УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

А. В. Карапетян

(Москва)

Впервые вопрос об устойчивости движения неголономных систем был затронут Уиттекером [1] и в дальнейшем получил свое развитие в работах [2–7] и др. Наиболее общие результаты в исследовании устойчивости равновесия консервативных неголономных систем и выяснения влияния диссипативных сил на устойчивость последнего получены в [5].

В данной работе дается некоторое обобщение результатов [5].

1. Рассмотрим склерономную консервативную механическую систему, стесненную неголономными, линейными по скоростям связями. Обобщенные скорости $q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}$ будем считать связанными $m < n$ неинтегрируемыми соотношениями вида

$$q^{\cdot}_\alpha = \sum_i d_{\alpha i}(q)\, q^{\cdot}_i \tag{1.1}$$

Уравнения движения возьмем в форме Воронца

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial q^{\cdot}_i} &= \frac{\partial(\Theta+U)}{\partial q_i} + \sum_\alpha \frac{\partial(\Theta+U)}{\partial q_\alpha} d_{\alpha i} + \\ &+ \sum_\alpha \Theta_\alpha \sum_j q^{\cdot}_j \left[\frac{\partial d_{\alpha i}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{\alpha j}}{\partial q_i} + \sum_\beta \left(d_{\beta j}\frac{\partial d_{\alpha i}}{\partial q_\beta} - d_{\beta i}\frac{\partial d_{\alpha j}}{\partial q_\beta}\right)\right] \\ 2\Theta &= \sum_{ij} a_{ij}'(q)\, q_i^{\cdot} q_j^{\cdot}\end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь 2Θ и Θ_α — результаты исключения $q_\alpha^{\cdot}$ с помощью соотношений (1.1) из $2T$ и $\partial T/\partial q^{\cdot}_\alpha$ соответственно, где T — кинетическая энергия, U — силовая функция.

Рассмотрим произвольную точку

$$q_s = q_{s0}, \quad q_s^{\cdot} = 0 \tag{1.3}$$

многообразия равновесий

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} + \sum_\alpha \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} d_{\alpha i} = 0, \quad q_s^{\cdot} = 0 \tag{1.4}$$

системы (1.1), (1.2) (здесь и всюду далее, $i, j = 1, \ldots, n - m$; $\alpha, \beta = n - m + 1, \ldots, n$; $s = 1, \ldots, n$) и поставим вопрос об устойчивости равновесия (1.3)

2. В возмущенном движении положим [5]

$$q_i = q_{i0} + x_i, \quad q_\alpha = q_{\alpha 0} + x_\alpha + \sum_i d_{\alpha i}(q_{s0})\, x_i$$

Тогда уравнения возмущенного движения примут вид

$$\begin{aligned}x_\alpha^{\cdot} &= \sum_i d^*_{\alpha i}(x)\, x_i^{\cdot} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta^*}{\partial x_i^{\cdot}} &= \frac{\partial\Theta^*}{\partial x_i} + \sum_\alpha \frac{\partial\Theta^*}{\partial x_\alpha} d_{\alpha i} - \sum_j v_{ij}x_j + \sum_j p_{ij}x_j + \\ &+ \sum_\alpha w_{i\alpha}x_\alpha + Q_i(x) + \sum_\alpha \Theta_\alpha^* \sum_j x_j^{\cdot} v^*_{\alpha ij}\end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь

$$v_{ij} = v_{ji}, \quad p_{ij} = -p_{ji}$$

$$-v_{ij} + p_{ij} = \left\{\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_i} + \sum_\alpha \left(d_{\alpha j}\frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha \partial q_i} + d_{\alpha i}\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_\alpha}\right) + \right.$$

$$+\sum_{\alpha\beta} d_{\alpha i} d_{\beta j} \frac{\partial^2 U}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} + \sum_\alpha \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}\left(\frac{\partial d_{\alpha i}}{\partial q_j} + \sum_\beta d_{\beta j} \frac{\partial d_{\alpha i}}{\partial q_\beta}\right)\Big\}_0$$

$$X^*(x_i, x_\alpha, x_i^\cdot) = X\left(q_{i0} + x_i, q_{\alpha 0} + x_\alpha + \sum_i d_{\alpha i}(q_{s0}) x_i, x_i^\cdot\right), \quad X = d_{\alpha i}, \Theta, \Theta_\alpha, \nu_{\alpha ij}$$

