z(t)$ найдется из (2.7).

Тем самым дано другое доказательство неустойчивости нулевого решения модельной системы при выполнении условия А.

Теорема 2.4. Неустойчивые модельные системы класса Б обладают знакопостоянным (положительным) интегралом

$$(2.11)\qquad I \equiv \gamma_1 r_1 + \sum_{s=l+1}^{n} \gamma_s r_s^{\cdot} + \sum_{j=n+1}^{q} c_j r_j = \mathrm{const}$$

Справедливость этого утверждения проверяется непосредственным дифференцированием (2.11) в силу системы (2.1).

В качестве γ_s удобно взять следующие значения (c_j — произвольные постоянные):

$$\gamma_1 = (n-l)/\Delta_1, \qquad \gamma_s = 1/\Delta_s, \qquad s = l+1, \ldots, n$$

Замечание. Модельные системы класса Б решением (2.6) не обладают. Однако при определенных соотношениях между ψ_1 и ψ_j, $j = 2, \ldots, l$ они могут иметь растущее решение, аналогичное (2.6). Для этого в (2.6) нужно положить $\theta_0 = \psi_1$ или $\theta_0 = \psi_1 + \pi$, $r_s = g_s$, $s = 1, l+1, \ldots, n$, где g_s — некоторые постоянные. Условие существования растущего решения имеет вид

$$\sum_{s=2}^{l} p_s \operatorname{ctg}(\psi_1 - \psi_s) = 0$$

3. Исследование полной системы. Устойчивость модельной системы связана с наличием знакоопределенного интеграла, поэтому ясно, что из ее устойчивости нельзя сделать никаких заключений об устойчивости полной системы, не привлекая к рассмотрению члены выше m-го порядка. Но в случае неустойчивости модельной системы справедлива

Теорема 3.1. Если модельная система принадлежит классу А, то неустойчивость нулевого решения модельной системы влечет за собой неустойчивость нулевого решения полной системы.

Полагая $2N + 1 = k$, запишем систему (1.9) в виде

$$(3.1)\qquad r_s^{\cdot} = 2Q_s(\theta)\prod_{j=1}^{n} r_j^{p_j/2} + R_s(r, \vartheta), \qquad s = 1, \ldots, n$$

$$\theta^{\cdot} = \sum_{s=1}^{n} p_s Q_s'(\theta) \prod_{j=1}^{n} r_j^{p_j/2 - \delta_{js}} + \Phi(r, \Theta)$$

$$r_j^{\cdot} = R_j(r, \Theta), \qquad j = n+1, \ldots, q$$

$$r = (r_1, \ldots, r_q),\ \Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_q),\ R_s(r, \Theta) \sim O(\|r\|^{(k+1)/2})$$

$$s = 1, \ldots, q;\ \Phi(r, \Theta) \sim O(\|r\|^{(k-1)/2})$$

Перейдем в (3.1) к обобщенным q-мерным цилиндрическим координатам ρ, φ_s, $s = 1, \ldots, n-1$; r_j, $j = n+1, \ldots, q$ по формулам

$$r_1 = \gamma_1 \rho \cos\varphi_1, \qquad r_s = \gamma_s \rho \cos\varphi_s \prod_{j=1}^{s-1} \sin\varphi_j, \qquad s = 2, \ldots, n-2$$

$$r_n = \gamma_n \rho \prod_{j=1}^{n-1} \sin\varphi_j, \qquad r_j = r_j, \qquad j = n+1, \ldots, q$$

Растущему решению в новой системе координат соответствуют следующие значения углов φ_s:

$$\varphi_s = \varphi_s^\circ, \quad \cos\varphi_s^\circ = (n-s+1)^{-1/2}, \quad \sin\varphi_s^0 = \left(\frac{n-1}{n-s+1}\right)^{1/2}$$

