Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 539.3

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЕСТЕСТВЕННОГО НЕНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ

Л. П. Лебедев

(Ростов-на-Дону)

В [1] в рамках задачи Коши выделен класс моделей линейного вязкоупругого тела, подчиняющихся принципу устойчивости естественного ненапряженного состояния вязкоупругих тел (принципу У). Принцип У формулируется следующим образом. Пусть граничные условия таковы, что соответствующая задача теории упругости имеет нулевое решение. Если в каждый момент времени $t > 0$ вязкоупругое тело свободно от внешних нагрузок, то, каково бы ни было его начальное состояние, деформация тела исчезает при $t \to \infty$. Принцип У называется частичным, если он выполняется только для некоторого частного класса задач вязкоупругости.

В данной работе получены достаточные условия выполнения частичного принципа У для моделей вязкоупругих тел в рамках основных начально-краевых задач для тел конечных размеров.

1. Постановка задачи. Закон связи между тензорами деформаций ε_{kl} и напряжений σ_{kl} вязкоупругого тела берется в виде [1, 2] $C(\partial_t)\,\sigma_{kl} = A(\partial_t)\,\varepsilon_{rr}\delta_{kl} + 2B(\partial_t)\,\varepsilon_{kl}$, $\quad 2\varepsilon_{kl} = a_{k,l} + a_{l,k}$

Здесь $A(p)$, $B(p)$, $C(p)$ — полиномы степени m_A, m_B, m_C соответственно, $m_A \leqslant m_B$, $m_C \leqslant m_B$, δ_{kl} — символ Кронекера, ∂_t — частная производная по времени t, a_k, $k = 1, 2, 3$ — компоненты вектора перемещений $\mathbf{a}$, индекс (l) после запятой означает дифференцирование по соответствующей пространственной координате (x_l), по повторяющимся нижним индексам ведется суммирование.

Уравнения линейной вязкоупругости имеют вид

$$B(\partial_t)\,\Delta\mathbf{a} + [A(\partial_t) + B(\partial_t)]\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{a} - C(\partial_t)\,\rho\partial_t^2\,\mathbf{a} = -C(\partial_t)\,\mathbf{F} \tag{1.1}$$

Рассматривается первая начально-краевая задача линейной вязкоупругости — задача А (остальные задачи — см. замечания 3.1 и 3.2)

$$\partial_t^k\,\mathbf{a}\,|_{t=0} = \mathbf{b}_k \ (0 \leqslant k \leqslant N \equiv \max\{m_B - 1,\ m_C + 1\}), \quad \mathbf{a}\,|_\Gamma = 0 \tag{1.2}$$

Здесь $\rho > 0$ — плотность материала, $\mathbf{F}$ — внешние массовые силы, Γ — граница конечного объема Ω, которая далее предполагается достаточно гладкой.

Решение задачи А ищется в виде

$$\mathbf{a} = \mathbf{u} + \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) = \chi(t)\sum_{k=0}^{N} t^k\mathbf{b}_k$$

где $\chi(t)$ — фиксированная бесконечно дифференцируемая функция, равная единице в окрестности точки $t = 0$ и нулю при $t > 1$. Вектор-функция $\mathbf{u}$, очевидно, удовлетворяет однородным краевым и начальным условиям (1.2) и служит решением уравнений (1.1) с измененной известной правой частью $\mathbf{\Phi}$.

Для исследования Задачи А применяется преобразование Лапласа

$$\mathbf{v}(x, p) = L\mathbf{u} \equiv \int_0^\infty e^{-pt}\,\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\,dt$$

которое приводит к некоторой краевой задаче с параметром — задаче В. Задача В в обобщенной постановке будет сформулирована ниже (определение 3.1).

2. Вспомогательный материал. Вводятся следующие пространства. Пусть H — некоторое сепарабельное комплексное гильбертово пространство.

