Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 539.375

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ПЛОСКОМ КРУГОВОМ КОЛЬЦЕ С ТРЕЩИНОЙ

Б. П. Белинский, А. З. Локшин

(Ленинград)

Исследуется распределение напряжений в круговом изотропном кольце с трещиной, расположенной на части концентрической окружности. Получена система функциональных уравнений, определяющая коэффициенты разложения в комплексный ряд Фурье напряжений, действующих по окружности, на которой расположена трещина. Решение указанной системы уравнений получено с помощью метода факторизации, что позволило свести исходную систему уравнений к двум связанным бесконечным системам алгебраических уравнений. Доказывается возможность применения метода усечения для решения этих систем. В формулах, определяющих напряжения, выделена особенность, возникающая в окрестности концов трещины. Приводятся коэффициенты интенсивности напряжений при действии равномерной нагрузки на внешнем контуре.

1. В полярной системе координат рассмотрим плоское круговое кольцо ($a < r < b$, $|\theta| < \pi$) с трещиной ($r = c$, $|\theta| < \theta_0$), нагруженное по наружному и внутреннему контурам нормальными и касательными напряжениями

$$\sigma_r(b,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n^+ e^{in\theta}, \quad \sigma_r(a,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n^- e^{in\theta} \tag{1.1}$$

$$\tau_{r\theta}(b,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n^+ e^{in\theta}, \quad \tau_{r\theta}(a,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n^- e^{in\theta}$$

В этих разложениях не все коэффициенты независимы, поскольку из условия уравновешенности нагрузки на каждом контуре следует:

$$q_0^\pm = 0, \quad q_1^\pm = -ip_1^\pm, \quad q_{-1}^\pm = ip_{-1}^\pm$$

Определение напряжений в кольце связано с отысканием функции Эри, удовлетворяющей бигармоническому уравнению. Эта функция может быть представлена в виде (B_0, C_0 . . ., A_n, . . ., D_n — постоянные)

$$\begin{aligned} F(r,\theta) = {} & B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 + (A_1 r^3 + C_1 r + D_1 r^{-1}) e^{i\theta} + \\ & + (A_{-1} r^3 + C_{-1} r + D_{-1} r^{-1}) e^{-i\theta} + \\ & + \sum_{|n| \geqslant 2} (A_n r^n + B_n r^{-n} + C_n r^{n+2} + D_n r^{-n+2}) e^{in\theta} \end{aligned} \tag{1.2}$$

При этом на внешнем и внутреннем контурах нормальные и касательные напряжения должны быть равны заданным (1.1), а на трещине — нулю.

Мысленно разрежем кольцо по окружности $r = c$ и рассмотрим два кольца: внешнее ($c < r < b$, $|\theta| < \pi$) и внутреннее ($a < r < c$, $|\theta| < \pi$).

Действующие по окружности $r = c$ неизвестные напряжения представим в виде

$$\sigma_r(c,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\theta}, \quad \tau_{r\theta}(c,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n e^{in\theta} \tag{1.3}$$

$$(\varphi_0 = 0,\ \varphi_1 = -if_1,\ \varphi_{-1} = if_{-1})$$

Для каждого из двух колец функцию Эри можно взять в виде (1.2) и определить постоянные интегрирования из соответствующих граничных условий. Эти постоянные будут выражены через неизвестные коэффициенты разложений (1.3) f_n и φ_n. Для определения последних следует воспользоваться условиями сопряжения рассматриваемых колец по их общей границе $r = c$, на которой должны выполняться условия (u_r, u_θ — компоненты вектора перемещений)

$$\begin{aligned} &\sigma_r(c,\ \theta) = \tau_{r\theta}(c,\ \theta) = 0 \quad (|\theta| < \theta_0) \\ &u_r(c+0,\ \theta) = u_r(c-0,\ \theta) \\ &u_\theta(c+0,\ \theta) = u_\theta(c-0,\ \theta) \quad (\pi > |\theta| > \theta_0) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Условия сопряжения (1.4) позволяют получить систему

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\theta} = 0, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n e^{in\theta} = 0 \quad (|\theta| < \theta_0) \tag{1.5}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{Vmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} f_n \\ \varphi_n \end{Vmatrix} e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{Vmatrix} t_n \\ \tau_n \end{Vmatrix} e^{in\theta} - \tag{1.6}$$

$$- 2 \begin{Vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ i\cos\theta & -i\sin\theta \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \zeta_0 \\ \eta_0 \end{Vmatrix} \quad (\theta_0 < |\theta| < \pi)$$