Произведем линеаризацию новой системы по переменным φ_s, θ в окрестности точки φ_s°, θ_0. Опуская промежуточные вычисления, запишем конечный результат в следующем виде:

$$\rho^\cdot = 2\omega\rho^{k/2} + F_0(r_*, \alpha, \Theta)$$

$$\alpha_s^\cdot = 2\omega\rho^{k/2-1}\left[\frac{LN_s}{(n-s+1)\sqrt{n-1}}\theta_* - \alpha_s\right] + F_s(r_*, \alpha, \Theta), \quad s = 1, \ldots, n-1$$

$$\theta_*^\cdot = \omega\rho^{k/2-1}\left(\sum_{s=1}^{n-1}\Gamma_s\alpha_s - k\theta_*\right) + F_n(r_*, \alpha, \Theta)$$

$$r_j^\cdot = F_j(r_*, \alpha, \Theta), \quad j = n+1, \ldots, q$$

Здесь

$$r_* = (\rho, r_{n+1}, \ldots, r_q), \quad \Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n), \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}), \quad \alpha_s = \varphi_s - \varphi_s^\circ$$

$$\theta_* = \theta - \theta_0, \quad L = \left(\prod_{j=1}^{n}\gamma_j^{p_j}\right)^{1/2}, \quad N_s = \sum_{j=1}^{n-s}\frac{Q'_{s+j,0}}{\gamma_{s+j}} - \frac{n-s}{\gamma_s}Q'_{s0}, \quad \omega = (n^{k/2-1})^{-1/2}$$

$$\Gamma_s = \frac{p_s\sqrt{n-s}}{\gamma_s}Q_{s0}' - \frac{1}{n-s}\sum_{j=s+1}^{n}\frac{p_jQ_{j0}'}{\gamma_j}, \quad \Gamma_{n-1} = -\frac{p_n}{\gamma_n}Q'_{n0}, \quad s = 1, \ldots, n-2$$

а функции F_s имеют следующую структуру:

$$F_s(r_*, \alpha, \Theta) = F_s^{(1)}(r, \alpha, \Theta) + \rho^{(k-1)/2}F_s^{(2)}(r_*, \alpha, \theta_*), \quad s = 1, \ldots, n$$

$$F_s^{(1)} \sim O(\|r\|^{(k-1)/2}), \quad F_s^{(2)}(0, \alpha, \theta_*) \sim O(\|\varphi\|^2, \|\theta_*\|^2)$$

$$F_0(r_*, \alpha, \Theta) = F_0^{(1)}(r_*, \alpha, \Theta) + \rho^{k/2}F_0^{(2)}(r_*, \alpha, \Theta), \quad F_0^{(1)} \sim O(\|r\|^{(k+1)/2})$$

$$F_0^{(2)}(0, \alpha, \Theta) \sim O(\|\alpha\|, \theta_*), \quad F_j(r_*, \alpha, \Theta) \sim O(\|r_*\|^{(k+1)/2}),$$
$$j = n+1, \ldots, q$$

Имея в виду воспользоваться теоремой Четаева, рассмотрим функции (γ — параметр, определяемый ниже)

$$V = \rho, \quad W_s = \alpha_s^2 - \rho^{2(1+\gamma)}, \quad s = 1, \ldots, n-1$$

$$W_n = \theta_*^2 - \rho^{2(1+\gamma)}, \quad W_j = r_j - \rho, \quad j = n+1, \ldots, q$$

Ясно, что в некотором конусе K_1, содержащем растущее решение модельной системы, для производной $V^\cdot$ функции V при $0 < \|r_*\| < \tau$ (τ — достаточно мало) справедливо неравенство $VV^\cdot > 0$. Определим конус K_2 неравенством

$$\max_s W_s \leqslant 0, \quad s = 1, \ldots, q$$

Если γ достаточно велико, то, очевидно, $K_2 \subset K_1$ при всех $\rho < \tau$.

Оценим теперь знаки производных $W_{s0}^\cdot$ функций W_s на соответствующих им участках поверхности конуса K_2, содержащихся в K_1. С этой целью положим

$$\alpha_j = \delta_j\rho^{1+\gamma},\ \theta_* = \delta_n\rho^{1+\gamma},\ r_i = |\delta_i|\rho,\ |\delta_\nu| \leqslant 1|$$
$$j = 1, \ldots, \quad n-1; \quad i = n+1, \ldots, q; \quad \nu = 1, \ldots, q;$$
$$j \neq i,\ n \neq s$$

Если s совпадает с одним из значений j, i, s, то соответственно положим $|\alpha_s| = \rho^{1+\gamma}$, $|\theta_*| = \delta_n\rho^{1+\gamma}$, $r_s = \rho$.