Пространство $E_k(\gamma, H)$ есть пространство функций $\varphi(p)$ со значениями в H, аналитических ([3], стр. 184) в полуплоскости $\operatorname{Re} p \equiv \sigma > \gamma \geqslant 0$ и имеющих конечную норму

$$\|\varphi\|^2_{E_k(\gamma, H)} = \sup_{\sigma>\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \|\varphi(\sigma + i\tau)\|^2_H (1 + |\sigma + i\tau|^{2k})d\tau$$

Пространство $P_k(\gamma, H)$ ($k \geqslant 0$ — целое, $\gamma \geqslant 0$) есть комплексное пространство функций $f(t)$ со значениями в H, обладающих по t на $R_+ = [0, \infty)$ обобщенными производными $\partial_t{}^r f$ (см. [4], стр. 28) до порядка k включительно, такими, что $\partial_t{}^r f = 0$ при $t = 0$ $(0 \leqslant r < k)$ и конечна норма

$$\|f\|^2_{P_k(\gamma, H)} = \int_0^\infty \sum_{r=0}^{k} e^{-2\gamma t} \|\partial_t{}^r f\|^2_H\,dt$$

Аналогичные пространства для скалярных функций введены в [5].

Далее будет использоваться также пространство $L^2(R_+, S)$ [4] — пространство функций $q(t)$ со значениями в банаховом пространстве S, имеющих конечную норму

$$\|q\|^2_{L^2(R_+, S)} = \int_0^\infty \|q(t)\|^2_S\,dt$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема П.— В. Оператор преобразования Лапласа L непрерывно отображает пространство $P_k(\gamma, H)$ ($k \geqslant 0$ — целое, $\gamma \geqslant 0$) на пространство $E_k(\gamma, H)$. Оператор L непрерывно обратим, и обратным ему служит оператор обратного преобразования Лапласа. А именно, если $\varphi(p) \in E_k(\gamma, H)$, то

а) существует функция $\varphi(\gamma + i\tau)$, такая, что

$$\lim_{\sigma\to+\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \|\varphi(\gamma + i\tau) - \varphi(\sigma + i\tau)\|^2_H\,d\tau = 0$$

б) существует функция $f(t) \in P_k(\gamma, H)$, такая, что

$$\lim_{M\to\infty} \int_0^\infty e^{-2\gamma t} \sum_{r=0}^{k} \left\| \partial_t^r f(t) - \int_{\gamma-iM}^{\gamma+iM} (i\tau)^r \varphi(\gamma+i\tau) e^{i\tau t} d\tau \right\|_H^2 dt = 0$$

и $\varphi(p) = Lf(t)$

Теорема П.— В. является обобщением теоремы Пэли — Винера (см. [5]). Для доказательства ее первой части произвольный элемент $f(t)$ из $P_k(\gamma, H)$ раскладывается в ряд по полному ортонормированному базису ψ_n пространства H

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(t) \psi_n. \quad d_n(t) = (f \cdot \psi_n)_H$$

Из вида нормы

$$\|f\|^2_{P_k(\gamma, H)} = \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\gamma t} \sum_{r=0}^{k} |\partial_t^r d_n(t)|^2 dt$$

и определения пространства $P_k(\gamma, H)$ вытекает, что $d_n(t) \in P_k(e^{-\gamma t})$, $\gamma \geqslant 0$ (см. [5]). Из теоремы 7.1 [5] (см. также замечание к ней) следует, что $\alpha_n = Ld_n \in E_k(\gamma)$ (см. [5]), и оператор L непрерывен. Отсюда и из ортонормированности базиса ψ_n вытекает, что

$$\varphi = Lf \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \psi_n$$

принадлежит пространству $E_k(\gamma, H)$, и оператор L непрерывно действует из $P_k(\gamma, H)$ в $E_k(\gamma, H)$. Обратное утверждение теоремы П.— В. доказывается аналогично.

Далее будут получены оценки полиномов $P(p, \alpha, \beta)$ с действительными коэффициентами

$$P(p, \alpha, \beta) = D(p, \alpha) + \beta p^2 C(p)$$
$$D(p, \alpha) = d_0(\alpha) p^n + \ldots + d_n(\alpha), \quad C(p) = c_0 p^q + \ldots + c_q, \quad c_0 > 0$$

где $d_k(\alpha)$ — непрерывные функции параметра α, $q \equiv m_C \leqslant n$, $n > 0$.