Здесь

$$\alpha_0 = -2c(1-\nu_0)\frac{s^2-\varepsilon^2}{(s^2-1)(1-\varepsilon^2)}, \quad \beta_0 = \gamma_0 = \delta_0 = \beta_{\pm1} = \delta_{\pm1} = 0$$

$$\alpha_{\pm1} = -c(1-2\nu_0)\frac{s^4-\varepsilon^4}{(s^4-1)(1-\varepsilon^4)}, \quad \gamma_{\pm1} = \mp c(3-2\nu_0)\frac{s^4-\varepsilon^4}{(s^4-1)(1-\varepsilon^4)}$$

$$\begin{Vmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{Vmatrix} = \frac{c(1-\nu_0)s^2}{(n^2-1)D_n^+ D_n^-} \begin{Vmatrix} a_n & ib_n \\ c_n & id_n \end{Vmatrix}, \quad s = \frac{b}{c}, \quad \varepsilon = \frac{a}{c} \tag{1.7}$$

$$D_n^+(s,\ \varepsilon) = s^{2n} + s^{-2n} + 2(n^2-1) - n^2(s^2+s^{-2}),\ D_n^-(s,\ \varepsilon) = D_n^+(\varepsilon,\ s)\, s^2$$

$$\begin{aligned} a_n = {} & 4n(s^{-2n}\varepsilon^{2n} - \varepsilon^{-2n}s^{2n}) + 4n(n^2-1)(s^{-2n} - s^{2n} + \varepsilon^{2n} - \varepsilon^{-2n}) + \\ & + 2n^2s^2[(n-1)\varepsilon^{-2n} - (n+1)\varepsilon^{2n}] + 2n^2s^{-2}[(n+1)\varepsilon^{-2n} - \\ & - (n-1)\varepsilon^{2n}] + 2n^2\varepsilon^{-2}[(n-1)s^{2n} - (n+1)s^{-2n}] + 2n^2\varepsilon^2[(n+ \\ & + 1)s^{2n} - (n-1)s^{-2n}] + 4n^2(n^2-1)(s^{-2} - s^2 + \varepsilon^2 - \varepsilon^{-2}) + \\ & + 4n^4(s^2\varepsilon^{-2} - s^{-2}\varepsilon^2) \end{aligned}$$

$$b_n = c_n = 4(s^{2n}\varepsilon^{-2n} - s^{-2n}\varepsilon^{2n}) + 4n^3(\varepsilon^2 s^{-2} - \varepsilon^{-2}s^2) + 2n^2 s^2 \cdot$$
$$\cdot[(n+1)\varepsilon^{2n} + (n-1)\varepsilon^{-2n}] - 2n^2\varepsilon^2[(n-1)s^{-2n} + (n+1)s^{2n}] +$$
$$+ 4(n^2-1)[(n-1)s^{-2n} + (n+1)s^{2n}] - 4(n^2-1)[(n+1)\varepsilon^{2n} +$$
$$+ (n-1)\varepsilon^{-2n}] + 2ns^{-2}[(n+2)(n-1)\varepsilon^{2n} + (n-2)(n+1)\varepsilon^{-2n}] +$$
$$+ 8n(n^2-1)(\varepsilon^{-2} - s^{-2}) - 2n\varepsilon^{-2}[(n-2)(n+1)s^{-2n} +$$
$$+ (n+2)(n-1)s^{2n}]$$

$$d_n = 4n(s^{-2n}\varepsilon^{2n} - s^{2n}\varepsilon^{-2n}) + 4n^2(n^2-2)(\varepsilon^2 s^{-2} - \varepsilon^{-2}s^2) +$$
$$+ 2n^2 s^2[(n-1)\varepsilon^{-2n} - (n+1)\varepsilon^{2n}] + 2n^2\varepsilon^2[(n+1)s^{2n} - (n-$$
$$- 1)s^{-2n}] - 2s^{-2}[(3n^2 + n^3 - 4)\varepsilon^{2n} + (3n^2 - n^3 - 4)\varepsilon^{-2n}] +$$
$$+ 4n^2(n^2-1)(s^2 - \varepsilon^2) + 2\varepsilon^{-2}[(3n^2 - n^3 - 4)s^{-2n} + (3n^2 +$$
$$+ n^3 - 4)s^{2n}] + 4(n^2-1)(n^2-4)(\varepsilon^{-2} - s^{-2}) - 4(n^2-1)[(n+$$
$$+ 2)s^{2n} - (n-2)s^{-2n}] + 4(n^2-1)[(n+2)\varepsilon^{2n} - (n-2)\varepsilon^{-2n}]$$

$$-t_n = U_n p_n^+ + V_n q_n^+ + G_n p_n^- + H_n q_n^- \tag{1.8}$$
$$-\tau_n = K_n p_n^+ + L_n q_n^+ + M_n p_n^- + N_n q_n^-$$

$$U_0 = 2c(1-\nu_0)\frac{s^2}{s^2-1}, \quad U_{\pm1} = c(1-2\nu_0)\frac{s^3}{s^4-1}$$

$$G_0 = 2c(1-\nu_0)\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}, \quad G_{\pm1} = c(1-2\nu_0)\frac{\varepsilon^3}{1-\varepsilon^4}$$

$$K_{\pm1} = c(3-2\nu_0)\frac{s^3}{s^4-1}, \quad M_{\pm1} = c(3-2\nu_0)\frac{\varepsilon^3}{1-\varepsilon^4}$$

$$V_0 = H_0 = K_0 = L_0 = M_0 = N_0 = V_{\pm1} = H_{\pm1} = L_{\pm1} =$$
$$= N_{\pm1} = 0$$

$$|n| \geqslant 2, \; U_n = n\rho_n^+[(n+1)s^n + (n-1)s^{-n} - (n+1)s^{-n-2} -$$
$$- (n-1)s^{n-2}]$$

$$V_n = i\rho_n^+[(n+1)(n-2)s^n - (n+2)(n-1)s^{-n} + n(n+1)\cdot$$
$$\cdot s^{-n-2} - n(n-1)s^{n-2}]$$