$\nu_{\alpha ij}$ — выражения в квадратных скобках в (1.2), $Q_i(x)$ — функции, разложение которых по степеням x_s начинается с членов не ниже второго порядка, $\{\ldots\}_0$ означает, что выражение, стоящее в фигурных скобках, вычисляется в точке $q_s = q_{s0}$, $w_{i\alpha}$ — постоянные (также зависящие от q_{s0}), явный вид которых не выписан, поскольку они не войдут в условия устойчивости или неустойчивости, $d_{\alpha i}^*(0) = 0$ [5].

Заметим, что — $v_{ij} + p_{ij}$ совпадают с коэффициентами второй вариации силовой функции, вычисленной в q_{s0} с учетом (1.1).

Характеристическое уравнение системы первого приближения для (2.1) имеет вид

$$\lambda^m \det \| a_{ij}\lambda^2 + v_{ij} - p_{ij} \| = 0, \quad a_{ij} = a_{ij}'(q_{s0}) \tag{2.2}$$

и, следовательно, [3] вопрос об устойчивости решения (1.3) системы (1.1), (1.2) (или решения $x = x^\cdot = 0$ системы (2.1)) можно свести к исследованию корней уравнения

$$\det \| a_{ij}\lambda^2 + v_{ij} - p_{ij} \| = 0 \tag{2.3}$$

которое является характеристическим для системы

$$\sum_j a_{ij} y_j^{\cdot\cdot} + \sum_j v_{ij} y_j = \sum_j p_{ij} y_j \tag{2.4}$$

содержащей потенциальные и собственно-неконсервативные силы. Последних не будет, если все $p_{ij} = 0$, т. е. все

$$\left\{\sum_\alpha \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}\left(\frac{\partial d_{\alpha i}}{\partial q_j} + \sum_\beta d_{\beta j}\frac{\partial d_{\alpha i}}{\partial q_\beta}\right)\right\}_0 = \left\{\sum_\alpha \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}\left(\frac{\partial d_{\alpha j}}{\partial q_i} + \sum_\beta d_{\beta i}\frac{\partial d_{\alpha j}}{\partial q_\beta}\right)\right\}_0 \tag{2.5}$$

В этом случае вопрос об устойчивости равновесия неголономной системы решается довольно просто и в некотором смысле аналогично вопросу об устойчивости равновесия голономной системы.

3. *Теорема 3.1.* Если $2V = \Sigma v_{ij} x_i x_j$ имеет минимум в точке $x = 0$, то при условии (2.5) равновесие (1.3) системы (1.1), (1.2) устойчиво в первом приближении.

Доказательство. Рассмотрим

$$W = \Theta^* + V - \Sigma w_{i\beta} x_i x_\beta + \frac{1}{2} c \Sigma x_\beta^2$$

Если V имеет минимум, то, очевидно, всегда можно подобрать такое $c > 0$, что W определенно-положительна по $x_i^\cdot$, x_i, x_α. Рассмотрим полную производную от W по времени в силу (2.1) (где все $p_{ij} = 0$); после несложных преобразований получим, что $W^\cdot = \Sigma Q_j'(x) x_j^\cdot$, где разложение $Q_j'(x)$ по степеням x_s начинается с членов не ниже второго порядка, т. е. разложение $W^\cdot$ по степеням x_s, $x_i^\cdot$ — не ниже третьего порядка. Теорема 3.1 доказана.

Теорема 3.2. Если V не имеет минимума в $x = 0$ и может принимать отрицательные значения, то при условии (2.5) равновесие (1.3) системы (1.1), (1.2) неустойчиво.

Доказательство очевидно: уравнение (2.3) имеет корень в правой полуплоскости.

Теорема 3.3. При выполнении условий теоремы 3.1 добавление сколь угодно малых диссипативных сил с полной по $q_i^\cdot$ диссипацией делает устойчивое в первом приближении равновесие (1.3) системы (1.1), (1.2) устойчивым по Ляпунову.