Теорема 2.1. Пусть при всех $\alpha \in [0, \alpha^\circ]$, $\beta \in [0, \beta^\circ]$; $\alpha^\circ, \beta^\circ < \infty$ все корни p_k полинома $P(p, \alpha, \beta)$ лежат в области $\operatorname{Re} p \equiv \sigma < 0$ и $d_0(\alpha) \neq 0$. Тогда имеет место следующая оценка:

$$|P(p, \alpha, \beta)| \geqslant m_1 (1 + |p|^r), \quad \operatorname{Re} p \geqslant 0 \quad . \tag{2.1}$$

$$r = \begin{cases} n, & m_C + 1 \leqslant n \\ n-1, & m_C = n \end{cases}$$

$$\inf \{c_1 d_0(\alpha) - c_0 d_1(\alpha)\} = m_2 > 0, \quad \alpha \in [0, \alpha^0]$$

Здесь и далее $m_k > 0$ — некоторые положительные постоянные.

Доказательство. Разложение полинома $P(p, \alpha, \beta)$ на простые множители и условие $\operatorname{Re} p_k < 0$ показывают, что оценка (2.1) имеет место, если коэффициент при старшей степени p не обращается в нуль. Последнее всегда справедливо при $n \geqslant q + 2$, а если $\beta \in [\delta, \beta^\circ]$, где $\delta > 0$ — любое число, то и при $n \leqslant q+1$. (Необходимо учесть, что в этих случаях множество корней p_k при указанных α, β образуют на плоскости комплексного переменного $p = \sigma + i\tau$ ограниченное замкнутое множество, лежащее в области $\sigma < 0$.) В частности, оценка (2.1) имеет место для полинома $D(p, \alpha)$. Отсюда следует, что, каково бы ни было $M < \infty$, всегда можно указать столь малое $\delta_0 > 0$, что при $|p| \leqslant M$ и $\beta \in [0, \delta_0]$ оценка (2.1) также имеет место.

Остается доказать оценку (2.1) при условиях P: $|p| \geqslant M$, $\sigma_0 > 0$, $\alpha \in [0, \alpha^0]$, $\beta \in [0, \delta_0]$, $n \leqslant q+1$, где M достаточно велико.

Пусть $n = q+1$. Так как все коэффициенты полинома $P(p, \alpha, \beta)$ положительны (это следует из условия $\operatorname{Re} p_k < 0$), выводим

$$|P(p, \alpha, \beta)| = |p|^n |d_0(\alpha) + \beta c_0\sigma + \beta c_1 + i\tau\beta c_0 + p^{-1}P_1(p^{-1}, \alpha, \beta)| \geqslant |p|^n [d_0(\alpha) - m_3M^{-1}] \geqslant m_4 |p|^n > 0$$
$$m_3 = \sup |P_1(p^{-1}, \alpha, \beta)| < \infty \quad \text{при } \alpha \in [0, \alpha^\circ], \quad \beta \in [0, \beta^\circ], \ |p| \geqslant 1$$

Пусть теперь $n = q$. Тогда

$$|P(p, \alpha, \beta)| = |p|^{n-1} | \chi_1(p, \alpha, \beta) + i\chi_2(p, \alpha, \beta) + p^{-1}P_2(p^{-1}, \alpha, \beta)|$$
$$\chi_1(p, \alpha, \beta) = -\beta(3c_0\sigma + c_1)\tau^2 + \beta(c_0\sigma^3 + c_1\sigma^2 + c_2\sigma + c_3) + d_0\sigma + d_1 \quad \chi_2(p, \alpha, \beta) = -\beta c_0\tau^3 + \beta\tau(3c_0\sigma^2 + 2c_1\sigma + c_2) + d_0(\alpha)\tau$$

(если $q < 3$, то $c_s = 0$ при $s > q$). Видно, что

$$|P_2(p^{-1}, \alpha, \beta)| \leqslant m_5 < \infty, \quad \text{при } \beta \in [0, \beta^\circ], \quad |p| \geqslant 1, \quad \alpha \in [0, \alpha^\circ]$$

Если $|\chi_1| \geqslant \eta > 0$, то при условиях P оценка (2.1) имеет место с постоянной $m_1 = {}^1/_2\eta$. В частности, это справедливо, если $|\tau| \leqslant {}^1/_2\sigma$ и δ_0 достаточно мало.