$$G_n = n\rho_n^-[(n-1)\varepsilon^n + (n+1)\varepsilon^{-n} - (n-1)\varepsilon^{-n+2} - (n+1)\cdot$$
$$\cdot\varepsilon^{n+2}]$$

$$H_n = i\rho_n^-[n(n-1)\varepsilon^n - n(n+1)\varepsilon^{-n} - (n+1)(n-2)\varepsilon^{n+2} +$$
$$+ (n-1)(n+2)\varepsilon^{-n+2}]$$

$$K_n = \rho_n^+[n(n-1)s^{-n} - n(n+1)s^n - (n+1)(n-2)s^{-n-2} +$$
$$+ (n-1)(n+2)s^{n-2}]$$

$$L_n = i\rho_n^+[(n-2)(n+1)s^{-n-2} + (n+2)(n-1)s^{n-2} - (n+$$
$$+ 2)(n-1)s^{-n} - (n-2)(n+1)s^n]$$

$$M_n = \rho_n^-[(n+1)(n-2)\varepsilon^{-n} - (n-1)(n+2)\varepsilon^n - n(n-$$
$$- 1)\varepsilon^{-n+2} + n(n+1)\varepsilon^{n+2}]$$

$$N_n = i\rho_n^-[(n-2)(n+1)\varepsilon^{n+2} + (n+2)(n-1)\varepsilon^{-n+2} - (n+$$
$$+ 2)(n-1)\varepsilon^n - (n-2)(n+1)\varepsilon^{-n}]$$

$$\rho_n^\pm = 2c(1-\nu_0)\frac{s^2}{(n^2-1)D_n^\pm}$$

($\nu_0 = \nu/(1+\nu)$ при плоском напряженном состоянии, $\nu_0 = \nu$ при плоской деформации, ν — коэффициент Пуассона, ζ_0, η_0 — постоянные, определяющие перемещение кольца как твердого тела).

Потребуем, чтобы у концов трещины выполнялась оценка

$$\sigma_r,\ \tau_{r\theta} = O\,(r^{-1/2}), \qquad r \to 0 \tag{1.9}$$

Тогда нетрудно стандартным образом показать, что задача имеет единственное решение. Коэффициенты рядов для напряжений будут иметь

$$f_n,\ \varphi_n = O\ (|\,n\,|^{-1/2}), \quad |\,n\,| \to \infty \tag{1.10}$$

Вследствие этого ряды (1.3) сходятся неравномерно. Из-за такого характера сходимости дальнейшие преобразования будут носить формальный характер. Однако ряды, определяющие напряжения на окружности $r = c$, будут преобразованы к такому виду, при котором особенность (1.9) выделена явно, а остаток представлен равномерно сходящимися рядами. После этого выполнение всех граничных условий можно проверить строго.

2. Представим матрицу (1.7) в виде суммы

$$\begin{Vmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{Vmatrix} = \frac{\lambda}{n^2-1} \begin{Vmatrix} -\,|n| & i\,\mathrm{sgn}\,n \\ \mathrm{sgn}\,n & -i\,|n| \end{Vmatrix} + \frac{\lambda}{n^2-1} \begin{Vmatrix} a_n^\circ & b_n^\circ \\ c_n^\circ & d_n^\circ \end{Vmatrix} \tag{2.1}$$

$$\lambda = 4c\,(1-\nu_0)$$

В равенстве (2.1) первая матрица в правой части определяет коэффициенты $\alpha_n, \ldots, \delta_n$ в случае бесконечной области (это — главная часть матрицы), а элементы второй матрицы экспоненциально стремятся к нулю при $|\,n\,| \to \infty$.

Подставим в функциональные уравнения (1.6) матрицу (1.7), записанную в виде суммы (2.1), и перенесем в правую часть члены, содержащие элементы второй матрицы этой суммы. (Если принять элементы второй матрицы равными нулю и решить систему (1.5) и (1.6), то получим решение задачи для бесконечной пластины с трещиной при произвольной нагрузке в форме, отличной от [1].)

Введем новые неизвестные по формулам

$$\frac{1}{n^2-1} \begin{Vmatrix} -\,|n| & i\,\mathrm{sgn}\,n \\ \mathrm{sgn}\,n & -i\,|\,n\,| \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} f_n \\ \varphi_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} f_n^\circ \\ \varphi_n^\circ \end{Vmatrix}, \qquad |\,n\,| \geqslant 2 \tag{2.2}$$

При этом, как следует из (1.10)

$$f_n^\circ,\ \varphi_n^\circ = O\ (|\,n\,|^{-3/2}), \quad |\,n\,| \to \infty \tag{2.3}$$