При добавлении диссипативных сил правые части (1.2) и второй группы уравнений системы (2.1) следует дополнить членами — $\partial\Phi / \partial q_i^\cdot$ и — $\partial\Phi^* / \partial x_i^\cdot$ соответственно, где $2\Phi = \Sigma f_{ij}'(q)\, q_i^{\cdot} q_j^{\cdot}$ — результат исключения $q_\alpha^{\cdot}$ с помощью (1.1) из $2F = 2F(q_s, q_s^{\cdot})$ — диссипативной функции Релея

$$\Phi^*(x_i, x_\alpha, x_i^{\cdot}) = \Phi(q_{i0} + x_i,\ q_{\alpha 0} + x_\alpha + \sum_i d_{\alpha i}(q_{s0})\, x_i,\ x_i^{\cdot})$$

При этом уравнения (2.2) и (2.3) примут соответственно вид

$$\lambda^m \det \| a_{ij}\lambda^2 + v_{ij} - p_{ij} + f_{ij}\lambda \| = 0, \quad f_{ij} = f_{ij}'(q_{s0})$$

$$\det \| a_{ij}\lambda^2 + v_{ij} - p_{ij} + f_{ij}\lambda \| = 0 \tag{3.1}$$

Доказательство теоремы 3.3 теперь следует из теоремы М. А. Айзермана — Ф. Р. Гантмахера [3], так как все корни уравнения (3.1) при условиях теоремы 3.3 лежат в левой полуплоскости.

Теорема 3.4. Никакие диссипативные силы не могут стабилизировать неустойчивое при условиях теоремы 3.2 положение равновесия.

Доказательство очевидно.

Следствие 3.1. Теоремы 3.1—3.4 справедливы для неголономных систем с одной независимой скоростью ($n - m = 1$, так как при этом условие (2.5) заведомо выполнено).

Следствие 3.2. Если V имеет минимум и число независимых скоростей равно единице ($n - m = 1$), то равновесие (1.3) системы (1.1), (1.2) устойчиво в любом порядке.

Доказательство. Из доказательства теоремы 3.1 следует, что в этом случае

$$W^{\cdot} = Q_1'(x_1, x_\alpha)\, x_1^{\cdot} = [\varphi^{(2)}(x_1, x_\alpha) + \varphi^{(3)}(x_1, x_\alpha) + \ldots]\, x_1^{\cdot}$$

Очевидно, всегда существует функция $\psi^{(3)}(x_1, x_\alpha)$, такая, что $\varphi^{(2)} = \partial\psi^{(3)}/\partial x_1$. Рассмотрим $W_1 = W - \psi^{(3)}$; тогда

$$W_1^{\cdot} = W^{\cdot} - \frac{d\psi^{(3)}}{dt} = \varphi^{(2)} x_1^{\cdot} + [\varphi^{(3)} + \ldots]\, x_1^{\cdot} - x_1^{\cdot} \frac{\partial\psi^{(3)}}{\partial x_1} -$$

$$- \sum_\alpha d_{\alpha 1}^* x_1^{\cdot} \frac{\partial\psi^{(3)}}{\partial x_\alpha} = \left[\varphi^{(3)} - \sum_\alpha d_{\alpha 1}^* \frac{\partial\psi^{(3)}}{\partial x_\alpha} + \varphi^{(4)} + \ldots\right] x_1^{\cdot} =$$

$$= [\varphi_1^{(3)} + \varphi_1^{(4)} + \ldots]\, x_1^{\cdot}$$

Итак, $W_1^{\cdot}$ начинается с членов не ниже четвертого порядка; W_1 определенно-положительна по x_1, $x_1^{\cdot}$, x_α (так как определенно-положительна квадратичная часть W, и добавляется к W форма третьей степени). Аналогично можно получить, что функция $W_2 = W_1 - \psi_1^{(4)}$ ($\varphi_1^{(3)} = \partial\psi^{(4)} / \partial x_1$) определенно-положительна по x_1, $x_1^{\cdot}$, x_α, а разложение функции $W_2^{\cdot}$ начинается с членов пятого порядка и т. д. Следствие 3.2 доказано.

4. Рассмотрим теперь общий случай: не все $p_{ij} = 0$. Предположим сначала, что диссипативных сил нет.

Теорема 4.1. Если $\Sigma v_{ij} A_{ij} < 0$, где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы $\{a_{ij}\}$, то равновесие (1.3) системы (1.1), (1.2) неустойчиво.

