УДК 531.31

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СИЛ РЕАКЦИИ СВЯЗЕЙ

До Шань

(Ханой)

Уравнения движения механических систем с множителями приводятся к виду, позволяющему разделить эти уравнения на две группы: первая группа описывает движения системы, а вторая определяет множители. Каждый множитель определяется независимо один от другого и, следовательно, легко оценить динамическое влияние каждой связи на систему. На основании этого подхода рассматриваются следующие вопросы: определение реакции связей [1], исследование движения управляемых систем с условными связями [2, 3], использование метода неголономных механических систем в случае, когда существуют первые интегралы [4].

1. Уравнения движения системы с множителями. Рассмотрим систему, положение которой определено обобщенными координатами q_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Предположим, что на систему наложены идеальные неголономные нелинейные связи второго порядка вида

$$f_\alpha (t, q_i, q_i^{\cdot}, q_i^{\cdot\cdot}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \Delta \tag{1.1}$$

Здесь

$$D(f_1, f_2, \ldots, f_s) / D(\ddot{q}_{p+1}, \ldots, q_n^{\cdot\cdot}) \neq 0, \quad p = n - s \tag{1.2}$$

Уравнения движения системы можно записать в виде [5]

$$\frac{\partial S}{\partial q_i^{\cdot\cdot}} = Q_i + \sum_{\alpha=1}^{s} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i^{\cdot\cdot}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1.3}$$

где λ_α — неопределенные множители, характеризующие динамические действия связей на механическую систему. Непосредственное использование уравнений (1.3) для определения множителей λ_α оказывается неудобным. Поэтому преобразуем их путем введения новых переменных $q_1^{\cdot\cdot}, q_2^{\cdot\cdot}, \ldots, q_p^{\cdot\cdot}, u_1^{\cdot\cdot}, u_2^{\cdot\cdot}, \ldots, u_s^{\cdot\cdot}$ вместо $q_1^{\cdot\cdot}, q_2^{\cdot\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot\cdot}$. Здесь $u_\alpha^{\cdot\cdot} = f_\alpha (t, q_i, q_i^{\cdot}, q_i^{\cdot\cdot})$.

Учитывая условие (1.2), имеем

$$q_h^{\cdot\cdot} = q_h^{\cdot\cdot} (t, q_i\, q_i^{\cdot}, q_\nu^{\cdot\cdot}, u_\alpha^{\cdot\cdot}), \quad h = p + 1, \ldots, n; \quad \nu = 1, 2, \ldots, p; \quad \alpha = 1, 2, \ldots, s$$

Таким образом, новые переменные могут быть выражены через старые и наоборот. Заметим, что теперь уравнения связей (1.1) принимают вид

$$u_\alpha^{\cdot\cdot} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, s$$

В новых переменных уравнения движения системы можно записать в следующем виде [5]:

$$\frac{\partial S^\circ}{\partial q_\nu^{\cdot\cdot}} = Q_\nu + \sum_{h=p+1}^{n} Q_h \frac{\partial q_h^{\cdot\cdot\circ}}{\partial q_\nu^{\cdot\cdot}}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \quad p = n - s \tag{1.4}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial u_\alpha^{\cdot\cdot}}\right)^\circ = \sum_{h=p+1}^{n} Q_h \left(\frac{\partial q_h^{\cdot\cdot}}{\partial u_\alpha^{\cdot\cdot}}\right)^\circ + \lambda_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, s \tag{1.5}$$

$$S = S(t, q_i, q_i^{\cdot}, q_\nu^{\cdot\cdot}, u_\alpha^{\cdot\cdot}), \quad \Phi^\circ = \Phi \big|_{\sum u_\alpha^{\cdot\cdot 2} = 0}$$

Первая группа уравнений (1.4) описывает движение системы, вторая группа (1.5) позволяет определить множители, причем каждый множитель определяется независимо один от другого.

Замечания. 1°. Приведенные уравнения, очевидно, применимы для систем с обычными неголономными связями первого порядка.