Функциональные уравнения (1.5), (1.6) с учетом равенств (2.1), (2.2) преобразуются к виду

$$\sum_{|n|\geqslant 2} (-\,|\,n\,|\,f_n^\circ - \mathrm{sgn}\,n\varphi_n^\circ)\,e^{in\theta} = -\,f_0 - f_1e^{i\theta} - f_{-1}e^{-i\theta} \tag{2.4}$$

$$\sum_{|n|\geqslant 2} (\mathrm{sgn}\,nf_n^\circ + |\,n\,|\,\varphi_n^\circ)\,e^{in\theta} = f_1e^{i\theta} - f_{-1}e^{-i\theta} \qquad (|\,\theta\,| < \theta_0)$$

$$\lambda \sum_{|n|\geqslant 2} f_n^\circ e^{in\theta} = -\,\alpha_0 f_0 - \alpha_1 f_1 e^{i\theta} - \alpha_{-1} f_{-1} e^{-i\theta} + \tag{2.5}$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n e^{in\theta} - 2\,(\zeta_0 \sin\theta + \eta_0 \cos\theta)$$

$$\lambda \sum_{|n|\geqslant 2} \varphi_n^\circ e^{in\theta} = -\gamma_1 f_1 e^{i\theta} - \gamma_{-1} f_{-1} e^{-i\theta} +$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n e^{in\theta} + 2i(\zeta_0 \cos\theta - \eta_0 \sin\theta) \quad (\theta_0 < |\theta| < \pi)$$

Здесь

(2.6) $\psi_n = t_n, \quad \omega_n = \tau_n, \quad |n| < 2$

$$\left\|\begin{matrix}\psi_n\\ \omega_n\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}t_n\\ \tau_n\end{matrix}\right\| - \frac{\lambda}{n^2-1}\left\|\begin{matrix}a_n^\circ & b_n^\circ\\ c_n^\circ & d_n^\circ\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}-|n| f_n^\circ - \operatorname{sgn} n\varphi_n^\circ\\ i \operatorname{sgn} n f_n^\circ + i|n|\varphi_n^\circ\end{matrix}\right\|, \quad |n| \geqslant 2$$

Разобьем внешнюю нагрузку на симметричную и антисимметричную по углу θ части. Рассмотрим лишь случай действия первой из указанных нагрузок, когда

(2.7) $p_n^\pm = p_{-n}^\pm, \quad q_n^\pm = -q_{-n}^\pm, \quad f_n = f_{-n}, \quad \varphi_n = -\varphi_{-n}, \quad f_n^\circ = f_{-n}^\circ,$

$\varphi_n^\circ = -\varphi_{-n}^\circ$

Второй случай, для которого в правых частях равенств (2.7) знаки заменены на противоположные, рассматривается аналогично.

Функциональные уравнения (2.4), (2.5) с учетом (2.7) преобразуются

(2.8)
$$\sum_{n\geqslant 2} (n f_n^\circ + \varphi_n^\circ)\cos n\theta = \frac{1}{2} f_0 + f_1 \cos\theta$$

$$\sum_{n\geqslant 2} (f_n^\circ + n\varphi_n^\circ)\sin n\theta = f_1 \sin\theta \quad (|\theta| < \theta_0)$$

(2.9)
$$\lambda \sum_{n\geqslant 2} f_n^\circ \cos n\theta = -\frac{1}{2}\alpha_0 f_0 - \bar{\alpha}_1 f_1 \cos\theta + \frac{1}{2}\psi_0 +$$

$$+\sum_{n\geqslant 1} \psi_n \cos n\theta - \eta_0 \cos\theta$$

$$\lambda \sum_{n\geqslant 2} \varphi_n^\circ \sin n\theta = -\gamma_1 f_1 \sin\theta + \sum_{n\geqslant 1} \omega_n \sin n\theta + \eta_0 \sin\theta$$

$$(\theta_0 < |\theta| < \pi)$$

В уравнениях (2.8) неизвестные коэффициенты не разделены. Для их разделения рассмотрим функции $P(\theta)$ и $Q(\theta)$

(2.10)
$$\sum_{n\geqslant 2} f_n^\circ \sin n\theta = P(\theta), \quad \sum_{n\geqslant 2} \varphi_n^\circ \cos n\theta = Q(\theta)$$

Отсюда

(2.11)
$$\sum_{n\geqslant 2} n f_n^\circ \cos n\theta = \frac{dP(\theta)}{d\theta}, \quad \sum_{n\geqslant 2} -n\varphi_n^\circ \sin n\theta = \frac{dQ(\theta)}{d\theta}$$

Подставляя (2.10), (2.11) в (2.8), интегрируя и учитывая, что $P(0) = 0$, найдем (μ — постоянная интегрирования)

(2.12) $P(\theta) = -\mu \sin\theta, \quad Q(\theta) = \mu\cos\theta + {}^1/_2 f_0 + f_1 \cos\theta$

Следовательно, система функциональных уравнений (2.8) запишется

(2.13)
$$\sum_{n\geqslant 2} \varphi_n^\circ \cos n\theta = \mu \cos\theta + \frac{1}{2} f_0 + f_1 \cos\theta$$
$$\sum_{n\geqslant 2} f_n^\circ \sin n\theta = -\mu \sin\theta \quad (|\theta| < \theta_0)$$

Отметим, что уравнения (2.13) можно получить непосредственно из граничных условий на трещине, если записать их в виде равенства нулю вектора усилий, действующих на произвольной части ее длины.

Система уравнений (2.9), (2.13) сходна с системой, рассмотренной в [2], и допускает при известной правой части, точное решение методом факторизации.

