Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 531.36

О ВЛИЯНИИ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ

В. В. Румянцев

(Москва)

Вопрос о влиянии гироскопических сил на устойчивость стационарного движения голономной механической системы в случае, когда силы зависят от скоростей лишь позиционных координат, решается известными теоремами Кельвина — Четаева [1] о влиянии гироскопических и диссипативных сил на устойчивость равновесия. Если же гироскопические силы зависят также от скоростей циклических координат, то их влияние на устойчивость стационарных движений может оказаться, как показано на двух задачах в статье [2], совершенно отличным от влияния гироскопических сил, зависящих лишь от скоростей позиционных координат. В данной статье исследуется влияние гироскопических сил, линейно зависящих от скоростей обобщенных координат, включая циклические, на устойчивость стационарного движения голономной консервативной системы. Доказано, что в случае, когда гироскопические силы, прикладываемые по циклическим координатам, представляются в виде полных производных по времени от некоторых функций позиционных координат, гироскопические силы могут как стабилизировать, так и дестабилизировать стационарное движение, причем это влияние при некоторых условиях сохраняется и при действии диссипативных сил, зависящих от скоростей лишь позиционных координат. В случае действия диссипативных сил, зависящих и от скоростей циклических координат, указаны условия устойчивости и неустойчивости стационарного движения. Рассмотрены примеры. В заключение обсуждается вопрос об условиях, при которых приложение к системе гироскопических сил равносильно дабавлению к функции Лагранжа членов, линейно зависящих от обобщенных скоростей.

1. Рассмотрим голономную механическую систему, стесненную стационарными геометрическими связями. Если за основные переменные, характеризующие состояние системы в любой момент времени t, принять независимые лагранжевы координаты q_i и скорости $q_i^{\boldsymbol{\cdot}} \equiv dq_i/dt$, то уравнения движения системы можно записать в форме уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q^{\boldsymbol{\cdot}}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

$$L(q, q^{\boldsymbol{\cdot}}) = T + U, \qquad T(q, q^{\boldsymbol{\cdot}}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(q)\, q_i^{\boldsymbol{\cdot}} q_j^{\boldsymbol{\cdot}}$$

Здесь T — кинетическая энергия, $U(q)$ — силовая функция потенциальных сил, действующих на систему, $Q_i(q, q^{\boldsymbol{\cdot}})$ — непотенциальные обобщенные силы.

Будем далее предполагать, что координаты q_α—циклические, т. е. выполняются условия

$$\partial L/\partial q_\alpha = 0 \qquad (\alpha = k+1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

и, кроме того, обобщенные силы Q_i не зависят от циклических координат.

Если соответствующие циклическим координатам непотенциальные силы $Q_\alpha = 0$, то уравнения (1.1) имеют первые интегралы

$$\partial L / \partial q_\alpha^{\boldsymbol{\cdot}} = c_\alpha = \mathrm{const} \quad (\alpha = k+1, \ldots, n) \tag{1.3}$$

С помощью интегралов (1.3), применяя метод Рауса игнорирования циклических координат, можно, как известно [1], привести задачу изучения движения системы к интегрированию системы уравнений Рауса порядка $2(n-k)$, описывающих движение так называемой приведенной системы, которую будем называть системой A, и последующим квадратурам.

В случае, когда все непотенциальные силы $Q_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, при условиях (1.2) и определенных начальных условиях уравнения (1.1) допускают частные решения

$$q_s = q_{s0}, \quad q_s^{\boldsymbol{\cdot}} = 0, \quad q_\alpha^{\boldsymbol{\cdot}} = q_{\alpha 0}^{\boldsymbol{\cdot}} \quad (s = 1, \ldots, k;\ \alpha = k+1, \ldots, n) \tag{1.4}$$

описывающие стационарные движения системы, в которых позиционные координаты q_s и скорости $q_\alpha^{\boldsymbol{\cdot}}$ циклических координат сохраняют постоянные значения, а циклические координаты q_α изменяются со временем линейно. Постоянные (1.4) представляют собою решения уравнений

$$\partial L / \partial q_s = 0 \quad (s = 1, \ldots, k) \tag{1.5}$$

и (1.3) при произвольно заданных значениях постоянных c_α. Постоянные $q_{\alpha 0}^{\boldsymbol{\cdot}}$ можно также задать произвольно, тогда из уравнений (1.5) с учетом равенств $q_s^{\boldsymbol{\cdot}} = 0$ найдутся значения q_{s0}, а из уравнений (1.3)—значения c_α.

Вопрос об устойчивости стационарных движений можно решать, как известно, с помощью теоремы Рауса и ее обращения [3].

Интересен вопрос о влиянии на устойчивость стационарных движений (1.4) системы линейных гироскопических сил

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} q_j^{\boldsymbol{\cdot}} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.6}$$

прикладываемых к системе дополнительно к действующим на нее потенциальным силам. Величины $g_{ij} = -g_{ji}$ будем предполагать непрерывными функциями позиционных координат $q_1, \ldots, q_k$, обладающими непрерывными частными производными первого порядка по этим переменным.