Доказательство следует из следствия теоремы 9 работы [8].

Следствие 4.1. Если V имеет максимум в $x = 0$, то равновесие (1.3) системы (1.1), (1.2) неустойчиво.

Теорема 4.2. Если V имеет минимум, а все корни уравнения $\det \| \mu a_{ij} - v_{ij} \| = 0$ равны между собой, что равновесие (1.3) системы (1.1), (1.2) неустойчиво.

Доказательство следует из теоремы 4 работы [9].

Рассмотрим влияние диссипативных сил.

Теорема 4.3. Если V имеет минимум и $f_{ij} = h f_{ij}^{\circ}$, то при достаточно большом h равновесие (1.3) устойчиво.

Доказательство следует из теоремы 2 работы [10] и теоремы [3].

Замечание 4.1. Теорема 4.3 показывает, что неустойчивое при условиях теоремы 4.2 равновесие может быть стабилизировано надлежащим выбором диссипативных сил.

Теорема 4.4. Если V имеет максимум, то равновесие (1.3) нельзя стабилизировать никакими диссипативными силами.

Доказательство следует из теоремы 1 работы [9].

Замечание 4.2. Неустойчивое при условиях теоремы 4.1 равновесие может быть стабилизировано надлежащим выбором диссипативных сил.

Пример 4.1

$$n - m = 2;\ a_{11} = a_{22} = 1,\ a_{12} = 0;\ v_{11} = 1,\ v_{22} = -2,\ v_{12} = 0$$

$$p_{12} = -p_{21} = {}^3/_2,\ f_{11} = 1,\ f_{22} = 3,\ f_{12} = 0$$

Уравнение (3.1) в данном случае принимает вид

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + \lambda + 1 & {}^3/_2 \\ -{}^3/_2 & \lambda^2 + 3\lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

Все корни этого уравнения лежат в левой полуплоскости, что следует из критерия Гурвица.

5. *Замечание 5.1.* Полученные результаты показывают, что вопрос об устойчивости равновесия неголономной системы можно свести при некоторых условиях к исследованию функции V, которую можно трактовать как потенциальную энергию «приведенной» системы (2.4) и которая совпадает с квадратичной частью функции — U^* работы [5], если только обе части условия (2.5) обращаются в нуль (для всех i, j).

Если не ограничиваться сведением задачи устойчивости равновесия неголономной системы только к исследованию поведения функции V, то можно легко доказать следующее утверждение

Теорема 5.1. Если $\det \| v_{ij} - p_{ij} \| < 0$, то равновесие (1.3) неустойчиво как при действии диссипативных сил, так и при их отсутствии.

Действительно, при условии теоремы 5.1 свободный член характеристического уравнения (3.1) отрицателен и, следовательно, оно имеет по крайней мере один положительный корень (как при $f_{ij} = 0$, так и при $f_{ij} \neq 0$).

Замечание 5.2. Поскольку $(q_{s0}, 0)$ — произвольная точка многообразия равновесий (1.4), то полученные результаты позволяют исследовать устойчивость всех положений равновесия неголономной системы (действительно, v_{ij}, p_{ij} и a_{ij} зависят от q_{s0}).

Если первая группа уравнений многообразия равновесий (1.4) может быть представлена в виде

$$q_{s0} = z_s(u), \quad u = \{u_1, \ldots, u_l\} \quad (l \geqslant m) \tag{5.1}$$

где u — параметры поверхности (1.4) [4], то, подставляя (5.1) в выражения для v_{ij}, p_{ij} и a_{ij} и применяя полученные результаты, можно выделить на поверхности (5.1) области устойчивых или неустойчивых положений равновесия.

6. *Замечание 6.1.* Наличие линейных членов в разложении силовой функции U в окрестности точки q_{s0} $(\{\partial U / dq_\alpha\}_0 \neq 0)$ и, следовательно, в интеграле энергии не позволило найти каких-либо достаточных условий устойчивости по Ляпунову равновесия консерватиной (диссипативных сил нет) системы. Однако последнее возможно.