Пусть $|\chi_1| \leqslant \eta$ и $|\tau| \geqslant {}^1/_2\sigma$. Тогда

$$|\chi_2(p, \alpha, \beta)| = |\tau(3c_0\sigma + c_1)^{-1}| \, | c_1d_0 - c_0d_1 + \beta(8c_0^2\sigma^3 + 8c_0c_1\sigma^2 + 2c_0c_2\sigma + 2c_1^2\sigma + c_1c_2 - c_0c_3) + (c_0\chi_1 + 2c_0d_0\sigma)|$$

Если M достаточно велико, а δ_0, η малы, то величина второго множителя в правой части может быть оценена снизу через ${}^1/_2m_2$. Действительно, можно указать такое число $\sigma_0 > 0$, что при $\sigma \geqslant \sigma_0$ все члены этого множителя, стоящие в скобках, положительны. Если $0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0$, то эта оценка имеет место при достаточно малом $\delta_0 > 0$. Отсюда вытекает оценка (2.1).

Необходимо отметить, что дополнительное условие в случае $r = n - 1$ теоремы 2.1 усиливает основное условие $\operatorname{Re} p_k < 0$, так как первый определитель Гурвица для полинома $P(p, \alpha, \beta)$, который должен быть положительным, имеет вид

$$\beta[c_1d_0(\alpha) - c_0d_1(\alpha)] + \beta^2(c_1c_2 - c_0c_3) > 0$$

3. Достаточные условия выполнения частичного принципа У. Пусть $\mathbf{H}$ — комплексное пространство вектор-функций $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, образованное замыканием непрерывно дифференцируемых на Ω и равных нулю на Г функций φ_k в норме, порожденной скалярным произведением

$$(\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\psi})_{\mathbf{H}} = \int\limits_{\Omega} \varphi_{k,l}\overline{\psi}_{k,l}\, d\Omega$$

где $\overline{\psi}_k$ — функция, комплексно-сопряженная ψ_k. Очевидно

$$\mathbf{H} = W_2^{\circ(1)}(\Omega) \times W_2^{\circ(1)}(\Omega) \times W_2^{\circ(1)}(\Omega)$$

Определение 3.1. Обобщенным решением задачи В при фиксированном p называется вектор-функция $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$, удовлетворяющая при любой вектор-функции $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{H}$ равенству

$$\int\limits_{\Omega} \{B(p)\, v_{k,l}\overline{\varphi}_{k,l} + [A(p) + B(p)] \operatorname{div}\mathbf{v} \operatorname{div}\overline{\boldsymbol{\varphi}}\}\, d\Omega + \tag{3.1}$$

$$+ \int\limits_{\Omega} p^2 C(p)\, \rho v_k \overline{\varphi}_k\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} f_k \overline{\varphi}_k\, d\Omega, \quad \mathbf{f} \equiv (f_1, f_2, f_3) = L\boldsymbol{\Phi}$$

Для корректности определения необходимо потребовать, чтобы правая часть уравнения (3.1) была непрерывным функционалом по $\boldsymbol{\varphi}$ в пространстве $\mathbf{H}$.

Используя теорему Рисса о представлении непрерывного линейного функционала в гильбертовом пространстве, уравнение (3.1) можно записать как операторное уравнение в пространстве $\mathbf{H}$

$$B(p)\,\mathbf{v} + [A(p) + B(p)]\, \mathbf{G}_1\mathbf{v} + \rho p^2 C(p)\, \mathbf{G}_2\mathbf{v} = \mathbf{K}\mathbf{f} \tag{3.2}$$

$$(\mathbf{G}_1\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\varphi})_{\mathbf{H}} = \int\limits_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{v} \operatorname{div}\overline{\boldsymbol{\varphi}}\, d\Omega$$

$$(\mathbf{G}_2\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\varphi})_{\mathbf{H}} = \int\limits_{\Omega} v_k\overline{\varphi}_k\, d\Omega, \quad (\mathbf{K}\mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\varphi})_{\mathbf{H}} = \int\limits_{\Omega} f_k\overline{\varphi}_k\, d\Omega$$

Лемма 3.1. Операторы $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ непрерывны и положительны в пространстве $\mathbf{H}$. Оператор $\mathbf{K}$ непрерывно действует из пространства $W_2^{\circ(-1)}(\Omega) \times W_2^{\circ(-1)}(\Omega) \times W_2^{\circ(-1)}(\Omega)$ в $\mathbf{H}$; $\|\mathbf{G}_1\| = 1$.