Если силы (1.6) не зависят от скоростей $q_\alpha^{\boldsymbol{\cdot}}$ циклических координат, т. е. все $g_{i\alpha} = 0$ $(i = 1, \ldots, n,\ \alpha = k+1, \ldots, n)$, то силы $Q_\alpha \equiv 0$ $(\alpha = k+1, \ldots, n)$. В этом случае влияние гироскопических сил на устойчивость движения (1.4) полностью характеризуется теоремами Кельвина — Четаева [1] о влиянии таких сил на устойчивость положения равновесия приведенной системы, соответствующего стационарному движению исходной системы.

В случае гироскопических сил (1.6), зависящих от $q_\alpha^{\boldsymbol{\cdot}}$, среди коэффициентов $g_{\alpha i}$ имеются отличные от нуля, так что сила $Q_\alpha \not\equiv 0$ и координате q_α не отвечает первый интеграл (1.3). Этот случай, когда теоремы Кельвина — Четаева непосредственно не применимы, в литературе не исследован, между тем влияние таких сил на устойчивость стационарных движений может оказаться совершенно отличным от влияния гироскопических сил, зависящих от скоростей $q_s^{\cdot}$ лишь позиционных координат [2]. Эта задача далее рассматривается сначала в предположении, что гироскопические силы Q_α, прикладываемые к системе по ее циклическим координатам, представляются в виде df_α/dt — полных производных по времени от некоторых непрерывных функций $f_\alpha\ (q_1, \ldots, q_k)$, обладающих непрерывными частными производными первого и второго порядков по позиционным координатам q_s $(s = 1, \ldots, k)$, а затем — для более общего случая сил (1.6).

2. Исследуем влияние на устойчивость некоторого стационарного движения (1.4) гироскопических сил вида (1.6), предполагая, что коэффициенты

$$g_{\alpha s} = -g_{s\alpha} = \partial f_\alpha / \partial q_s, \quad g_{\alpha\beta} \equiv 0 \quad (s = 1, \ldots, k; \quad \alpha, \beta = k+1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

и уничтожаются на рассматриваемом стационарном движении

$$g_{s\alpha}\ (q_{10}, \ldots, q_{k0}) = 0 \quad (s = 1, \ldots, n; \alpha = k+1, \ldots, n) \tag{2.2}$$

При условиях (2.2) уравнения (1.1) с правыми частями (1.6) также допускают, очевидно, рассматриваемое решение (1.4). Однако вместо интегралов (1.3) уравнения (1.1) при условиях (1.2) и силах (1.6), (2.1) теперь имеют первые интегралы

$$\partial L / \partial q_\alpha^{\cdot} = f_\alpha\ (q_s) + c_\alpha \quad (\alpha = k+1, \ldots, n) \tag{2.3}$$

Разрешая уравнения (2.3) относительно $q_\alpha^{\cdot}$, находим

$$q_\alpha^{\cdot} = \sum_{\gamma=k+1}^{n} b_{\alpha\gamma} (f_\gamma + c_\gamma) - \sum_{s=1}^{k} \gamma_{\alpha s} q_s^{\cdot} \quad (\alpha = k+1, \ldots, n) \tag{2.4}$$

$$b_{\alpha\gamma} = \frac{A_{\gamma\alpha}}{D}, \quad D = \det (a_{\alpha\gamma})_{k+1}^{n}, \quad \gamma_{\alpha j} = \sum_{r=k+1}^{n} b_{\alpha r} a_{rj}$$

$A_{\gamma\alpha}$ — алгебраическое дополнение элемента $a_{\gamma\alpha}$ в определителе D.

Из формул (2.4) видно, что при $f_\alpha\ (q_{s0}) \neq 0$ значения $q_{\alpha 0}^{\cdot}$ будут отличаться от соответствующих значений $q_{\alpha 0}^{\cdot}$ в случае отсутствия сил (1.6) при одинаковых значениях постоянных c_α в обоих случаях и, наоборот, одинаковым значениям $q_{\alpha 0}^{\cdot}$ будут соответствовать разные значения постоянных c_α.

Рассмотрим функцию, определенную равенством

$$R\,(q_s, q_s^{\cdot}, c_\alpha) = L - \sum_{\alpha=k+1}^{n} q_\alpha^{\cdot} (f_\alpha + c_\alpha) \tag{2.5}$$

в правой части которого $q^{\cdot}_\alpha$ заменены выражениями (2.4). В случае $f_\alpha = 0$ функция (2.5) принимает вид функции Рауса [1].