Пример 6.1. Рассмотрим неголономную систему $(n = 3,\ m = 1)$, представляющую частный случай примера Боттема [2] и определенную кинетической энергией $2T = x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2} + z^{\cdot 2}$, силовой функцией $U = z + {}^1/_2 (ax^2 + by^2)$ и неинтегрируемой связью

$$z^\cdot = cyx^\cdot \tag{6.1}$$

Очевидно, многообразие (1.4) имеет в данном случае вид

$$x = y = 0,\ z = u;\ x^\cdot = y^\cdot = z^\cdot = 0;\ u \text{ — произвольно.} \tag{6.2}$$

В окрестности произвольной точки многообразия (6.2) уравнения Воронца для указанной системы имеют вид

(6.3) $$x^{\cdot\cdot}(1+c^2y^2)+c^2yy^{\cdot}x^{\cdot}-ax=cy,\quad y^{\cdot\cdot}-by=0$$

Вычисляя $\delta^2 U$ в точках (6.2), получим

$$v_{ij}=\begin{Vmatrix}-a & -c/2\\ -c/2 & -b\end{Vmatrix},\quad p_{ij}=\begin{Vmatrix}0 & c/2\\ -c/2 & 0\end{Vmatrix};\quad a_{ij}=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix}$$

Тогда по теореме 4.1 имеем, что равновесия (6.2) неустойчивы при $-a-b<0$, т. е. при $a+b>0$; а по теореме 5.1— неустойчивы при $ab<0$; т. е. устойчивость возможна лишь при $a<0,\ b<0$.

Пусть $a=-\omega^2,\ b=-\Omega^2$.

Рассмотрим произвольное возмущенное движение системы (6.1), (6.3); оно будет удовлетворять условиям

(6.4) $$y=y_0\cos\Omega t+y_0^{\cdot}\sin\Omega t=A\sin(\Omega t+\varphi)$$

(6.5) $$x^{\cdot\cdot}[1+A^2c^2\sin^2(\Omega t+\varphi)]+A^2c^2\sin(\Omega t+\varphi)\cos(\Omega t+\varphi)x^{\cdot}+$$
$$+\omega^2x=A\,c\sin(\Omega t+\varphi)$$

(6.6) $$z^{\cdot}=A\,c\sin(\Omega t+\varphi)\,x^{\cdot}$$

Здесь A и φ выражаются через y_0 и $y_0^{\cdot}$; и при малых y_0, $y_0^{\cdot}$ мало и A.

Можно показать, что нулевое решение однородного уравнения, соответствующего (6.5), устойчиво при достаточно малом A и условии (по критерию Ляпунова)

(6.7) $$\pi^2\omega^2<\Omega^2$$

а неоднородное имеет единственное периодическое решение, амплитуда которого мала вместе с A; следовательно, общее решение уравнения (6.5) мало при достаточно малых y_0, $y_0^{\cdot}$, x_0, $x_0^{\cdot}$ и условии (6.7). Тогда при этом малы и $z^{\cdot}$, что следует из (6.6), и $z-u$, что следует из существования интеграла энергии

$$x^{\cdot 2}+y^{\cdot 2}+z^{\cdot 2}+\omega^2x^2+\Omega^2y^2+2(u-z)=2h$$

и малости $x^{\cdot}$, $y^{\cdot}$, $z^{\cdot}$, x, y и h при малых начальных возмущениях. Следовательно, любое решение (6.2) системы (6.1), (6.3) устойчиво при условии $b<\pi^2a<0$.

В случае $b<0,\ a<0,\ b>\pi^2a$ вопрос остается открытым.

Исследование линейной системы показывает, что при этом любое равновесие (6.2) устойчиво в первом приближении, если $a\neq b$, и неустойчиво в первом приближении в противном случае.

7. *Пример 7.1.* Рассмотрим систему, состоящую из трех шероховатых однородных цилиндров: два одинаковых цилиндра радиуса r и массы m катаются по наклонной плоскости, а третий цилиндр, радиуса R и массы M, катается по этим цилиндрам. Введем на наклонной плоскости неподвижные координаты: ось x параллельна горизонтальной плоскости, ось y перпендикулярна к ней и направлена вверх по наклонной плоскости. Обозначим через α угол наклона плоскости, а через β и γ — углы, которые составляют оси нижних цилиндров с осью x ($\beta\neq\gamma$).

