УДК 536.2.01:517.9

# ТЕПЛОПЕРЕДАЧА В ПОЛУБЕСКОНЕЧНУЮ ОБЛАСТЬ С ГРАНИЦЕЙ, ДВИЖУЩЕЙСЯ ПО ПРОИЗВОЛЬНОМУ ЗАКОНУ

**Ю. И. Бабенко**

(Ленинград)

Усовершенствован предложенный ранее [1] метод решения некоторых задач с движущейся границей.

Будем изучать нестационарную теплопередачу в полубесконечной области при заданной температуре движущейся границы и нулевых начальных условиях. Этот процесс в системе координат, связанной с движущейся границей, описывается задачей ($u$ — скорость перемещения границы)

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-u(t)\frac{\partial}{\partial x}\right]T=0,\quad 0\leqslant x\leqslant\infty,\quad 0<t<\infty$$

$$T|_{x=0}=T_0(t),\quad T|_{x=\infty}=0,\quad T|_{t=0}=0$$

Требуется определить только градиент температуры у границы области $q_0=(\partial T/\partial x)_{x=0}$.

В отличие от работы [1] сделаем подстановку

$$T=\theta\exp\int_0^t\frac{1}{4}u^2\,dt \tag{1}$$

Для величины $\theta$ получим задачу

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-u(t)\frac{\partial}{\partial x}-\frac{u^2(t)}{4}\right]\theta=0,\qquad 0\leqslant x<\infty,\quad 0<t<\infty$$
$$\theta|_{x=0}=\theta_0=T_0\exp\int_0^t\frac{1}{4}u^2dt \tag{2}$$

Уравнение (2) можно представить в виде [2]

$$\left(M-\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(L+\frac{\partial}{\partial x}\right)\theta=0 \tag{3}$$

$$M=\sum_{m=0}^{\infty}b_m(t)\frac{\partial^{(1-m)/2}}{\partial t^{(1-m)/2}},\quad L=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(t)\frac{\partial^{(1-n)/2}}{\partial t^{(1-n)/2}} \tag{4}$$

$$\frac{d^\nu f(t)}{dt^\nu}=\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{-\nu}d\tau,\quad -\infty<\nu<1 \tag{5}$$

Как указывалось ранее [1, 2], можно вместо уравнения (2) рассмотреть уравнение, образованное правым множителем оператора в (3)

$$\left(L+\frac{\partial}{\partial x}\right)\theta=0 \tag{6}$$

все решения которого автоматически удовлетворяют условию на бесконечности.

Записывая (6) при $x=0$, получим выражение, дающее решение поставленной задачи

$$-(\partial\theta/\partial x)_{x=0}=L\theta_0(t) \tag{7}$$

Функция $\theta$ удовлетворяет одновременно уравнениям (6) и (2). Поэтому, дифференцируя (6) по $x$ и исключая из (2) $\partial\theta/\partial x$ и $\partial^2\theta/\partial x^2$, получим уравнение, определяющее оператор $L$

(8) $$[L^2 - u(t)L + {}^1/_4u^2(t)]\theta = \partial\theta / \partial t$$

Подставим сюда $L$ из (4) и преобразуем выражения так, чтобы они действовали только на искомую функцию. Приравнивая множители, стоящие при одинаковых производных, найдем

(9)
$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{u}{2}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{u'}{8}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = \frac{u''}{16}$$
$$a_6 = -\frac{5}{128}u'^2, \quad a_7 = -\frac{5}{128}u''', \quad a_8 = \frac{25}{512}u'u'', \quad a_9 = \frac{7}{256}u^{\mathrm{IV}} -$$
$$-\frac{15}{512}u'^3, \quad a_{10} = -\frac{109}{1024}u'u''' - \frac{13}{256}u''^2, \quad a_{11} = \frac{175}{1024}u'^2u'' - \frac{21}{1024}u^{\mathrm{V}}$$
$$a_{12} = -\frac{1105}{2^{15}}u'^4 + \frac{1757}{2^{13}}u''u''' + \frac{887}{2^{13}}u'u^{\mathrm{IV}}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\sum_{m=0}^{m+2r\leqslant s+1}\sum_{r=0}\binom{\frac{1-m}{2}}{r}a_m a^{(r)}_{s+1-m-2r} - ua_s = 0, \quad s \geqslant 0$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Искомое выражение для $q_0(t)$ дается формулами (7), (1), (4), (9). Оно гораздо проще, чем полученное в первоначальном варианте [1].