Нетрудно видеть, что справедливы равенства

$$\frac{\partial L}{\partial q_s} = \frac{\partial R}{\partial q_s} + \sum_{\alpha=k+1}^{n} q_\alpha^{\cdot} \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_s}, \quad \frac{\partial L}{\partial q_s^{\cdot}} = \frac{\partial R}{\partial q_s^{\cdot}}, \quad q_\alpha^{\cdot} = -\frac{\partial R}{\partial c_\alpha} \tag{2.6}$$

$$(s = 1, \ldots, k, \quad \alpha = k+1, \ldots, h)$$

в силу которых первые k уравнений (1.1) с правыми частями (1.6) примут вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial q_s^{\cdot}} - \frac{\partial R}{\partial q_s} = Q_s^{*} \quad (s = 1, \ldots, k) \tag{2.7}$$

где с учетом (2.1) гироскопические силы

$$Q_s^* = Q_s + \sum_{\alpha=k+1}^{n} q_\alpha^{\cdot} \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_s} = \sum_{r=1}^{k} g_{sr} q_r^{\cdot} \quad (s = 1, \ldots, k) \tag{2.8}$$

Систему уравнений (2.7) можно исследовать независимо от $n - k$ остальных уравнений (1.1). После интегрирования уравнений (2.7) переменные q_α найдутся в виде квадратур из последней группы уравнений (2.6).

Рассмотрим структуру уравнений (2.7). Видно, что функция (2.5)

$$R = R_2 + R_1 + R_0$$

$$R_2 = \frac{1}{2} \sum_{s,r=1}^{k} a_{sr}^* q_s^{\cdot} q_r^{\cdot}, \quad a_{sr}^* = a_{sr} - \sum_{\alpha,\gamma=k+1}^{n} b_{\alpha\gamma} a_{\alpha r} a_{\gamma s}$$

$$R_1 = \sum_{s=1}^{k} q_s^{\cdot} \sum_{\alpha=k+1}^{n} \gamma_{\alpha s}(f_\alpha + c_\alpha), \quad R_0 = U - \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\gamma=k+1}^{n} b_{\alpha\gamma}(f_\alpha + c_\alpha)(f_\gamma + c_\gamma)$$

С учетом этих равенств перепишем уравнения (2.7) в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R_2}{\partial q_s^{\cdot}} - \frac{\partial R_2}{\partial q_s} = \frac{\partial R_0}{\partial q_s} + \sum_{r=1}^{k} (\Gamma_{sr} + g_{sr}) q_r^{\cdot} \quad (s = 1, \ldots, k) \tag{2.9}$$

Здесь для сокращения введены обозначения

$$\Gamma_{sr} = -\Gamma_{rs} = \sum_{\alpha=k+1}^{n} \left[\left(\frac{\partial \gamma_{\alpha r}}{\partial q_s} - \frac{\partial \gamma_{\alpha s}}{\partial q_r} \right)(f_\alpha + c_\alpha) + \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_s} \gamma_{\alpha r} - \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_r} \gamma_{\alpha s} \right]$$
$$(s, r = 1, 2, \ldots k)$$

Систему с k степенями свободы, характеризуемую функцией Лагранжа (2.5) и силами (2.8), будем называть приведенной системой B, отвечающей исходной системе с n степенями свободы и характеризуемой функцией Лагранжа L и гироскопическими силами (1.6), (2.1).

С учетом равенств (2.6), (2.2) очевидно, что рассматриваемому стационарному движению (1.4) исходной системы отвечает положение равновесия $q_s = q_{s0}$ приведенной системы B (а также и системы A).

Из уравнений (2.9) видно, что приведенная система B находится под воздействием потенциальных (первое слагаемое в правой части (2.9)) и гироскопических сил (остальные слагаемые), в то время как на исходную систему действуют потенциальные $\partial U / \partial q_j$ и гироскопические силы (1.6), (2.1). Таким образом, приложение к исходной системе гироскопических сил (1.6), (2.1) приводит к воздействию на приведенную систему B дополнительных по сравнению с приведенной системой A потенциальных и гироскопических сил. Эти дополнительные силы зависят, как видно из выражений для R_0 и Γ_{ji}, от функций f_α $(q_1, \ldots, q_k)$, определяющих гироскопические силы Q_α, приложенные к исходной системе по циклическим координатам, и гироскопических сил (2.8).

Уравнения (2.7) имеют интеграл энергии

$$H(q, q^{\cdot}) = R_2 - R_0 = \text{const}$$

эквивалентный с учетом (2.4) интегралу энергии для уравнений (1.1) с правыми частями (1.6).

Для исследования устойчивости положения равновесия приведенной системы B (A) приложимы теорема Лагранжа и обращение теоремы Рауса, а также теоремы Кельвина — Четаева о влиянии гироскопических и диссипативных сил, если последние зависят от скоростей $q_s^{\cdot}$ лишь позиционных координат.