2°. Так как для голономных систем уравнения связей имеют вид

$$F_\alpha(t, q_i)=0, \quad i=1, 2, \ldots, n; \quad \alpha=1, 2, \ldots, s$$

то введем следующие переменные: $q_1, q_2, \ldots, q_p, u_1, u_2, \ldots, u_s$, причем $u_\alpha = F_\alpha(t, q_i)$. Уравнения (1.4) и (1.5) примут вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^\circ}{\partial q_\nu^\cdot}-\frac{\partial T^\circ}{\partial q_\nu}=Q_\nu^\circ+\sum_{h=p+1}^{n} Q_h^\circ \frac{\partial q_h^\circ}{\partial q_\nu}, \quad \nu=1, 2, \ldots, \quad p=n-s \tag{1.6}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u_\alpha^\cdot}\right)^\circ-\left(\frac{\partial T}{\partial u_\alpha}\right)^\circ=\sum_{h=p+1}^{n} Q_h^\circ\left(\frac{\partial q_h}{\partial u_\alpha}\right)^\circ+\lambda_\alpha, \quad \alpha=1, 2, \ldots, s \tag{1.7}$$

$$T=T(t, q_\nu, q_\nu^\cdot, u_\alpha, u_\alpha^\cdot), \quad \Phi^\circ=\Phi\Big|_{\sum u_\alpha^{\cdot 2}=\sum u_\alpha^2=0}$$

Пример 1. Рассмотрим движение автомобиля по упрощенной схеме (см. [6]). Следуя [6], выражение для энергии ускорения запишем в виде

$$2S=M(x_c^{\cdot\cdot 2}+y_c^{\cdot\cdot 2})+J_c\varphi^{\cdot\cdot 2}+\ldots$$

где невыписанные члены не содержат $x_c^{\cdot\cdot}, y_c^{\cdot\cdot}, \varphi^{\cdot\cdot}$.

Отнесенные к обобщенным координатам x_c, y_c и φ обобщенные силы таковы [6]: $Q=F\cos\varphi$, $Q_2=F\sin\varphi$, $Q_3=0$.

Введем переменные φ, u_1, u_2, причем ($u_1^\cdot=0$, $u_2^\cdot=0$ — уравнения неголономных связей [6])

$$u_1^\cdot=x_c^\cdot\sin\varphi-y_c^\cdot\cos\varphi+b\varphi^\cdot, \quad u_2^\cdot=x_c^\cdot\sin(\varphi+\theta)-y_c^\cdot\cos(\varphi+\theta)-$$
$$-a\cos\theta\,\varphi^\cdot$$

Дифференцируя эти соотношения по времени и решая полученные уравнения относительно $x_c^{\cdot\cdot}$, $y_c^{\cdot\cdot}$, имеем

$$x_c^{\cdot\cdot}=\frac{1}{\sin\theta}[A\cos(\varphi+\theta)+B\cos\varphi], \quad y_c^{\cdot\cdot}= \tag{1.8}$$
$$=\frac{1}{\sin\theta}[B\sin\varphi+A\sin(\varphi+\theta)], \quad A=b\varphi^{\cdot\cdot}-u_1^{\cdot\cdot}+l\operatorname{ctg}\theta\,\varphi^{\cdot 2}$$
$$B=u_2^{\cdot\cdot}+a\cos\theta\,\varphi^{\cdot\cdot}-\frac{l\cos^2\theta+b\sin^2\theta}{\sin\theta}\varphi^{\cdot 2}-\frac{l}{\sin\theta}\varphi\theta^{\cdot\cdot}; \quad l=a+b$$

Пользуясь уравнением (1.4), получим уравнение движения системы

$$J_c\varphi^{\cdot\cdot}+\frac{M}{\sin\theta}\{x_c^{\cdot\cdot}[b\cos(\varphi+\theta)+a\cos\theta\cos\varphi]+ \tag{1.9}$$
$$+y_c^{\cdot\cdot}[a\cos\theta\sin\varphi+b\sin(\varphi+\theta)]\}=0$$

Для определения динамических действий связей используем уравнения (1.5), получим

$$\frac{M}{\sin\theta}[x_c^{\cdot\cdot}\cos(\varphi+\theta)+y_c^{\cdot\cdot}\sin(\varphi+\theta)]=F\operatorname{ctg}\theta-\lambda_1 \tag{1.10}$$
$$M/\sin\theta\,(x_c^{\cdot\cdot}\cos\varphi+y_c^{\cdot\cdot}\sin\varphi)=F+\lambda_2$$

В уравнениях (1.8), (1.10) $x_c^{\cdot\cdot}$, $y_c^{\cdot\cdot}$ должны заменяться выражениями (1.8). После простых преобразований получим выражения для $\varphi^{\cdot\cdot}$, λ_1, λ_2, совпадающие с приведенными в [6].