Для $u = \mathrm{const}$ ряд в (4) и (7) содержит всего два члена

$$-q_0(t) = \exp\left(-\frac{1}{4}u^2t\right)\left(\frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}} + \frac{u}{2}\right)\exp\left(\frac{1}{4}u^2t\right)T_0(t)$$

Рассмотрим подробно случай $u = \alpha t + \beta$ ($\alpha$, $\beta$ — const), исследованный ранее методом разделения переменных [3]. Уравнению (8) удовлетворяет оператор

(10) $$L = \frac{1}{2}(\alpha t + \beta) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n\alpha^n \frac{\partial^{1/2-3/2n}}{\partial t^{1/2-3/2n}}, \quad c_n - \mathrm{const}$$

Здесь

(11)
$$c_0 = 1, \quad c_1 = -{}^1/_8, \quad c_2 = -5/128, \quad c_3 = -15/512, \quad c_4 = -1105/2^{15}$$
$$c_5 = -1695/2^{15}, \quad c_6 = -414125/2^{22}, \quad c_7 = -59025/2^{18}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$2c_s = -\left[1 - \frac{3}{4}s\right]c_{s-1} - \sum_{n=1}^{s-1} c_n c_{s-n}, \quad s \geqslant 1$$

Заметим, что все $c_n$, $n \geqslant 1$ отрицательны.

Установим сходимость ряда (4) для данного примера. Из (11) по индукции можно заключить, что $c_n c_{s-n} > c_{n-1}c_{s-n+1}$, если $n > s - n$. Поэтому, заменяя в сумме каждый член максимальным значением $c_{s-1}c_1 = -c_{s-1}/8$, получим

(12) $$|c_s| < {}^7/_{16}s\,|c_{s-1}|$$

Из (5) с помощью теоремы о среднем можно найти оценку

(13) $$\left|\frac{\partial^\nu\theta}{\partial t^\nu}\right| \leqslant \Gamma^{-1}(1-\nu)\,t^\nu \sup|\theta|, \quad \nu < 0$$

Если в (4) подставить (12) и (13), получим мажорирующий ряд с общим членом вида

$$({}^7/_{16})^n\,\Gamma(n)\,\Gamma^{-1}[{}^3/_2(n+1)]\,t^{(3n+1)/2}$$

откуда следует сходимость ряда (4).

Используя (12), (13) и свойства гамма-функции, можно получить оценку погрешности, если в ряду (10) сохранены члены вплоть до $n = N$. Для неубывающей $\theta_0(t)$ величина $(-\partial\theta / \partial x)_{x=0} > 0$ приближенная больше истинной на величину $\delta > 0$, причем

$$\delta < |\mathring{c}_N| \sup \theta_0 \cdot (7\pi^{1/2} / 8) 2^N 3^{-(3N/2)-2} \Gamma^{-1}(N)$$
$$\Gamma[{}^3/_2(N+1)]\Gamma^{-1}[{}^3/_2(N+1)+{}^1/_2]\Gamma[{}^1/_2(N+1)+{}^1/_2]\Gamma^{-1}[{}^1/_2(N+1)+{}^2/_3]$$
$$\Gamma[{}^1/_2(N+1)+{}^1/_6]\Gamma^{-1}[{}^1/_2(N+1)+{}^1/_3]\Gamma[{}^1/_2(N+1)+1]\Gamma^{-1}[{}^1/_2(N+$$
$$+1)+{}^7/_6]$$
$$\left[\Gamma^{-1}\left(\frac{N+2}{2}\right)+\Gamma\left(\frac{N+2}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{N+3}{2}\right)\cdot\frac{7}{8}\left(\frac{t}{3}\right)^{3/2}\right] t^{(3N+4)/2} \exp\frac{49t^3}{576}$$

При малых $t$ формула (7) удобнее для вычислений, чем формулы работы [3].

Если функция $u$ задана в виде ряда по экспоненциальным функциям

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n e^{-n\alpha t}, \qquad \alpha, \beta = \mathrm{const}$$

то из (8) можно найти оператор $L$ в виде разложения, удобного для вычислений при больших $t$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha t} P_n, \qquad P_0 = \frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}}, \qquad P_n\theta(t) = \int_0^t K_n(t-\tau)\,\theta(\tau)\,d\tau, \qquad n > 0$$

Поступила 24 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА


1. *Бабенко Ю. И.* Некоторые задачи, часто встречающиеся в теории нестационарного горения. В кн.: Горение и взрыв. М., «Наука», 1972, стр. 115.
2. *Бабенко Ю. И.* Применение дробного дифференцирования в задачах теории теплопередачи. В кн.: Тепло- и массоперенос, т. 8. Минск, 1972.
3. *Гринберг Г. А.* О температурных или концентрационных полях, создаваемых внутри бесконечной или конечной области движущимися поверхностями, на которых задан временной ход температуры или концентрации. ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.