Сравнивая выражения части R_0 функции (2.5) для приведенных систем A и B, нетрудно видеть, что их разность при одинаковых значениях постоянных c_α равна

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha\beta}(f_\alpha f_\beta + 2f_\beta c_\alpha)$$

т. е. является суммой линейной и квадратичной относительно f_α форм. Отсюда следует, что надлежащим выбором функций $f_\alpha(q_1,\ldots, q_k)$ функцию R_0 для системы B можно сделать функцией того или иного знака вне зависимости от знака функции R_0 для системы A. Аналогичный вывод справедлив и в случае одинаковых значений $q_{\alpha 0}^{\cdot}$. На основании теоремы Лагранжа и обращения теоремы Рауса, а также теорем Кельвина — Четаева заключаем, что гироскопические силы (1.6), (2.1) могут оказывать как стабилизирующее, так и дестабилизирующее влияние на стационарное движение (1.4) исходной системы, независимо от четности или нечетности степени неустойчивости приведенной системы A.

Таким образом, при известных условиях стационарное движение (1.4) исходной системы, неустойчивое (устойчивое) под действием потенциальных сил, можно стабилизировать (дестабилизировать) или сохранить неустойчивым (устойчивым) приложением к системе надлежащих гироскопических сил вида (1.6), (2.1). При действии на систему диссипативных сил, зависящих от скоростей $q_s^{\cdot}$ лишь позиционных координат, такая гироскопическая стабилизация сохраняется (разрушается), если функция R_0 для системы B имеет изолированный максимум (не имеет максимума и степень неустойчивости системы B четная); если R_0 не имеет максимума и степень неустойчивости нечетная, то стационарное движение остается неустойчивым. В случае максимума R_0 и действия диссипативных сил с полной по $q_s^{\cdot}$ ($s = 1,\ldots, k$) диссипацией возмущенные движения асимптотически стремятся к стационарному движению, отвечающему максимуму R_0 при возмущенных значениях постоянных c_α [3].

Пример 2.1. Рассмотрим тяжелое твердое тело с одной неподвижной точкой, положение которого в инерциальной системе координат будем определять углами Эйлера θ, φ, ψ. Предполагая, что центр тяжести тела находится на одной из его главных осей инерции — оси x, запишем функцию Лагранжа в виде

$$L(\theta, \varphi, \theta^{\cdot}, \varphi^{\cdot}, \psi^{\cdot}) = {}^1/_2\,[A(\psi^{\cdot}\sin\theta\sin\varphi + \theta^{\cdot}\cos\varphi)^2 + B(\psi^{\cdot}\sin\theta\cos\varphi -$$
$$- \theta^{\cdot}\sin\varphi)^2 + C(\varphi^{\cdot} + \psi^{\cdot}\cos\theta)^2] - P x_0 \sin\theta\sin\varphi$$

где A, B, C — главные моменты инерции, P — вес, x_0 — координата центра тяжести тела. Уравнения вида (1.1) при $Q_i = 0$ имеют первый интеграл вида (1.3), отвечающий циклической координате ψ, и допускают частное решение вида (1.4)

$$\theta = \varphi = \pi/2, \quad \theta^{\cdot} = \varphi^{\cdot} = 0, \quad \psi^{\cdot} = \omega \quad (c = A\omega) \tag{2.10}$$

описывающее перманентное вращение с произвольной угловой скоростью вокруг расположенной вертикально оси x. Рассматривая приведенную систему A, нетрудно установить [4], что движение (2.10) устойчиво по отношению к θ, φ, $\theta^{\cdot}$, $\varphi^{\cdot}$, $\psi^{\cdot}$, если выполняются условия

$$a = \frac{c^2}{A^2}(A - C) - Px_0 = (A - C)\,\omega^2 - Px_0 > 0$$

$$b = \frac{c^2}{A}(A - B) - Px_0 = (A - B)\,\omega^2 - Px_0 > 0$$

и неустойчиво, если $a < 0$, $b > 0$ или $a > 0$, $b < 0$. Если же $a < 0$, $b < 0$, то согласно теоремам Кельвина — Четаева возможна стабилизация гироскопическими в переменных $\theta^{\cdot}$, $\varphi^{\cdot}$ силами, которая, однако, разрушается под действием диссипативных сил, зависящих от $\theta^{\cdot}$, $\varphi^{\cdot}$.