Соответствующие свойства операторов вытекают из их определения и теорем вложения С. Л. Соболева [6]. В [7] доказано: $\|\mathbf{G}_1\| = 1$.

Рассматривается оператор левой части уравнения (3.2), обозначенный $\mathbf{T}(p)$. Имеет место тождество

$$(\mathbf{T}(p)\,\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\varphi})_{\mathbf{H}} = \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{H}}^{2} P_0(p, \alpha, \beta) \tag{3.3}$$

$$P_0(p, \alpha, \beta) = B(p) + \alpha\,[A(p) + B(p)] + \beta p^2 C(p)$$

$$\alpha = \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{H}}^{-2} (\mathbf{G}_1\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\varphi})_{\mathbf{H}}, \quad \beta = \rho\,\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{H}}^{-2} (\mathbf{G}_2\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\varphi})_{\mathbf{H}}$$

Из леммы 3.1 следует, что $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant \beta_0 < \infty$.

Лемма 3.2. Пусть полином $P_0(p, \alpha, \beta)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2.1, где $\alpha^\circ = 1$, $\beta^\circ = \beta_0$, и $\mathbf{K}\mathbf{f} \in E_0(0, \mathbf{H})$. Тогда уравнение (3.2) однозначно разрешимо в $\mathbf{H}$ при всех $\operatorname{Re} p \geqslant 0$, и решение его $\mathbf{v}(p) \in E_k(0, \mathbf{H}) \cap E_r(0, \mathbf{L}^2(\Omega))$, где $k = r = n$ при $m_C + 1 \geqslant n$ и $k + 1 = r = n$ при $m_C = n$.

Из тождества (3.3) и теоремы 2.1 следует, что оператор $\mathbf{T}(p)$ при $\operatorname{Re} p \geqslant 0$ обладает непрерывным обратным оператором $\mathbf{T}^{-1}(p)$. Видно, что оператором $\mathbf{T}'(p)$, сопряженным оператору $\mathbf{T}(p)$, является $\mathbf{T}(p)$. Из сказанного выше вытекает, что при $\operatorname{Re} p \geqslant$

$\geqslant 0$ $\mathbf{T}'(p)\,\boldsymbol{\varphi} = 0$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{\varphi} = 0$. По теореме Банаха об операторах с замкнутой областью значений ([3], стр. 284) область значений оператора $\mathbf{T}(p)$ при $\operatorname{Re} p \geqslant 0$ есть все пространство $\mathbf{H}$. Следовательно, уравнение (3.2) однозначно разрешимо при всех $\mathbf{Kf} \in \mathbf{H}$. Далее $\mathbf{T}(p)$ есть целая оператор-функция параметра p. Отсюда и из непрерывности оператора $\mathbf{T}^{-1}(p)$ вытекает аналитичность решения $\mathbf{v}(p)$ уравнения (3.2) в области $\operatorname{Re} p > 0$, где аналитична функция $\mathbf{Kf}(p)$.

Для получения оценки решения $\mathbf{v}(p)$ уравнение (3.2), в которое подставлено его решение, почленно умножается скалярно в пространстве $\mathbf{H}$ на $\mathbf{v}(p)$. Из полученного равенства с учетом (3.3) и теоремы 2.1 выводится оценка (при $\gamma = 0$)

$$\|\mathbf{v}(p)\|_{\mathbf{H}}^2 (1 + |p|^{2k}) + \gamma \|\mathbf{v}(p)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} (1 + |p|^{k+q+2}) \leqslant m_6 \|\mathbf{Kf}\|_{\mathbf{H}}^2$$

где k определено условиями леммы, $\operatorname{Re} p \geqslant 0$, $m_6 < \infty$. Учитывая эту оценку, определение оператора $\mathbf{G}_2$ и возвращаясь к полученному выше равенству, можно вывести оценку (с измененной постоянной m_6) и при $\gamma = 1$, что и заканчивает доказательство леммы.