В итоге получим

$$W_{s0}^{\cdot} = 4\omega\rho^\sigma\left[\pm\frac{LN_s\delta_n}{(n-s+1)\sqrt{n-s}} - \gamma - 2\right] + O(\rho^{1/2+\sigma}) \tag{3.2}$$
$$W_{n0}^{\cdot} = 2\omega\rho^\sigma\left[\pm\sum_{s=1}^{n}\Gamma_s\delta_s - k - 2(1+\gamma)\right] + O(\rho^{1/2+\sigma})$$
$$W_{j0}^{\cdot} = -4\omega(1+\gamma)\rho^\sigma + O(\rho^{1/2+\sigma}), \quad \sigma = 2\gamma + k/2 + 1$$
$$j = 1, \ldots, n-1; \qquad j = n+1, \ldots, q$$

Из (3.2) видно, что при достаточно большом γ и при всех допустимых значениях δ_ν будем иметь при $\rho < \tau$

$$W_{s0}^{\cdot} < 0, \quad s = 1, \ldots, q$$

Введя теперь функцию $W = \max W_s$, $s = 1, \ldots, q$, можно утверждать, что функции V и W удовлетворяют соответствующей теореме Четаева о неустойчивости [12].

Теорема 3.2. Если модельная система принадлежит классу Б, то из неустойчивости модельной системы не следует неустойчивость полной системы.

Действительно, пусть система (2.1) неустойчива и принадлежит классу Б. Рассмотрим определенно-положительную функцию

$$H = I + r_2^2 + \ldots + r_l^2, \tag{3.3}$$

где I — интеграл модельной системы (2.11). Полагая в системе (3.1) $R_j(r, \Theta) = 0$, $j = 1, l+1, \ldots, n$ и вычисляя производную от (3.3) в силу системы (3.1), получим

$$H^{\cdot} = \gamma_1 R_1 + \sum_{j=l+1}^{n}\gamma_j R_j + 4\sum_{s=2}^{l} r_s Q_s(\theta)\prod_{j=1}^{n} r_j^{p_j/2} \tag{3.4}$$

Из (3.4) видно, что всегда можно так подобрать функции $R_1, R_{l+1}, \ldots, R_n \sim O(\|r\|^{k/2+1})$, чтобы иметь либо $H^{\cdot} = 0$, либо $H^{\cdot} = G(r, \Theta)$, где $G(r, \Theta)$ — определенно-отрицательная функция, что и доказывает справедливость теоремы.

Авторы благодарят участников семинара по аналитической механике, руководимого В. В. Румянцевым, за обсуждение работы.

Поступила 13 II 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ибрагимова Н. К.* Об устойчивости некоторых систем при наличии резонанса. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 5.
2. *Куницын А.Л.* Об устойчивости в критическом случае трех пар чисто мнимых корней при внутреннем резонансе. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
3. *Куницын А. Л.* Об устойчивости в критическом случае чисто мнимых корней при внутреннем резонансе. Диф. уравнения, 1971, т. 7, вып. 9.
4. *Гольцер Я. М., Нурпеисов С.* К исследованию одного критического случая при наличии внутреннего резонанса. Изв. АН КазССР, 1972, Сер. физ.-матем., 1972, № 1.
5. *Маркеев А. П.* Об устойчивости канонической системы с двумя степенями свободы при наличии резонанса. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
6. *Хазин Л. Г.* Об устойчивости гамильтоновых систем при наличии резонансов. ПММ, 1971, т. 35, вып. 3.
7. *Хазина Г. Г.* Некоторые вопросы устойчивости при наличии резонансов. ПММ. 1974, т. 38, вып. 1.
8. *Брюно А. Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений. Труды Моск. матем. о-ва, 1971, т. 25.
9. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
10. *Каменков Г. В.* Избр. труды, т. 1. М., «Наука», 1971.
11. *Молчанов А. М.* Устойчивость в случае нейтральности первого приближения. Докл. АН СССР, 1961, т. 141, № 1.
12. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике, М., Изд-во АН СССР, 1962.