2. О движении управляемых механических систем с условными связями. Допустим, что на управляемую механическую систему наложены действительные идеальные связи (2.1) и условные связи [2,3] (2.2)

$$(2.1)\qquad f_\alpha(t, q_i, \dot q_i, \ddot q_i, \xi_j) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad \alpha = 1, 2, \ldots, s; \quad j = 1, 2, \ldots, k$$

$$(2.2)\qquad g_\beta(t, q_i, \dot q_i, \ddot q_i, \xi_j) = 0, \quad \beta = 1, 2, \ldots, r$$

где ξ_j — параметры управления системы.

Кроме того, предположим, что

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_s, g_1, g_2, \ldots, g_r)}{D(\ddot q_{p+1}, \ddot q_{p+2}, \ldots, \ddot q_n)} \neq 0, \quad p = n - (s + r)$$

Условные связи можно рассматривать как такие связи, реакции которых равны нулю.

Определим реакции условных связей, а затем приравняем их нулю. Введем следующие переменные: $q_1^{\cdot\cdot}, q_2^{\cdot\cdot}, \ldots, q_p^{\cdot\cdot}, u_1^{\cdot\cdot}, u_2^{\cdot\cdot}, \ldots, u_s^{\cdot\cdot}, v_1^{\cdot\cdot}, v_2^{\cdot\cdot}, \ldots, v_r^{\cdot\cdot}$, причем

$$u_\alpha^{\cdot\cdot} = f_\alpha(t, q_i, \dot q_i, \ddot q_i, \xi_j), \quad v^{\cdot\cdot}{}_\beta = g_\beta(t, q_i, \dot q_i, \ddot q_i, \xi_j),$$
$$\alpha = 1, 2, \ldots, s; \quad \beta = 1, 2, \ldots, r$$

Пользуясь уравнениями (1.1), получим динамические условия

$$(2.3)\qquad \left(\frac{\partial S}{\partial v_\beta^{\cdot\cdot}}\right) = \sum_{h=p+1}^{n} Q_h \left(\frac{\partial q_h^{\cdot\cdot}}{\partial v_\beta^{\cdot\cdot}}\right)^\circ, \quad \beta = 1, 2, \ldots, r$$

Уравнения движения приведенной системы теперь имеют вид.

$$(2.4)\qquad \frac{\partial S^\circ}{\partial q_\nu^{\cdot\cdot}} = Q_\nu + \sum_{h=p+1}^{n} Q_h \frac{\partial q_h^{\cdot\cdot\circ}}{\partial q_\nu^{\cdot\cdot}}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, p$$

и уравнения для определения реакций действительных связей будут

$$(2.5)\qquad \left(\frac{\partial S}{\partial u_\alpha^{\cdot\cdot}}\right)^\circ = \sum_{h=p+1}^{n} Q_h \left(\frac{\partial q_h^{\cdot\cdot}}{\partial u_\alpha^{\cdot\cdot}}\right)^\circ + \lambda_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, s$$

Таким образом, движение управляемой системы с условными связями полностью описывается уравнениями (2.3) и (2.4). Уравнения (2.4) представляют собой уравнения движения рассматриваемой системы в предположении, что условные связи считают действительными связями, а уравнения (2.3) описывают условия, которые позволяют привести условные связи к действительным. Уравнения (2.5) позволяют определить реакции действительных связей. Так, если приведенная система имеет p степеней свободы, то число уравнений, описывающих движения системы, будет $p + r$ (r — число уравнений условных связей).

Уравнения (2.1), (2.3) и (2.4) теперь образуют полную систему уравнений рассматриваемой задачи движения управляемой механической системы с условными связями.