Пусть теперь на тело действуют, помимо силы тяжести, также гироскопические силы вида (1.6), (2.1)

$$Q_1 = k\sin\varphi\,(\varphi^{\cdot} + \psi^{\cdot}\cos\theta), \qquad Q_2 = -k\,(\theta^{\cdot}\sin\varphi - \psi^{\cdot}\sin\theta\cos\varphi) \tag{2.11}$$

$$Q_3 = -k\frac{d}{dt}(\sin\theta\sin\varphi)$$

отвечающие переменным $q_1 = \theta$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = \psi$, где k - const. Уравнения вида (1.1) с правыми частями (2.11) имеют первый интеграл вида (2.3)

$$\partial L/\partial\psi^{\cdot} = -k\sin\theta\sin\varphi + c$$

из которого находим

$$\psi^{\cdot} = [c - k\sin\theta\sin\varphi - (A - B)\,\theta^{\cdot}\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi - C\,\varphi^{\cdot}\cos\theta] \times$$
$$\times\, [(A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi - C)\,\sin^2\theta + C]^{-1}$$

Для движения (2.10) постоянная интегрирования $c = A\omega + k$. Функция Лагранжа (2.5) для приведенной системы B равна

$$R(\theta, \varphi, \theta^{\cdot}, \varphi^{\cdot}, c) = {}^1\!/_2\{[AB\sin^2\theta + (A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi)\,C\cos^2\theta]\,\theta^{\cdot 2} +$$
$$+ (A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi)\,C\varphi^{\cdot 2}\sin^2\theta + 2\,(c - k\sin\theta\sin\varphi) \times$$
$$\times\,[(A - B)\,\theta^{\cdot}\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi + C\varphi^{\cdot}\cos\theta] -$$
$$-\,2\,(A - B)\,C\theta^{\cdot}\varphi^{\cdot}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi - (c - k\sin\theta\sin\varphi)^2\} \times$$
$$\times\,[(A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi - C)\sin^2\theta + C]^{-1} - Px_0\sin\theta\sin\varphi$$

Гироскопические силы (2.8) имеют вид

$$Q^*_1 = k\sin\varphi\varphi^{\cdot}, \qquad Q^*_2 = -k\sin\varphi\theta^{\cdot}$$

Вычисляя вторую вариацию функции R_0, находим коэффициенты устойчивости для системы B

$$\lambda_1 = -Px_0 + \frac{c - k}{A^2}[(A - C)(c - k) + Ak] = -Px_0 + (A - C)\,\omega^2 + \omega k$$

$$\lambda_2 = -Px_0 + \frac{c - k}{A^2}[(A - B)(c - k) + Ak] = -Px_0 + (A - B)\,\omega^2 + \omega k$$

Следовательно, достаточными условиями устойчивости по отношению к переменным θ, φ, $\theta^{\cdot}$, $\varphi^{\cdot}$, $\psi^{\cdot}$ движения (2.10) твердого тела под действием силы тяжести и гироскопических сил (2.11) являются неравенства

$$\lambda_1 > 0, \qquad \lambda_2 > 0 \tag{2.12}$$

Если же

$$\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 > 0 \quad \text{или} \quad \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 < 0 \tag{2.13}$$

то движение (2.10) неустойчиво.

В случае $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ возможна стабилизация гироскопическими в переменных $\theta^{\cdot}$, $\varphi^{\cdot}$ силами.

При действии диссипативных сил, зависящих от $\theta^{\cdot}$, $\varphi^{\cdot}$, устойчивость (неустойчивость) при условиях (2.12), ((2.13)) сохраняется, причем если диссипативные силы обладают полной диссипацией, то при их действии возмущенные движения при условиях (2.12) стремятся асимптотически к перманентному вращению, отвечающему максимуму R_0 при возмущенном значении постоянной c, а устойчивость при условиях $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ разрушается.

Сравнивая выражения λ_i с выражениями a, b, видим, что надлежащим выбором величины и знака постоянной k можно удовлетворить условиям (2.12) или (2.13) независимо от знаков a, b.

3. Рассмотрим влияние на устойчивость некоторого стационарного движения (1.4) сил

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} q_j^{\cdot} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_i^{\cdot}} + F_i \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

представляющих собою суперпозиции гироскопических сил (1.6), диссипативных сил — $\partial\varphi/\partial q_i^{\cdot}$, производных от диссипативной неотрицательной функции Релея

$$2\varphi(q^{\cdot}) = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij} q_i^{\cdot} q_j^{\cdot} \quad (\beta_{ij} = \beta_{ji} = \mathrm{const})$$

и постоянных по величине и направлению сил F_i, определяемых уравнениями

$$\sum_{\alpha=k+1}^{n} g_{i\alpha}(q_{s0}) q_{\alpha 0}^{\cdot} - \sum_{\alpha=k+1}^{n} \beta_{i\alpha} q_{\alpha 0}^{\cdot} + F_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.2}$$

Приложение к системе наряду с гироскопическими и диссипативными силами постоянных сил F_i достаточно [5] для уравновешивания на рассматриваемом стационарном движении диссипативных и, если не выполняются условия (2.2), гироскопических сил.