Применение теоремы П.— В. теперь гарантирует существование единственного обобщенного решения $\mathbf{u}(t)$ задачи А в следующем смысле: $\mathbf{u}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\int_0^\infty \{(\mathbf{u} \cdot B(-\partial_t)\boldsymbol{\psi})_{\mathbf{H}} + (\mathbf{G}_1\mathbf{u} \cdot [A(-\partial_t) + B(-\partial_t)]\boldsymbol{\psi})_{\mathbf{H}} + (\mathbf{G}_2\mathbf{u} \cdot \rho\partial_t^2 C(-\partial_t)\boldsymbol{\psi})_{\mathbf{H}} - (\mathbf{K\Phi} \cdot \boldsymbol{\psi})_{\mathbf{H}}\}\, dt = 0$$

при произвольной бесконечно дифференцируемой по t функции $\boldsymbol{\psi}(t)$ со значениями в пространстве H, равной нулю при $t > T$ (значение $T < \infty$ — свое для каждой функции $\boldsymbol{\psi}$).

Используя теоремы существования, доказанные в [2], определению обобщенного решения задачи А можно придать вид соответствующего определения из [2]. Таким образом, справедлива теорема.

Теорема 3.1. Пусть все $\mathbf{b}_s$ из начальных условий (1.2) принадлежат пространству $\mathbf{H}$, и $C(\partial_t)\,\mathbf{F} \in L^2(R_+, \mathbf{L}^{6/5}(\Omega))$. Пусть, далее, при всех $\alpha \in [0, 1]$, $\beta \in [0, \beta_0]$ все корни p_s полинома $P_0(p, \alpha, \beta)$ лежат в области $\operatorname{Re} p < 0$ и $d_0(\alpha) \neq 0$.

Тогда существует единственное обобщенное решение $\mathbf{u}(t)$ задачи А, принадлежащее пространству $P_k(0, \mathbf{H}) \cap P_r(0, \mathbf{L}^2(\Omega))$, где $k = r = m_B$, если $m_B \geqslant m_A$, $m_B \geqslant m_C + 1$, $k + 1 = r = m_B$, если $m_B \geqslant m_A$, $m_B = m_c > 0$, и

$$\inf\,[c_1 d_0(\alpha) - c_0 d_1(\alpha)] = m_2 > 0 \quad \text{при } \alpha \in [0, 1]$$

Здесь $d_s(\alpha) = \beta_s(1 + \alpha) + \alpha\alpha_{s-j}$, $j = m_B - m_A$, $\alpha_s = 0$ при $s < 0$, α_s, β_s — коэффициенты полиномов $A(p)$, $B(p)$ соответственно.

Из теоремы 3.1 в силу оценок решения следует существование единственного «полного» обобщенного решения задачи А. Непосредственным следствием теоремы 3.1 является

Теорема 3.2. Пусть выполнены все условия теоремы 3.1. Тогда

$$\int_M^\infty \left\{\sum_{s=0}^{k} \|\partial_t^s \mathbf{a}\|^2_{\mathbf{H}} + \sum_{s=0}^{r} \|\partial_t^s \mathbf{a}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\right\} dt \to 0 \quad \text{при } M \to \infty$$

Как следствие из теоремы 3.2 и неравенства ([4], стр. 33)

$$\|\partial_t{}^l\varphi\|_H^2 \leqslant m_7 \int\limits_M^\infty \sum_{s=0}^g \|\partial_t{}^s\varphi\|_H^2\, dt, \quad l = 0, \ldots, g-1 \geqslant 0$$

с постоянной m_7, не зависящей от M, $\varphi(t)$, вытекает, что равномерно по t при $t \to \infty$

$$\|\partial_t{}^l\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \to 0, \quad l = 0, \ldots, r-1$$

$$\|\partial_t{}^s\mathbf{a}\|_{\mathbf{H}} \to 0, \quad s = 0, \ldots, k-1, \quad \text{если } k > 0$$

Отсюда следует, что условия теоремы 3.1 являются достаточными условиями для выполнения частичного принципа У.