Замечание. Если на голономные механические системы наложены условные голономные связи (2.6) и действительные голономные связи (2.7)

$$(2.6)\qquad g_\beta(t, q_i, \xi_j) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad \beta = 1, 2, \ldots, r; \quad j = 1, 2, \ldots, k$$

$$(2.7)\qquad f_\alpha(t, q_i, \xi_j) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, s$$

то вместо переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n$ введем переменные $q_1, q_2, \ldots, q_p, u_1, u_2, \ldots, u_s, v_1, v_2, \ldots, v_r$, причем

$$u_\alpha = f_\alpha(t, q_i, \xi_j), \quad v_\beta = g_\beta(t, q_i, \xi_j)$$

Тогда динамические условия примут вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot v_\beta}\right)^\circ - \left(\frac{\partial T}{\partial v_\beta}\right)^\circ = \sum_{h=p+1}^{n} Q_h^\circ \left(\frac{\partial q_h}{\partial v_\beta}\right)^\circ, \quad \beta = 1, 2, \ldots, r$$

и уравнения движения системы будут

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^\circ}{\partial q_\nu^{\cdot}} - \frac{\partial T^\circ}{\partial q_\nu} = Q_\nu^\circ + \sum_{h=p+1}^{n} Q_h^\circ \frac{\partial q_h^\circ}{\partial q_\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, p$$

а уравнения реакций действительных связей имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^\circ}{\partial u_\alpha^{\cdot}}\right)^\circ - \left(\frac{\partial T^\circ}{\partial u_\alpha}\right)^\circ = \sum_{h=p+1}^{n} Q_h^\circ \left(\frac{\partial q_h}{\partial u_\alpha}\right)^\circ, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, s$$

Пример 2. Задача Аппеля [2,3]. Материальная плоскость P может скользить поступательно по неподвижной горизонтальной плоскости Oxy. По плоскости P может катиться без скольжения шар радиуса R. Движение плоскости P автоматически регулируется таким образом, что центр шара равномерно вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью ω.

Составим уравнения задачи.

Обозначим через ξ, η координаты центра шара, через p, q, r — компоненты мгновенной угловой скорости шара, через u, v — координаты какой-либо точки плоскости. Тогда энергия ускорения шара

$$2S = M(\xi^{\cdot\cdot 2} + \eta^{\cdot\cdot 2}) + {}^2/_5 MR^2(p^{\cdot 2} + q^{\cdot 2} + r^{\cdot 2})$$

Уравнения действительных связей $\xi^{\cdot} - qR - u^{\cdot} = 0$, $\eta^{\cdot} + pR - v^{\cdot} = 0$, а уравнения условных связей $\xi^{\cdot} + \omega\eta = 0$, $\eta^{\cdot} - \omega\xi = 0$.

Вводя переменные r, u_1, u_2, v_1, v_2, в которых

$$u_1^{\cdot} = \xi^{\cdot} - qR - u^{\cdot}, \quad u_2^{\cdot} = \eta^{\cdot} + pR - v^{\cdot}, \quad v_1^{\cdot} = \xi^{\cdot} + \omega\eta, \quad v_2^{\cdot} = \eta^{\cdot} - \omega\xi$$

найдем

$$\xi^{\cdot\cdot} = v_1^{\cdot\cdot} - \omega v_2^{\cdot} - \omega^2\xi, \quad \eta^{\cdot\cdot} = v_2^{\cdot\cdot} + \omega v_1^{\cdot} - \omega^2\eta$$

$$q^{\cdot} = \frac{1}{R}(v_1^{\cdot\cdot} - u_1^{\cdot\cdot} - \omega v_r^{\cdot} - \omega^2\xi - u^{\cdot\cdot}), \; p^{\cdot} = \frac{1}{R}(u_2^{\cdot\cdot} - v_2^{\cdot\cdot} + \omega v_1^{\cdot} + \omega^2\eta + v^{\cdot\cdot})$$

