Силовая функция системы (с точностью до постоянной)

$$U = - Mgy \sin \alpha - mgr (\varphi_1 \cos \beta + \varphi_2 \cos \gamma) \sin \alpha$$

Многообразие равновесий (1.4) имеет в данном примере вид

$$\theta = \pi / 2, \ x = r (\varphi_1 \cos \gamma - \varphi_2 \cos \beta) / \sin (\gamma - \beta)$$

$$\varphi, \varphi_1, \varphi_2, y \text{ — произвольны}; \quad \varphi^{\cdot} = \varphi_1^{\cdot} = \varphi_2^{\cdot} = \theta^{\cdot} = x^{\cdot} = y^{\cdot} = 0$$

Любая точка этого многообразия представляет неустойчивое (как при действии диссипативных сил, так и при их отсутствии) положение равновесия, что следует из теоремы 5.1

$$\det \| v_{ij} - p_{ij} \| = - M (M + m) R^2 g^2 \sin^2 \alpha < 0$$

В заключение автор благодарит В. В. Румянцева, под руководством которого была выполнена работа.

Поступила 4 XI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика. М.—Л., Гостехиздат, 1937.
2. *Bottema O.* On the small Vibration of nonholonomic systems. Indag. Math., 1949, vol. 11, f. 4.
3. *Aiserman M. A., Gantmacher F. R.* Stabilität der Gleichgewichtslage in einem nicht-holonomen System. ZAMM, 1957, Bd. 37, Hft 1/2.
4. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М., «Наука», 1967.
5. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения неголономных систем. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
6. *Николенко И. В.* О влиянии неголономных связей на характер равновесия системы. Прикл. механика, 1965, т. 1, вып. 10.
7. *Николенко И. В.* Об устойчивости равновесия неголономных систем П.В. Воронца. Укр. матем. ж., 1968, т. 20, № 1.
8. *Лахаданов В. М.* О влиянии структуры сил на устойчивость движения. ПММ, 1974, т. 38, вып. 2.
9. *Агафонов С. А.* Об устойчивости неконсервативных систем. Вестн. Моск. ун-та, сер. матем., механ., 1972, № 4.
10. *Карапетян А. В.* Об устойчивости неконсервативных систем. Вестн. Моск. ун-та, сер. матем., механ., 1975, № 4.

УДК 532.593

ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ДОКА

В. Ф. Витюк

(Одесса)

Исследуется распространение волн в двухслойной жидкости, вызываемых колебаниями участка дна бассейна, при наличии дока. Волновые движения неоднородной жидкости, генерируемые смещением участка дна бассейна, изучены в работе [1]. При этом поверхность верхнего слоя жидкости предполагалась либо вся свободной, либо полностью покрытой льдом. Ниже методом работы [2] рассматривается аналогичная задача в предположении, что только часть свободной поверхности жидкости покрыта неподвижной жесткой пластиной. Полученные выражения потенциала скорости используются для определения вида свободной поверхности и поверхности раздела. Показано, что присутствие неоднородности увеличивает амплитуду волн на свободной

поверхности, наличие пластины уменьшает амплитуду поверхностных и внутренних волн в области между пластиной и колеблющимся участком дна.

На поверхности двухслойной жидкости, у которой плотность и глубина верхнего и нижнего слоев соответственно ρ, h и ρ_1, H, находится неподвижная жесткая пластина, занимающая область $y = h$, $x \leqslant -l$, $-\infty < z < \infty$. Начало системы координат расположено на поверхности раздела, ось y направлена вертикально вверх. Участок дна $y = -H$, $0 \leqslant x \leqslant a$, $-\infty < z < \infty$ подвергается деформации по закону

$$y = \varepsilon \sin \frac{\pi}{a} x \operatorname{Re} [\exp i (kz - \omega t)]$$

где ε — максимальное отклонение точек средней линии колеблющегося участка дна, которое предполагается малым по сравнению с глубиной жидкости $H + h$. Потенциалы скорости верхней и нижней жидкости $F(x, y, z, t)$ и $F_1(x, y, z, t)$ должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\Delta F(x, y, z, t) = 0, \quad h \geqslant y \geqslant 0; \quad \Delta F_1(x, y, z, t) = 0, \quad 0 \geqslant y \geqslant -H$$
$$(-\infty < x < \infty, \quad -\infty < z < \infty)$$