Замечание 3.1. Все полученные выше результаты непосредственно переносятся на случай смешанной начально-краевой задачи линейной вязкоупругости (часть границы тела жестко закреплена, а на другой ее части действует поверхностная нагрузка $\mathbf{f}_1$). Здесь будут отмечены лишь изменения, которые необходимо при этом внести в условия соответствующих теорем.

Пространство $\mathbf{H}$ заменяется на $\mathbf{H}_1$, где $\mathbf{H}_1$ — замыкание непрерывно дифференцируемых на Ω вектор-функций $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, удовлетворяющих однородным геометрическим условиям закрепления тела (таким, что для $\boldsymbol{\varphi}$ выполнено неравенство Корна [8]), в норме, индуцируемой скалярным произведением

$$(\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\psi})_{\mathbf{H}} = \frac{1}{4}\int\limits_\Omega (\varphi_{k,l} + \varphi_{l,k})(\bar{\psi}_{k,l} + \bar{\psi}_{l,k})\, d\Omega$$

Полином $P_0(p, \alpha, \beta)$ и $d_s(\alpha)$ заменяются на

$$P_1(p, \alpha, \beta) = 2B(p) + \alpha A(p) + \beta p^2 C(p)$$

$$d_{s1}(\alpha) = 2\beta_s + \alpha\alpha_{s-j}, \quad j = m_B - m_A$$

Область изменения параметра α $[0, 1]$ — на $[0, 3]$; это — следствие известного [7] неравенства

$$\int\limits_\Omega |\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}|^2 d\Omega \leqslant 3\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{H}_1}^2$$

Кроме того, необходимо везде добавить условие

$$C(\partial_t)\,\mathbf{f}_1 \in L^2(R_+, \mathbf{L}^{4/3}(\Gamma_1))$$

где Γ_1 — часть границы тела, на которую действует нагрузка $\mathbf{f}_1$.

Замечание 3.2. В случае, когда граница тела не закреплена или закрепление допускает перемещения тела как жесткого целого, соответствующие теоремы в формулировке, совпадающей с формулировкой теорем из замечания 3.1, также имеют место. Но не для всего вектора перемещений $\mathbf{a}$, а для его «деформационной» части $\mathbf{a}_1$, которая выделяется следующим образом:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \sum_{s=1}^m \chi_s(t)\,\boldsymbol{\psi}_s, \quad (\mathbf{a}_1\cdot\boldsymbol{\psi}_s)_{H_1} = 0, \quad s = 1, \ldots, m$$

где ψ_s — базис векторов жесткого перемещения ($m = 6$ в случае незакрепленной границы).

Замечание 3.3. Для каждой конкретной из поставленных задач линейной вязкоупругости область изменения параметра β ограничена. Чтобы частичный принцип У выполнялся одновременно для всех таких конкретных задач, необходимо потребовать: все корни соответствующих полиномов $P_s(p, \alpha, \beta)$ лежат в левой полуплоскости комплексного переменного p при всех $\alpha \in [0, \alpha_s^\circ]$, $\beta \in R_+$.

Автор благодарит И. И. Воровича за постановку задачи.

Поступила 2 I 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ворович И. И.* О некоторых свойствах операторов вязкоупругости. В сб.: Избранные проблемы прикладной механики. М., ВИНИТИ, 1974.
2. *Лебедев Л. П.* Об однозначной разрешимости и некоторых приближенных методах решения задачи линейной вязкоупругости. ПММ, 1973, т. 37, вып. 3.
3. *Иосида К.* Функциональный анализ. М., «Мир», 1967.
4. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., «Мир», 1971.
5. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида. Успехи матем. наук, 1964, т. 19, вып. 3.
6. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во ЛГУ, 1950.
7. *Михлин С. Г.* Спектр пучка операторов теории упругости. Успехи матем. наук, 1973, т. 28, вып. 3.
8. *Эйдус Д. М.* Контактная задача терии упругости. Матем. сб., 1954, т. 34 (76), № 3.