и энергия ускорения примет вид

$$\begin{aligned} 2S = {} & M[(v_1^{\cdot\cdot} - \omega v_2^{\cdot} - \omega^2\xi)^2 + (v_2^{\cdot\cdot} + \omega v_1^{\cdot} - \omega^2\eta)^2] + \\ & + {}^2/_5 M[(v_1^{\cdot\cdot} - u_1^{\cdot\cdot} - \omega v_2^{\cdot} - \omega^2\xi - u^{\cdot\cdot})^2 + (u_2^{\cdot\cdot} - v_2^{\cdot\cdot} - \omega v_1^{\cdot} + \omega^2\eta + v^{\cdot\cdot})^2 + \\ & + R^2 r^2] \end{aligned}$$

Отнесенные к обобщенным координатам обобщенные силы равны нулю. Согласно уравнениям (2.3), динамические условия таковы

$$7\omega^2\xi + 2u^{\cdot\cdot} = 0, \quad 3\omega^2\eta - 2v^{\cdot\cdot} = 0$$

а из уравнения (2.4) получим уравнения движения приведенной системы: $r^{\cdot} = 0$.

Для определения реакций действительных связей используем уравнения (2.5), получим ${}^2/_5 MRq^{\cdot} = -\lambda_1$, ${}^2/_5 MRp^{\cdot} = \lambda_2$.

Нетрудно показать, что динамические условия можно записать в виде

$$-5\omega^2\xi + 2Rq^{\cdot} = 0, \quad 2Rp^{\cdot} - 5\omega^2\eta = 0$$

Таким образом, система уравнений (2.6) имеет такой же порядок, что и система уравнений (2.7) [3].

3. Рассмотрим случай, когда интегралы динамических уравнений считаются условиями неголономных связей [3].

Предположим, что известны некоторые первые интегралы движения системы. Возникает вопрос, можно ли считать эти интегралы уравнениями неголономных связей, налагаемых на рассматриваемую систему и как использовать их для составления уравнений. На основании полученных в п. 2 результатов эта задача решается просто, так как первые интегралы — это частные случаи условных связей. Иначе говоря, можно рассматривать первые интегралы как уравнения неголономных связей.

Пусть движение системы подчинено неголономной связи (1.1) и имеет первые интегралы

(3.1) $$g_\beta(t, q_i, q_i^{\cdot}) = C_\beta = \text{const}, \quad \beta = 1, 2, \ldots, r$$

Уравнения движения системы со связями (1.1) будут

(3.2) $$\frac{\partial S}{\partial q_i^{\cdot\cdot}} = Q_i + Q_i^*, \quad Q_i^* = \sum_{\alpha=1}^{s} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i^{\cdot\cdot}}$$

где Q_i^* — обобщенные силы реакций связей. Очевидно, что уравнения (3.2) тоже имеют первые интегралы (3.1). Теперь принимаем их за новые связи и определяем соответствующие множители Лагранжа. Как и ранее, введем переменные

$$v_\beta^{\cdot\cdot} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_\beta}{\partial q_i^{\cdot}} q_i^{\cdot\cdot} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_\beta}{\partial q_i} q_i^{\cdot} + \frac{\partial g_\beta}{\partial t}$$

Используя уравнения (1.5) и замечая, что

$$\frac{\partial S}{\partial v_\beta^{\cdot\cdot}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial q_i^{\cdot\cdot}} \frac{\partial q_i^{\cdot\cdot}}{\partial v_\beta^{\cdot\cdot}}$$

найдем соответствующие «новым связям» множители μ_β

$$\mu_\beta = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial S}{\partial q_i^{\cdot\cdot}} - Q_i - Q_i^* \right)^\circ \left(\frac{\partial v_\beta^{\cdot\cdot}}{\partial q_i^{\cdot\cdot}} \right)^\circ$$

Но вдоль траектории движения имеем (3.2) и, следовательно

$$\mu_\beta = 0, \quad \beta = 1, 2, \ldots, r$$

Пример 3. Рассмотрим случай голономной склерономной системы с циклическими координатами q_α ($\alpha = m + 1, \ldots, n$). Кинетическая энергия такой системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r, s=1}^{n} a_{rs}(q_1, q_2, \ldots, q_m) q_r^{\cdot} q_s^{\cdot}$$

Как известно, в этом случае существуют циклические интегралы

(3.3) $$p_\alpha = \partial T / \partial q_\alpha^{\cdot} = h_\alpha = \text{const}, \quad \alpha = m + 1, \ldots, n$$

Теперь можно считать циклические интегралы в качестве уравнений неголономных связей. Введем переменные $q_1^{\cdot}, q_2^{\cdot}, \ldots, q_m^{\cdot}, v_{m+1}^{\cdot}, v_{m+2}^{\cdot}, \ldots, v_n^{\cdot}$, где $v_\beta^{\cdot} = p_\beta - h_\beta$, $\beta = m + 1, \ldots, n$.