с граничными условиями (g — ускорение силы тяжести)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + g \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad y = h, \quad x > -l, \quad -\infty < z < \infty$$

$$\partial F / \partial y = 0, \quad y = h, \quad x \leqslant -l, \quad -\infty < z < \infty$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial y}, \quad \rho \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - g (\rho_1 - \rho) \frac{\partial F}{\partial y} = \rho_1 \frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2}, \quad y = 0$$
$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < z < \infty$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0, \quad a < x < \infty \\ -\omega \varepsilon \sin \frac{\pi}{a} x \operatorname{Re} [i \exp i (kz - \omega t)], & 0 \leqslant x \leqslant a \end{cases}$$
$$y = -H, \quad -\infty < z < \infty$$

Движение жидкости должно быть ограниченным в окрестности точки $(-l, h)$ вдали от пластины и затухать по мере продвижения под пластиной, т. е. в частности, требуется ограниченность $\partial F / \partial t$ на кромке пластины [3].

Для искомых функций $F(x, y, z, t)$ и $F_1(x, y, z, t)$ записываются две граничные задачи, первая из которых решается согласно методике, изложенной в работе [2], а вторая — с помощью преобразования Фурье по x. Ядро возникшего функционального уравнения $K(\alpha)$ имеет вид

$$K(\alpha) = E(\gamma) / L(\gamma), \quad \gamma^2 = \alpha^2 + k^2$$

$$E(\gamma) = \gamma [(\gamma \operatorname{sh} \gamma h - \chi \operatorname{ch} \gamma h) \operatorname{sh} \gamma H - \chi_1 \operatorname{sh} \gamma h \operatorname{ch} \gamma H]$$

$$L(\gamma) = [(\gamma^2 + \beta \chi) \operatorname{sh} \gamma h - \gamma (\beta + \chi) \operatorname{ch} \gamma h] \operatorname{sh} \gamma H -$$
$$- \chi_1 (\gamma \operatorname{sh} \gamma h - \beta \operatorname{ch} \gamma h) \operatorname{ch} \gamma H,$$

$$\beta = \frac{\omega^2}{g}, \quad \chi = \frac{\rho \beta}{\rho_1 - \rho}, \quad \chi_1 = \frac{\rho_1 \beta}{\rho_1 - \rho}$$

Полученные выражения для $F(x, y, z, t)$ и $F_1(x, y, z, t)$ при $\rho_1 \to \rho$ совпадают с соответствующими формулами работы [2], а при $l \to \infty$ дают результаты работы [1].

Вид свободной поверхности $\zeta(x, z, t)$ и поверхности раздела $\zeta_1(x, z, t)$ определяются формулами [1]

$$\zeta(x, z, t) = -\beta \omega^{-2} \frac{\partial F}{\partial t}, \quad y = h$$

$$\zeta_1(x, z, t) = -\omega^{-2} \frac{\partial}{\partial t} (\chi_1 F_1 - \chi F), \quad y = 0$$

В случае, когда расстояние от кромки пластины до колеблющегося участка дна превосходит глубину жидкости, возмущения свободной поверхности, вызываемые де-

формациями дна, записываются в виде при $a < x < \infty$

$$\zeta(x, z, t) = 2\varepsilon\beta \frac{\pi}{a} \Big\{ f_1(\alpha_*, \gamma_*, h)[\sin \alpha_* x + \sin \alpha_*(x - a)] +$$
$$+ f_1(\alpha_0, \gamma_0, h)[\sin \alpha_0 x + \sin \alpha_0 (x - a)] +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + e^{\alpha_n a}}{A_n D_n} f_0(i\gamma_n, h) e^{-\alpha_n x} \Big\} \cos(kz - \omega t)$$

при $0 \leqslant x \leqslant a$

$$\zeta(x, z, t) = 2\varepsilon\beta \frac{\pi}{a} \Big\{ \frac{a f_0(b, h)}{2\pi L(b)} \sin \frac{\pi}{a} x + f_1(\alpha_*, \gamma_*, h) \sin \alpha_* x + f_1(\alpha_0, \gamma_0, h) \times$$
$$\times \sin \alpha_0 x + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_0(i\gamma_n, h)}{A_n D_n} [e^{\alpha_n (x-a)} + e^{-\alpha_n x}] \Big\} \cos(kz - \omega t)$$