3. Введем в рассмотрение две аналитические функции комплексного переменного z

(3.1)
$$F_+(z) = \sum_{n\geqslant 2} f_n^\circ z^n, \quad \Phi_+(z) = \sum_{n\geqslant 2} \varphi_n^\circ z^n$$

Из оценки (2.3) следует регулярность этих функций в круге $|z| < 1$ и непрерывность вплоть до его границы. Если положить

(3.2)
$$F_+(z^{-1}) = F_-(z), \quad \Phi_+(z^{-1}) = \Phi_-(z)$$

(функции $F_-(z)$, $\Phi_-(z)$ регулярны вне единичного круга и непрерывны вплоть до его границы), то функциональные уравнения (2.9), (2.13) можно записать в виде

(3.3)
$$F_+(e^{i\theta}) - F_-(e^{i\theta}) = -2i\mu \sin\theta$$
$$\Phi_+(e^{i\theta}) + \Phi_-(e^{i\theta}) = 2(\mu + f_1)\cos\theta + f_0 \quad (|\theta| < \theta_0)$$

(3.4)
$$\lambda [F_+(e^{i\theta}) + F_-(e^{i\theta})] = \psi_0 - \alpha_0 f_0 + 2\sum_{n\geqslant 1} \psi_n \cos n\theta -$$
$$- 2(\alpha_1 f_1 + \eta_0)\cos\theta$$
$$\lambda [\Phi_+(e^{i\theta}) - \Phi_-(e^{i\theta})] = 2i\left[\sum_{n\geqslant 1} \omega_n \sin n\theta - (\gamma_1 f_1 - \eta_0)\sin\theta\right]$$
$$(\theta_0 < |\theta| < \pi)$$

Из равенств (3.3), (3.4) следует, что решение поставленной задачи сводится к решению двух задач Римана — Гильберта теории аналитических функций: определению функций $F_+(z)$, $\Phi_+(z)$, регулярных внутри единичного круга, и функций $F_-(z)$, $\Phi_-(z)$, регулярных вне этого круга, по соотношению между их предельными значениями на границе.

Для удобства дальнейшего решения введем новые неизвестные функции $X_\pm(z)$, $Y_\pm(z)$ по формулам (функции $X_+(z)$, $Y_+(z)$ регулярны в области $|z| < 1$, а функции $X_-(z)$, $Y_-(z)$ — в области $|z| > 1$)

(3.5)
$$X_+(z) = \lambda\Phi_+(z) + (\gamma_1 f_1 - \eta_0) z - \sum_{n\geqslant 1} \omega_n z^n$$
$$Y_+(z) = \lambda F_+(z) + (\alpha_1 f_1 + \eta_0) z - \frac{1}{2}(\psi_0 - \alpha_0 f_0) - \sum_{n\geqslant 1} \psi_n z^n$$
$$X_-(z) = X_+(z^{-1}), \quad Y_-(z) = -Y_+(z^{-1})$$

Тогда уравнения (3.3), (3.4) преобразуются к виду

$$X_+(e^{i\theta}) + X_-(e^{i\theta}) = \lambda[f_0 + 2(\mu + f_1)\cos\theta] + \\ + 2(\gamma_1 f_1 - \eta_0)\cos\theta - 2\sum_{n\geqslant 1}\omega_n \cos n\theta \tag{3.6}$$

$$Y_+(e^{i\theta}) + Y_-(e^{i\theta}) = 2i\left\{[\bar{\alpha}_1 f_1 + \eta_0 - \lambda\mu]\sin\theta - \sum_{n\geqslant 1}\psi_n \sin n\theta\right\}$$

$$(|\theta| < \theta_0)$$

$$X_+(e^{i\theta}) - X_-(e^{i\theta}) = 0, \quad Y_+(e^{i\theta}) - Y_-(e^{i\theta}) = 0 \quad (|\theta_0 < |\theta| < \pi) \tag{3.7}$$

При этом функции $X_\pm(z)$, $Y_\pm(z)$ ограничены у концов дуги

$$\sigma = \{|z| = 1, \ |\arg z| < \theta_0\}$$

Как следует из соотношений (3.7), функции $X_+(z)$, $X_-(z)$ образуют единую аналитическую функцию, регулярную в плоскости z с разрезом по дуге σ. То же справедливо относительно $Y_+(z)$ и $Y_-(z)$. При этом их предельные значения связаны уравнениями (3.6), которые решаются известным образом [3], в результате

$$X(z) = \frac{R(z)}{2\pi i}\int_\sigma \frac{d\tau}{\tau - z}\frac{1}{R(\tau)}\left\{\lambda f_0 + [\lambda\mu + \gamma_1 f_1 + \lambda f_1 - \eta_0](\tau + \tau^{-1}) - \right. \\ \left. - \sum_{n\geqslant 1}\omega_n(\tau^n + \tau^{-n})\right\} = \begin{cases} X_+(z), & |z| < 1 \\ X_-(z), & |z| > 1 \end{cases} \tag{3.8}$$

$$Y(z) = \frac{R(z)}{2\pi i}\int_\sigma \frac{d\tau}{\tau - z}\frac{1}{R(\tau)}\left\{[\alpha_1 f_1 + \eta_0 - \lambda\mu](\tau - \tau^{-1}) - \right. \\ \left. - \sum_{n\geqslant 1}\psi_n(\tau^n - \tau^{-n})\right\} = \begin{cases} Y_+(z), & |z| < 1 \\ Y_-(z), & |z| > 1 \end{cases}$$

$$R(z) = \sqrt{(z - e^{i\theta_0})(z - e^{-i\theta_0})}$$

(интегрирование ведется по внутреннему берегу σ). Функция $R(z)$ регулярна в комплексной плоскости z с разрезом по дуге σ, причем $R(0) = 1$.