Введем обобщенные координаты: углы φ, φ_1, φ_2 — собственного вращения верхнего и двух нижних цилиндров соответственно, угол θ между осью x и осью верхнего цилиндра, и координаты x и y центра масс верхнего цилиндра. Шесть обобщенных координат связаны четырьмя неинтегрируемыми соотношениями [4], которые можно привести к виду

$$x^{\cdot}=R\varphi^{\cdot}\sin\theta+\theta^{\cdot}[r(\varphi_1\sin\gamma-\varphi_2\sin\beta)/\sin(\gamma-\beta)-y]$$
$$y^{\cdot}=-R\varphi^{\cdot}\cos\theta-\theta^{\cdot}[r(\varphi_1\cos\gamma-\varphi_2\cos\beta)/\sin(\gamma-\beta)-x]$$
$$\varphi_1^{\cdot}=-\theta^{\cdot}\{r[\varphi_1\sin(\theta-\gamma)-\varphi_2\sin(\theta-\beta)]/\sin(\gamma-\beta)-x\sin\theta+$$
$$+y\cos\theta\}/[2r\sin(\theta-\beta)]$$
$$\varphi_2^{\cdot}=-\theta^{\cdot}\{r[\varphi_1\sin(\theta-\gamma)-\varphi_2\sin(\theta-\beta)]/\sin(\gamma-\beta)-x\sin\theta+$$
$$+y\cos\theta\}/[2r\sin(\theta-\gamma)]$$

Силовая функция системы (с точностью до постоянной)

$$U = -Mgy \sin\alpha - mgr(\varphi_1 \cos\beta + \varphi_2 \cos\gamma)\sin\alpha$$

Многообразие равновесий (1.4) имеет в данном примере вид

$$\theta = \pi / 2, \ \ x = r(\varphi_1 \cos\gamma - \varphi_2 \cos\beta) / \sin(\gamma - \beta)$$

$$\varphi, \varphi_1, \varphi_2, y \text{ — произвольны;} \quad \varphi^\cdot = \varphi_1^\cdot = \varphi_2^\cdot = \theta^\cdot = x^\cdot = y^\cdot = 0$$

Любая точка этого многообразия представляет неустойчивое (как при действии диссипативных сил, так и при их отсутствии) положение равновесия, что следует из теоремы 5.1

$$\det\|v_{ij} - p_{ij}\| = -M(M+m)R^2g^2\sin^2\alpha < 0$$

В заключение автор благодарит В. В. Румянцева, под руководством которого была выполнена работа.

Поступила 4 XI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика. М.—Л., Гостехиздат, 1937.
2. *Bottema O.* On the small Vibration of nonholonomic systems. Indag. Math., 1949, vol. 11, f. 4.
3. *Aiserman M. A., Gantmacher F. R.* Stabilität der Gleichgewichtslage in einem nicht-holonomen System. ZAMM, 1957, Bd. 37, Hft 1/2.
4. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М., «Наука», 1967.
5. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения неголономных систем. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
6. *Николенко И. В.* О влиянии неголономных связей на характер равновесия системы. Прикл. механика, 1965, т. 1, вып. 10.
7. *Николенко И. В.* Об устойчивости равновесия неголономных систем П.В. Воронца. Укр. матем. ж., 1968, т. 20, № 1.
8. *Лахаданов В. М.* О влиянии структуры сил на устойчивость движения. ПММ, 1974, т. 38, вып. 2.
9. *Агафонов С. А.* Об устойчивости неконсервативных систем. Вестн. Моск. ун-та, сер. матем., механ., 1972, № 4.
10. *Карапетян А. В.* Об устойчивости неконсервативных систем. Вестн. Моск. ун-та, сер. матем., механ., 1975, № 4.

УДК 532.593

ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ДОКА

В. Ф. Витюк

(Одесса)

Исследуется распространение волн в двухслойной жидкости, вызываемых колебаниями участка дна бассейна, при наличии дока. Волновые движения неоднородной жидкости, генерируемые смещением участка дна бассейна, изучены в работе [1]. При этом поверхность верхнего слоя жидкости предполагалась либо вся свободной, либо полностью покрытой льдом. Ниже методом работы [2] рассматривается аналогичная задача в предположении, что только часть свободной поверхности жидкости покрыта неподвижной жесткой пластиной. Полученные выражения потенциала скорости используются для определения вида свободной поверхности и поверхности раздела. Показано, что присутствие неоднородности увеличивает амплитуду волн на свободной