при $-l < x < 0$

$$\zeta(x, z, t) = \varepsilon\beta \frac{\pi}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + e^{-\alpha_n a}}{A_n D_n} f_0(i\gamma_n, h) e^{\alpha_n x} \cos(kz - \omega t)$$

$$f_1(\alpha, \gamma, y) = \frac{f_0(\gamma, y)}{\alpha \delta(\gamma)} \left[\alpha^2 - \frac{\pi^2}{a^2} \right]^{-1}, \quad \delta(\gamma) = \frac{dL(\gamma)}{d\alpha} \alpha^{-1}$$

$$b = \left(k^2 + \frac{\pi^2}{a^2} \right)^{1/2}, \quad f_0(\gamma, y) = \frac{\chi_1}{\gamma} [\gamma \operatorname{ch} \gamma (h - y) - \beta \operatorname{sh} \gamma (h - y)]$$

$$\alpha_* = (\gamma_*^2 - k^2)^{1/2}, \quad \alpha_0 = (\gamma_0^2 - k^2)^{1/2}, \quad \alpha_n = (\gamma_n^2 + k^2)^{1/2}$$

$$A_n = \alpha_n \delta(i\gamma_n), \quad D_n = \alpha_n^2 + \frac{\pi^2}{a^2}$$

($\pm\gamma_*, \pm\gamma_0, \pm i\gamma_n$ — корни уравнения $L(\gamma) = 0$).

Выражения для возмущений поверхности раздела в данном случае могут быть получены из формул, определяющих возмущения свободной поверхности в соответствующих областях, заменой $\beta f_1(\alpha, \gamma, h)$ и $\beta f_0(\gamma, h)$ на $\chi_1 f_2(\alpha, \gamma, 0) - \chi f_1(\alpha, \gamma, 0)$ и $\chi_1 R_0(\gamma, 0) - \chi f_0(\gamma, 0)$ соответственно.

Здесь $f_2(\alpha, \gamma, 0)$ получается из $f_1(\alpha, \gamma, y)$, если вместо $f_0(\gamma, y)$ взять $R_0(\gamma, y)$ и y положить равным нулю, а

$$R_0(\gamma, y) = [\gamma(\beta + \chi) \operatorname{ch} \gamma h - (\gamma^2 + \beta\chi) \operatorname{sh} \gamma h] \operatorname{ch} \gamma y +$$
$$+ \chi_1 (\beta \operatorname{ch} \gamma h - \gamma \operatorname{sh} \gamma h) \operatorname{sh} \gamma y$$

Возвышения свободной поверхности ζ и поверхности раздела ζ_1 в случае двухслойной жидкости и возвышения свободной поверхности для однородной жидкости ζ_* (т. е. при $\rho_1 \to \rho$) вдоль x, вычисленные для значений параметров $\varepsilon = 0.2$ *м*, $H = 2.0$ *м*, $l = 6.0$ *м*, $h = 0.1$ *м*, $\rho = 1000.0$ *кг / м*^{3}, $a = 2$ *м*, $\omega = 4.34$ *сек*$^{-4}$, $k = 1.0$ *м*$^{-1}$, $\rho_1 = 1025.0$ *кг / м*^{3}, приведены ниже (все величины — в метрах)

$x =$	-3	-1	1	3	5
$\zeta =$	0.0009	0.0053	0.0297	0.0210	0.0174
$\zeta_1 =$	0.0017	0.0108	0.0591	0.0418	0.0339
$\zeta_* =$	0.0008	0.0049	0.0275	0.0194	0.0161

Таким образом, присутствие неоднородности влечет некоторое увеличение свободной поверхности жидкости (в рассмотренном случае на 8%), а наличие на поверхности жидкости дока уменьшает амплитуду поверхностных и внутренних волн в области, находящейся между пластиной и колеблющимся участком дна. При этом амплитуды волн на поверхности раздела больше амплитуд соответствующих им волн на свободной поверхности.

Поступила 9 VII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черкесов Л. В.* Поверхностные и внутренние волны. Киев, «Наукова думка», 1973.
2. *Витюк В. Ф.* Волны, возникающие от возмущений дна бассейна при наличии дока. ПММ, 1972, т. 36, вып. 4.
3. *Стокер Дж. Дж.* Волны на воде. Математическая теория и приложения. М., Изд-во иностр. лит., 1959.