Представления (3.8) дают точное решение краевой задачи, описываемой системой уравнений (2.9), (2.13).

4. В правую часть уравнений (3.6) входят неизвестные коэффициенты f_0, f_1, η_0, μ, f_n°, φ_n°. Для их определения поступим следующим образом. Разложим функции $X_+(z)$, $Y_+(z)$, определяемые формулами (3.8), в ряды Тейлора и, учитывая (3.5), подставим эти разложения в уравнения (3.1). Тогда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получим систему уравнений, определяющую указанные неизвестные.

Нетрудно заметить, что для разложения функций (3.8) в ряд Тейлора достаточно получить разложение в указанный ряд функций

$$S_m(z) = \frac{R(z)}{2\pi i}\int_\sigma \frac{d\tau}{\tau - z}\frac{\tau^m}{R(\tau)} \quad (m = 0, \pm 1, \ldots) \tag{4.1}$$

Отметим, что функция $R(z)$ может быть представлена в виде ряда [2] $P_n(u)$ — полином Лежандра)

$$R(z) = \sum_{p\geqslant 0} \rho_p(u) z^p, \quad u = \cos\theta_0$$

$$\rho_n(u) = P_n(u) - 2uP_{n-1}(u) + P_{n-2}(u), \quad \rho_0 = 1, \; \rho_1 = -u$$

Учитывая, что при $|z| < 1$

$$\frac{1}{\tau - z} = \sum_{k\geqslant 0} z^k \tau^{-k-1}$$

преобразуем формулу (4.1) к виду

$$S_m(z) = \sum_{n\geqslant 0} t_{mn} z^n, \quad t_{mn} = \sum_{k=0}^{n} \rho_{n-k}(u) \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \frac{\tau^{m-k-1}}{R(\tau)} d\tau$$

Используя формулу Мелера — Дирихле для полиномов Лежандра [4]

$$P_s(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\varphi}{R(e^{i\varphi})} e^{-is\varphi} \tag{4.2}$$

найдем

$$t_{mn} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \rho_{n-k}(u) P_{k-m}(u) \quad \begin{pmatrix} m = 0, \pm 1, \ldots \\ n = 0, 1, \ldots \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

При $m \neq n$ последняя сумма, как показано в [2], может быть преобразована к виду ($n \neq 0$)

$$t_{mn}(u) = \frac{1}{2} \frac{m}{m-n} [P_{m-1}(u) P_n(u) - P_m(u) P_{n-1}(u)] \tag{4.4}$$

Производя указанную выше подстановку в уравнения (3.1), получим следующие системы уравнений (суммирование по $k \geqslant 1$):

$$\lambda f_n^\circ = \psi_n + (\alpha_1 f_1 - \lambda\mu + \eta_0)(t_{1n} - t_{-1n}) - \Sigma\psi_k (t_{kn} - t_{-kn}) \tag{4.5}$$

$$\lambda\varphi_n^\circ = \omega_n + (\lambda\mu + \lambda f_1 + \gamma_1 f_1 - \eta_0)(t_{1n} + t_{-1n}) - \Sigma\omega_k (t_{kn} + t_{-kn}) \qquad n \geqslant 2$$

$$A_0 Z = D \tag{4.6}$$

$$A_0 = \begin{Vmatrix} {}^1/_2\alpha_0 & -\alpha_1(t_{10} - t_{-10}) & -(t_{10} - t_{-10}) & \lambda(t_{10} - t_{-10}) \\ 0 & \alpha_1(1 - t_{11} + t_{-11}) & 1 - t_{11} + t_{-11} & \lambda(t_{11} - t_{-11}) \\ \lambda t_{00} & (\lambda + \gamma_1)(t_{10} + t_{-10}) & -(t_{10} + t_{-10}) & \lambda(t_{10} + t_{-10}) \\ 0 & \gamma_1 - (\lambda + \gamma_1)(t_{11} + t_{-11}) & -1 + t_{11} + t_{-11} & -\lambda(t_{11} + t_{-11}) \end{Vmatrix}$$

$$Z = \begin{Vmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \eta_0 \\ \mu \end{Vmatrix}, \quad D = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2}\psi_0 - \sum \psi_k (t_{k0} - t_{-k0}) \\ \psi_1 - \sum \psi_k (t_{k1} - t_{-k1}) \\ \sum \omega_k (t_{k0} + t_{-k0}) \\ \omega_1 - \sum \omega_k (t_{k1} + t_{-k1}) \end{Vmatrix}$$