Будем одновременно рассматривать как частный, когда выполняются условия (2.1), так и более общий при условиях

$$g_{\alpha s} = \partial f_\alpha / \partial q_s + \overset{*}{g}_{\alpha s}, \quad \overset{*}{g}_{\alpha s} = -\overset{*}{g}_{s\alpha} \quad (s = 1, \ldots, k, \ \alpha = k+1, \ldots, n), \tag{3.3}$$

классы гироскопических сил (1.6), предполагая лишь, что удовлетворяются условия

$$(\partial f_\alpha / \partial q_s)_0 = 0, \quad \overset{*}{g}_{i\alpha} = \mathrm{const} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.4}$$

Уравнения (1.1) с правыми частями (3.1) не имеют интегралов вида (1.3) или (2.3), а также интеграла энергии, если $\varphi(q^{\cdot}) \not\equiv 0$, однако допускают уравнение энергии

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{n} F_i q_i^{\cdot} - 2\varphi(q^{\cdot}) \tag{3.5}$$

которым воспользуемся для исследования устойчивости.

При условиях (1.2) и независимости обобщенных сил Q_i от циклических координат вместо переменных $q_\alpha^{\boldsymbol{\cdot}}$ целесообразнее рассматривать переменные

$$p_\alpha = \partial L / \partial q_\alpha^{\boldsymbol{\cdot}} - f_\alpha(q_s) \quad (\alpha = k+1, \ldots, n) \tag{3.6}$$

В случае общего класса сил (1.6), когда выполняются условия $g_{i\alpha}^{*} = g_{i\alpha}^{*} = \mathrm{const}$, в равенствах (3.6) и получаемых с их помощью следует положить $f_\alpha(q_s) \equiv 0$. Разрешая уравнения (3.6) относительно $q_\alpha^{\boldsymbol{\cdot}}$, получим равенства вида (2.4), в которых, как и в последующих формулах, следует лишь заменить постоянные c_α на переменные p_α, с помощью которых представим энергию системы в виде

$$H(q_s, q_s^{\boldsymbol{\cdot}}, p_\alpha) = R_2 - R_0 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}^{*} q_i^{\boldsymbol{\cdot}} q_j^{\boldsymbol{\cdot}} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=k+1}^{n} b_{\alpha\beta}(p_\alpha + f_\alpha)(p_\beta + f_\beta) - U$$

Для стационарного движения (1.4) величины $p_\alpha = p_{\alpha 0} = \mathrm{const}$. В возмущенном движении положим

$$q_s = q_{s0} + x_s, \qquad p_\alpha = p_{\alpha 0} + \eta_\alpha \tag{3.7}$$

и представим энергию в окрестности движения (1.4) в виде

$$H(q_{s0} + x_s, \dot{x}_s, p_{\alpha 0} + \eta_\alpha) = (H)_0 + \sum_{\alpha=k+1}^{n} q_{\alpha 0}^{\boldsymbol{\cdot}} \eta_\alpha + H^{(2)}(x_s, x_s^{\boldsymbol{\cdot}}, \eta_\alpha) + \ldots$$

где $H^{(2)}(x_s, x_s^{\boldsymbol{\cdot}}, \eta_\alpha)$ — вторая вариация энергии, $q_{\alpha 0}^{\boldsymbol{\cdot}} = -(\partial R / \partial p_\alpha)_0$, символ $(a)_0$ обозначает значение величины a на движении (1.4), многоточие — члены порядка выше второго относительно x_s, $x_s^{\boldsymbol{\cdot}}$, η_α.

Из уравнения (3.5) с учетом равенств (3.2), (3.4) и уравнений для переменных p_α, получаемых из (1.1) с учетом (3.1) и (3.6), следует уравнение

$$\frac{d}{dt}[H^{(2)}(x_s, x_s^{\boldsymbol{\cdot}}, \eta_\alpha) + \ldots] = -\sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij} x_i^{\boldsymbol{\cdot}} x_j^{\boldsymbol{\cdot}} \tag{3.8}$$

в правой части которого переменные $x_\alpha^{\boldsymbol{\cdot}}$ можно заменить их выражениями, вычисленными с учетом равенств (3.7)

$$x_\alpha^{\boldsymbol{\cdot}} = \left(\frac{\partial R}{\partial p_\alpha}\right)_0 - \frac{\partial R}{\partial p_\alpha}$$

В силу общих теорем второго метода Ляпунова [1, 6] на основании уравнения (3.8) получаем следующие заключения об устойчивости.

Если диссипативные силы обладают полной диссипацией, то рассматриваемое стационарное движение (1.4) асимптотически устойчиво по отношению к переменным q_s, $q_s^{\boldsymbol{\cdot}}$, p_α $(s = 1, \ldots, k;\ \alpha = k+1, \ldots, n)$ в случае, когда вторая вариация $H^{(2)}(x_s, x_s^{\boldsymbol{\cdot}}, \eta_\alpha)$ энергии системы — определенно-положительная функция переменных x_s, $x_s^{\boldsymbol{\cdot}}$, η_α, и неустойчиво в случае, когда $H^{(2)}(x_s, x_s^{\boldsymbol{\cdot}}, \eta_\alpha)$ может принимать отрицательные значения при сколь угодно малых по абсолютным величинам значениям x_s, $x_s^{\boldsymbol{\cdot}}$, η_α.