Сначала докажем, что динамические условия тождественно удовлетворяются. В данном случае эти условия имеют вид

$$\left(\frac{\partial S}{\partial v_\beta^{\cdot\cdot}} \right)^\circ = \sum_{\alpha=m+1}^{n} Q_\alpha \left(\frac{\partial q_\alpha^{\cdot\cdot}}{\partial v_\beta^{\cdot\cdot}} \right)^\circ$$

Нетрудно доказать, что

$$\left(\frac{\partial S}{\partial v_\beta^{\cdot\cdot}} \right)^\circ = \sum_{\alpha=m+1}^{n} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_\alpha^{\cdot}} \right)^\circ \left(\frac{\partial q_\alpha^{\cdot\cdot}}{\partial v_\beta^{\cdot\cdot}} \right)^\circ \equiv 0$$

Кроме того, $Q_\alpha \equiv 0$, так как q_α — циклические координаты. Следовательно, динамические условия тождественно выполнены и система приводима.

Согласно [7] из уравнений связей (3.3) получим

$$q_\alpha^{\cdot} = \sum_{i=1}^{m} B_{\alpha i} q_i^{\cdot} + B_\alpha, \; B_\alpha = \sum_{\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta} h_\beta, \; B_{\alpha i} = -\sum_{\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta} a_{\beta i} \tag{3.4}$$

$$\alpha, \; \beta = m+1, \ldots, n, \quad i = 1, \ldots, m$$

Для составлений уравнения движения приведенной системы используем уравнение Воронца [6] для циклических систем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^\circ}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial T^\circ}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \sum_{\alpha=m+1}^{n}\sum_{j=1}^{m} h_\alpha \left(\frac{\partial B_{\alpha j}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} B_{\alpha j}\right) - \tag{3.5}$$

$$- \sum_{\alpha=m+1}^{n} h_\alpha \frac{\partial B_\alpha}{\partial q_i}$$

Здесь [7]

$$T^\circ = T^* + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\,\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta} h_\alpha h_\beta, \qquad T^* = \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{m} a_{ij}^* q_i^{\cdot} q_j^{\cdot} \tag{3.6}$$

T^* — кинетическая энергия приведенной системы, а коэффициенты a_{ij}^* и $b_{\alpha\beta}$ определяются по [7].

Обозначим $L^* = T^* - V$, где V — обобщенный потенциал, определяемый равенством [7] (Π^* — потенциал Рауса)

$$V = \Pi^* + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=m+1}^{n}\sum_{j=1}^{m} B_{\alpha j} h_\alpha q_j^{\cdot}, \quad \Pi^* = \Pi + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\,\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta} h_\alpha h_\beta$$

Учитывая соотношения (3.4) и (3.6), уравнения (3.5) запишем в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial L^*}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

Таким образом, получили уравнения движения приведенной системы с обобщенной функцией Лагранжа [7].

Поступила 5 II 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
2. *Аппель П.* Теоретическая механика, т. 2. М., Физматгиз, 1960.
3. *Киргетов В. И.* О движении управляемых механических систем с условными связями. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
4. *Добронравов В. В.* Об интегралах динамических уравнений как условиях неголономных связей. В сб.: Вопросы аналитической и прикладной механики. М., Оборонгиз, 1963.
5. *До Шань.* Уравнения движения механических систем с нелинейными неголономными связями второго порядка. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
6. *Добронравов В. В.* Основы механики неголономных систем. М., «Высшая школа», 1970.
7. *Гантмахер Ф.* Лекции по аналитической механике. М., «Наука», 1966.