Коэффициенты ψ_n, ω_n линейно выражаются через внешнюю нагрузку и коэффициенты f_n°, φ_n° (см. формулы (2.6)), поэтому соотношения (4.5) представляют собой две связанные бесконечные системы линейных алгебраических уравнений для f_n°, φ_n° (h_n^1, h_n^2 выражаются через внешнюю нагрузку и коэффициенты f_1, η_0, μ; δ_{nm} — символ Кронекера)

$$\left\|\begin{matrix} f_n^\circ \\ \varphi_n^\circ \end{matrix}\right\| = \sum_{m\geqslant 2} \left\|\begin{matrix} R_{nm}^{11} & R_{nm}^{12} \\ R_{nm}^{21} & R_{nm}^{22} \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} f_m^\circ \\ \varphi_m^\circ \end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} h_n^1 \\ h_n^2 \end{matrix}\right\|, \quad n \geqslant 2 \tag{4.7}$$

$$R_{nm}^{11} = K_{nm}^- (-ma_m^\circ + ib_m^\circ) - \delta_{nm} \frac{1}{n^2-1} (-na_n^\circ + ib_n^\circ)$$

$$R_{nm}^{12} = K_{nm}^- (-a_m^\circ + imb_m^\circ) - \delta_{nm} \frac{1}{n^2-1} (-a_n^\circ + inb_n^\circ)$$

$$R_{nm}^{21} = K_{nm}^+ (-mc_m^\circ + id_m^\circ) - \delta_{nm} \frac{1}{n^2-1} (-nc_n^\circ + id_n^\circ)$$

$$R_{nm}^{22} = K_{nm}^+ (-c_m^\circ + imd_m^\circ) - \delta_{nm} \frac{1}{n^2-1} (-c_n^\circ + ind_n^\circ)$$

$$K_{nm}^\pm = (t_{mn} \pm t_{-mn}) \frac{1}{m^2-1}$$

5. Исследуем свойства оператора, порожденного матрицей $\|R_{nm}^{\alpha\beta}\|$ $(n, m \geqslant 2)$. Предварительно оценим величину t_{mn}. Имеем

$$t_{mn} = m\,[P_{n-1}\gamma_{mn} - P_n\gamma_{m-1,\, n-1}], \quad \gamma_{mn} = \frac{P_m - P_n}{m-n} \tag{5.1}$$

Используя представление (4.2) для полиномов Лежандра, найдем

$$\gamma_{mn} = -\frac{i}{\pi} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \varphi \frac{d\varphi}{R(e^{i\varphi})} \left(\frac{m-n}{2}\varphi\right)^{-1} \sin\frac{m-n}{2}\varphi \exp\left(-i\frac{m+n}{2}\varphi\right)$$

откуда

$$|\gamma_{mn}| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{|\varphi|\, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\theta_0)}} = C \tag{5.2}$$

Здесь и ниже C означает различные постоянные, точные значения которых не важны.

Учитывая известную оценку для полиномов Лежандра [4] $|P_n(u)| \leqslant C / \sqrt{n}$ и принимая во внимание (5.2), найдем

$$|t_{mn}| \leqslant Cm / \sqrt{n}$$

Полученные соотношения при использовании формул для $a_n^\circ, \ldots, d_n^\circ$ (см. (1.7) и (2.1)) приводят к оценке

$$|R_{nm}^{\alpha\beta}| \leqslant Cm^3\varkappa^m / \sqrt{n} + Cn^2\sqrt{n}\varkappa^n\delta_{nm}, \quad \varkappa = \max(\varepsilon, s^{-1}) \tag{5.3}$$

Можно проверить также, что свободные члены системы уравнений

$$h_n^1,\ h_n^2 \to 0, \quad n \to \infty \tag{5.4}$$

Из доказанного следует, что в пространстве ограниченных последовательностей $\mathrm{x} = (x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ с нормой $\|\mathrm{x}\| = \sup_n |x_n|$ систему уравнений (4.7) можно рассматривать как уравнение второго рода с ограниченным оператором R (напомним, что $\varkappa < 1$)

$$\mathrm{x} + R\mathrm{x} = \mathrm{h}, \quad \|R\| \leqslant C \sup_{n\geqslant 2}\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m\geqslant 2} m^3\varkappa^m + n^2\sqrt{n}\,\varkappa^n\right] \tag{5.5}$$

Ясно, что $\| R \| < 1$ при достаточно малом $\varkappa$, и тогда уравнение (5.5) однозначно разрешимо, например, итерациями. Однако и при любом $\varkappa < 1$ оценки (5.3), (5.4) позволяют отнести бесконечную систему (5.5) к классу квазирегулярных [5], решение которых сводится к последовательному решению бесконечной системы с малым оператором и конечной системы размером $N \times N$. Здесь N определяется из условия

$$C\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m\geqslant 2} m^3\varkappa^m + Cn^2\sqrt{n}\,\varkappa^n < 1 \quad \text{при } n > N$$

Однозначная разрешимость этой конечной системы непосредственно следует из единственности решения.

Подставим в систему (4.6) найденные из системы (4.5) коэффициенты f_n^0, φ_n^0. Поскольку последние выражаются через постоянные f_1, μ, η_0, то получим систему уравнений 4×4, определяющую все необходимые коэффициенты.

6. Обратимся к выделению особенности (1.9) в рядах (1.3) для напряжений на окружности $r = c$.

Подставим в эти ряды f_n, φ_n из (2.2) и воспользуемся формулами (4.7). При этом для выделения особенности достаточно ограничиться членами порядка $O(n^{-1/2})$ при $n \to \infty$.