Эти же результаты справедливы и в случае диссипативных сил с частичной диссипацией, если множество

$$\sum_{ij=1}^{n} \beta_{ij} x_i^{\cdot} x_j^{\cdot} = 0$$

не содержит других целых движений системы, кроме движения $x_s = x_s^{\cdot} = 0$, $\eta_\alpha = 0$.

Если диссипативные силы отсутствуют или обладают частичной диссипацией, а функция $H^{(2)}(x_s, x_s^{\cdot}, \eta_\alpha)$ определенно-положительна, то стационарное движение (1.4) устойчиво по отношению к переменным q_s, $q^{\cdot}_s$, p_α $(s = 1, \ldots, k;\ \alpha = k + 1, \ldots, n)$.

Пример 3.1. Продолжим рассмотрение примера 2.1, предполагая, что на тяжелое твердое тело помимо гироскопических сил (2.11) действуют также диссипативные силы, производные от определенно-положительной функции

$$2\varphi = \sum_{i,\, j=1}^{3} \beta_{ij} q_i^{\cdot} q_j^{\cdot} \quad (\beta_{ij} = \beta_{ji} = \mathrm{const})$$

где q_i — углы Эйлера θ, φ, ψ, и постоянные силы $F_i = \beta_{i3}\,\omega$ $(i = 1;\ 2,\ 3)$.

Для этой задачи вторая вариация энергии

$$2H^{(2)}(x_1, x_2, x_1^{\cdot}, x_2^{\cdot}, \eta) = Bx_1^{\cdot 2} + Cx_2^{\cdot 2} + \frac{1}{A}\eta^2 +$$
$$+ [(A - C)\,\omega^2 + \omega k - Px_0]\, x_1^2 + [(A - B)\,\omega^2 + \omega k - Px_0]\, x_2^2$$

является определенно-положительной при условиях (2.12) и знакопеременной при условиях (2.13), а также при $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. Следовательно, перманентное вращение (2.10) тяжелого твердого тела при действии гироскопических сил (2.11) и диссипативных сил с полной диссипацией асимптотически устойчиво по отношению к переменным θ, φ, $\theta^{\cdot}$, $\varphi^{\cdot}$, $\psi^{\cdot}$, если выполняются условия (2.12), и неустойчиво при условиях (2.13) или при $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$.

Например, вращение волчка Ковалевской $(A = B = 2C)$ вокруг вертикали асимптотически устойчиво, если $\omega k - Px_0 > 0$, и неустойчиво, если $\omega k - Px_0 < 0$.

4. В заключение остановимся кратко на вопросе о существовании обобщенного потенциала для гироскопических сил (1.6). Хорошо известно (см., например, [7]), что если функция Лагранжа L содержит линейные относительно обобщенных скоростей $q_i^{\cdot}$ члены

$$L_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i(q_1, \ldots, q_n)\, q_i^{\cdot} \tag{4.1}$$

где $a_i(q_1, \ldots, q_n)$ предполагаются дифференцируемыми функциями, причем функция $L_1 dt$ не равна полному дифференциалу какой-либо функции переменных q_i, то в уравнениях Лагранжа (1.1) этим членам соответствуют гироскопические силы, производные от функции L_1

$$Q_i = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L_1}{\partial q^{\cdot}_i} + \frac{\partial L_1}{\partial q_i} = \sum_{j=1} g_{ij} q_j^{\cdot} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.2}$$

Здесь коэффициенты $g_{ij} = -g_{ji}$ определяются равенствами

$$g_{ij} = \partial a_j/\partial q_i - \partial a_i/\partial q_j \quad (i,\ j = 1, \ldots, n) \tag{4.3}$$

В частности, если $\partial L_1/\partial q_\alpha \equiv 0$, то

$$g_{\alpha s} = -\partial a_\alpha/\partial q_s, \quad g_{\alpha\beta} = 0 \quad (s = 1, \ldots, k;\ \alpha, \beta = k+1, \ldots, n)$$

и

$$(4.4) \qquad Q_\alpha = \sum_{j=1}^{n} g_{\alpha j} q_j^{\boldsymbol{\cdot}} = -\frac{da_\alpha(q_1 \ldots q_k)}{dt}$$

При определенных условиях на коэффициенты $g_{ij}(q_1, \ldots, q_n)$ в выражениях (1.6) справедливо и обратное утверждение: приложение к системе гироскопических сил вида (1.6) равносильно добавлению к функции Лагранжа L некоторой линейной относительно обобщенных скоростей $q_i^{\boldsymbol{\cdot}}$ функции L_1 вида (4.1).

В самом деле, для этого необходимо и достаточно, чтобы прикладываемые к системе силы (1.6) имели обобщенную силовую функцию L_1, т. е. представлялись бы в виде средних частей равенств (4.2), а это возможно тогда и только тогда, когда уравнения (4.3) в частных производных первого порядка, левые части которых — заданные функции $g_{ij}(q) = -g_{ji}(q)$, совместны и имеют решение.

Число $n(n-1)/2$ уравнений (4.3) не равно, за исключением случая $n = 3$, числу n искомых функций $a_i(q)$; при $n = 2$ имеется одно уравнение, при $n > 3$ число уравнений больше числа неизвестных на $n(n-3)/2$. Для полной интегрируемости уравнений (4.3) необходимо и достаточно выполнение условий их совместности.

Предполагая заданные функции $g_{ij}(q)$ принадлежащими классу C^1, а искомые функции $a_i(q)$ — классу C^2, условия совместности уравнений (4.3) нетрудно получить в виде

$$(4.5) \qquad \partial g_{ij}/\partial q_r - \partial g_{rj}/\partial q_i = \partial g_{ir}/\partial q_j \quad (i, j, r = 1, \ldots, n)$$

При выполнении условий (4.5) гироскопические силы (1.6) имеют обобщенную силовую функцию вида (4.1). Задача определения функций $a_i(q)$ при этом приводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям [8].

В случае постоянных $g_{ij} = -g_{ji} = \text{const}$ условия (4.5) всегда выполняются, при этом уравнения (4.3) имеют решения вида

$$a_i(q) = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} g_{ij} q_j + c_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

(c_i — произвольные постоянные).

Если функции $g_{ij} = g_{ij}(q_1, \ldots, q_k)$ не зависят от координат q_α и $g_{\alpha\beta} = 0$ ($\alpha, \beta = k+1, \ldots, n$), то неизвестные a_i можно искать также не зависящими от q_α. Уравнения (4.3) для a_α и условия (4.5) их совместности при этом принимают соответственно вид

$$\frac{\partial a_\alpha}{\partial q_s} = g_{s\alpha}, \quad \frac{\partial g_{s\alpha}}{\partial q_r} = \frac{\partial g_{r\alpha}}{\partial q_s} \quad (s, r = 1, \ldots, k,\ \alpha = k+1, \ldots, n)$$

и если функции $g_{s\alpha}$ удовлетворяют этим условиям, то

$$(4.6) \qquad a_\alpha(q_1, \ldots, q_k) = \int \sum_{i=1}^{k} g_{i\alpha} dq_i + c_\alpha \quad (\alpha = k+1, \ldots, n)$$

Заметим, что в этом случае гироскопические силы Q_α имеют вид (4.4). Таким образом, силы (4.4) имеют обобщенную силовую функцию

$$L_1 = \sum_{\alpha=k+1}^{n} a_\alpha (q_1, \ldots, q_k) \dot{q}_\alpha$$

Сравнивая выражения (4.4) с (1.6), (2.1), видим, что $a_\alpha = -f_\alpha + \text{const}$, что, между прочим, нашло отражение в виде функции (2.5).

Пример 4.1. Для гироскопических сил (2.11) примера 2.1

$$g_{12} = k \sin \varphi, \quad g_{13} = k \cos \theta \sin \varphi, \quad g_{23} = k \sin \theta \cos \varphi$$

Функция $a_3 (\theta, \varphi)$ находится по формуле (4.6)

$$a_3 (\theta, \varphi) = \int (g_{13}\, d\theta + g_{23}\, d\varphi) = k \sin \theta \sin \varphi + c$$

Для функций $a_i (\theta, \varphi)$ ($i = 1, 2$) имеется только одно уравнение (4.3) при $i = 1$, $j = 2$, ввиду чего существует много произвола в их определении.

В качестве функции a_1 возьмем, например, произвольную функцию $a_1 (\theta, \varphi)$, тогда функцию a_2 найдем в виде

$$a_2 (\theta, \varphi) = \int \frac{\partial a_1}{\partial \varphi}\, d\theta + k\theta \sin \varphi + \chi_2 (\varphi)$$

Так, если $a_1 = k \sin \theta \sin \varphi + \chi_i (\theta)$, то $a_2 (\theta, \varphi) = k (\theta \sin \varphi - \cos \theta \cos \varphi) + \chi_2 (\varphi)$, где χ_i — произвольные функции.

Поступила 9 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения М., «Наука», 1965.
2. *Румянцев В. В.* Две задачи о стабилизации. МТТ, 1975, № 5.
3. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.
4. *Румянцев В. В.* К устойчивости перманентных вращений твердого тела около неподвижной точки. ПММ, 1957, т. 21, вып. 3.
5. *Пожарицкий Г. К.* Об устойчивости диссипативных систем. ПММ, 1957, т. 21, вып. 4.
6. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.
7. *Парс Л. А.* Аналитическая динамика. М., «Наука», 1971.
8. *Рашевский П. К.* Геометрическая теория уравнений с частными производными. М.—Л., ОГИЗ, 1947.