Пусть $\pi > \theta > \theta_0$. Имеем

$$\begin{aligned}
\sigma_r(c, \theta) = &-2 \sum_{n\geqslant 2} n \cos n\theta \sum_{m\geqslant 2} (t_{mn} - t_{-mn}) \times \\
&\times (Q_m^{11} f_m^\circ + Q_m^{12}\varphi_m^\circ) - 2\sum_{n\geqslant 2} n \cos n\theta \frac{A}{\lambda}(t_{1n} - t_{-1n}) + \\
&+ 2\sum_{n\geqslant 2} n \cos n\theta \sum_{m\geqslant 1} (t_{mn} - t_{-mn})\, t_m + \ldots \\
\tau_{r\theta}(c, \theta) = &-2\sum_{n\geqslant 2} n \sin n\theta \sum_{m\geqslant 2} (t_{mn} + t_{-mn})(Q_m^{21} f_m^\circ + Q_m^{22}\varphi_m^\circ) - \\
&-2\frac{B}{\lambda}\sum_{n\geqslant 2} n \sin n\theta\, (t_{1n} + t_{-1n}) + 2\sum_{n\geqslant 2} n \sin n\theta \sum_{m\geqslant 1} (t_{mn} + t_{-mn})\, \tau_m + \ldots
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Здесь

$$\begin{Vmatrix} Q_m^{11} \\ Q_m^{12} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -m & i \\ -1 & im \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a_m^\circ \\ b_m^\circ \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} Q_m^{21} \\ Q_m^{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -m & i \\ -1 & im \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} c_m^\circ \\ d_m^\circ \end{Vmatrix}$$

$$A = \alpha_1 f_1 + \eta_0 - \lambda\mu, \quad B = \lambda\mu + (\gamma_1 + \lambda) f_1 - \eta_0$$

Многоточием здесь и ниже обозначены равномерно сходящиеся ряды, которые не дают вклада в особенность напряжений.

θ_0, *град*	10		30		60		90	
ε	G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2
0.1	0.418	−0.037	0.667	−0.178	0.661	−0.394	0.454	−0.489
0.2	0.438	−0.038	0.755	−0.198	0.698	−0.459	0.403	−0.537
0.3	0.479	−0.041	0.935	−0.243	0.724	−0.575	0.318	−0.613
0.4	0.565	−0.046	1.263	−0.396	0.672	−0.753	0.171	−0.712

Введем в рассмотрение разложение в ряд производящей функции для полиномов Лежандра. Полагая $z = e^{i\theta}$ и считая $\pi > \theta > \theta_0$, найдем

$$\frac{ie^{-i\theta/2}}{\sqrt{2(u-\cos\theta)}} = \sum_{k\geqslant 0} P_k(u)\, e^{ik\theta}, \quad u = \cos\theta_0 \tag{6.2}$$

С учетом формулы (4.3) для t_{mn} и разложения (6.2) получим

$$\sum_{n\geqslant 2} n\cos n\theta t_{mn} = -\frac{1}{\sqrt{2(u-\cos\theta)}}\frac{m}{2}\sin\frac{\theta}{2}[P_m(u)+P_{m-1}(u)]+\ldots$$

$$\sum_{n\geqslant 2} n\sin n\theta t_{mn} = \frac{1}{\sqrt{2(u-\cos\theta)}}\frac{m}{2}\cos\frac{\theta}{2}[P_m(u)-P_{m-1}(u)]+\ldots$$

Тогда из представлений (6.1) следует при $\pi > \theta > \theta_0$

$$\sigma_r(c,\theta) + i\tau_{r\theta}(c,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2(\cos\theta_0-\cos\theta)}}\left[T_1\sin\frac{\theta}{2} + iT_2\cos\frac{\theta}{2}\right]+\ldots \tag{6.3}$$

$$T_1 = 2\sum_{m\geqslant 2}(Q_m^{11}f_m^\circ + Q_m^{12}\varphi_m^\circ)\,m\,(P_m+P_{m-1}) + 2\frac{A}{\lambda}(1+\cos\theta_0) - 2\sum_{m\geqslant 1} t_m m\,(P_m+P_{m-1})$$

$$T_2 = -2\sum_{m\geqslant 2}(Q_m^{21}f_m^\circ + Q_m^{22}\varphi_m^\circ)\,m\,(P_m-P_{m-1}) + 2\frac{B}{\lambda}(1-\cos\theta_0) + 2\sum_{m\geqslant 1}\tau_m m\,(P_m-P_{m-1})$$

Формулы (6.3) позволяют вычислить коэффициенты интенсивности напряжений [6]. В случае действия на внешнем контуре равномерного давления p_0^+ и $\varepsilon = 1/s$ эти коэффициенты имеют вид

$$K_{\rm I} + iK_{\rm II} = \sqrt{\pi c}\, p_0^+\,[G_1(\theta_0,\varepsilon) + iG_2(\theta_0,\varepsilon)]$$

Значения функций $G_1(\theta_0, \varepsilon)$, $G_2(\theta_0, \varepsilon)$ приведены в таблице.

Поступила 15 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Л.— М., «Наука», 1949.
2. *Шестопалов В. П.* Метод задачи Римана — Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. Харьков, Изд. Харьков. ин-та, 1971.
3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
4. *Рыжик И. М., Градштейн И. С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
5. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Л.—М., Гостехиздат, 1950.
6. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.