Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 539.3

# ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ О КОНТАКТЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ БАЛОК С УПРУГИМ КЛИНОМ

Г. Я. Попов, Л. Я. Тихоненко

(Одесса)

Дается решение следующих задач.

1. С обеими гранями клина ($0 \leqslant r < \infty$, $-\alpha \leqslant \theta \leqslant \alpha$) контактируют одинаковые полубесконечные балки с жесткостью $D$. Нормально приложенные к балкам нагрузки $q_1(r)$, $q_2(r)$ могут быть различными. Концы балок, совпадающие с острием клина, различным образом связаны между собой. Задача решается путем разбиения на симметричную (1а) и антисимметричную (1б) задачи. Задачу 1а можно трактовать как задачу об изгибе балки, лежащей на клине ($0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant \alpha$), вторая грань которого находится в условии скользящей заделки.

2. В одну из граней клина ($0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant \alpha$) вдавливается полубесконечная нормально загруженная балка, а другая грань либо свободна (задача 2а), либо жестко защемлена (задача 2б).

3. Обе стороны полубесконечной нормально загруженной балки контактируют с клиньями ($0 \leqslant r < \infty$, $-\beta \leqslant \theta \leqslant 0$) и ($0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant \alpha$), материалы которых могут быть различными.

Точное решение перечисленных задач получено методом, изложенным авторами в работе [1]. Здесь этот метод усовершенствован и упрощен, что позволило существенно расширить круг решенных задач по сравнению с [1], где рассмотрены только некоторые частные случаи задачи 2а. На основе полученных точных решений исследован характер особенности контактного напряжения $\sigma_\theta$ вблизи острия клина для всех перечисленных задач и для всего диапазона угла $\alpha$. Обнаружено, что задача 1б не корректна для углов $\alpha \geqslant {}^1/_2\,\pi$.

Исследование ведется без учета касательного контактного напряжения, без учета явлений отрыва балки от клина и для случая плоской деформации в клине.

1. *Задача 1.* В симметричном случае (задача 1а) обе балки будут нагружены прижимающей нагрузкой ${}^1/_2\,[q_1(r) + q_2(r)]$, в антисимметричном случае (задача 1б) — одна балка ($\theta = \alpha$) прижимающей нагрузкой ${}^1/_2\,[q_1(r) - q_2(r)]$, а другая ($\theta = -\alpha$) той же нагрузкой, но с отрывающим эффектом. Ради упрощения обозначений всюду ниже нагрузку на балки будем обозначать через $q(r)$.

Предполагая контактные напряжения положительными, получим краевые условия задачи 1а в виде

$$\tau_{r\theta} = 0, \quad D\frac{\partial^4 v}{\partial r^4} = \mp\sigma_\theta \mp q(r), \quad \theta = \pm\alpha \tag{1.1}$$

Краевые условия задачи 1б отличаются от (1.1) только тем, что перед $q(r)$ сохраняется минус и при $\theta = -\alpha$.

К условиям (1.1) необходимо добавить еще условия соединения концов балок у острия клина. Возможны три типа соединения: жесткое соединение, шарнирное соединение и свободные края. Условия равновесия системы из двух полубесконечных балок показывают, что в случае задачи 1а можно ограничиться рассмотрением первых двух типов соединения, так как шарнирное соединение эквивалентно свободным краям. В случае задачи 1б все три способа соединения концов балок эквивалентны следующим условиям равновесия для одной из балок:

$$\int_0^\infty [\sigma_\theta(r, \alpha) + q(r)]\, r^k dr = 0, \quad k = 0, 1 \tag{1.2}$$

Эти же условия следует использовать и в задаче 1а для случая шарнирного соединения балок. В случае жесткого соединения условие (1.2) при $k = 1$ надо заменить на следующее:

$$\partial v / \partial r\,(r, \alpha) = 0, \quad r = 0 \tag{1.3}$$

Приступим к построению решения задачи 1а. Поступая так же, как и в работе [1], учитывая симметрию задачи и реализуя краевые условия (1.1), придем к соотношению

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Omega \lambda \prod_{n=1}^{3}(p+n)\,F(p)\,r^{-p-4}dp = \frac{1}{2\pi i}\int_\Omega T(p)\,F(p)\,r^{-p-1}dp + \frac{1}{2}\,q(r) \tag{1.4}$$

$$\lambda = \frac{D(\varkappa+1)}{4G}, \quad F(p) = \frac{pB(p)}{\operatorname{csc}\alpha\,(p+1)}, \quad T(p) = \frac{1}{2}\left[\frac{p-1}{\operatorname{tg}\alpha\,(p+1)} - \frac{p+1}{\operatorname{tg}\alpha\,(p-1)}\right]$$

Здесь контур интегрирования $\Omega$ — прямая $\operatorname{Re} p = c$, где $c_0 < c < 0$, а смысл символов $G$, $\varkappa$, $B(p)$ и $c_0$ тот же, что и в работе [1].

Согласно схеме, изложенной в этой работе, полученное соотношение следует привести к задаче Карлемана для полосы. Это сведение можно осуществить двумя приемами: либо сдвигая контур интегрирования влево в первом интеграле соотношения (1.4), как это сделано в работе [1], либо сдвигая контур интегрирования вправо во втором интеграле. Поскольку указанные приемы не эквивалентны в смысле ограничений, накладываемых на функцию $q(r)$, принято целесообразным изложить их оба.

Начнем со второго приема. Обозначим

$$\Phi_1(p) = T(p)\,F(p), \quad Q_1(p) = \int_0^\infty q(r)\,r^{p+3}\,dr \tag{1.5}$$

и предположим, что функция $\Phi_1(p)$ аналитична в полосе $\Pi_0$ (здесь и ниже принято обозначение $\{c + 3m < \operatorname{Re} p < c + 3(m+1)\} = \Pi_m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) и непрерывна в замкнутой полосе $\Pi_0$. Кроме того, равномерно относительно $c \leqslant \sigma \leqslant c + 3$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_1(\sigma + it)|^2\, dt < \text{const} \tag{1.6}$$

Как будет показано, построенная ниже функция $\Phi_1(p)$ действительно обладает перечисленными свойствами при условии, что $r^{7/2+c} q(r) \in L_2(0, \infty)$, а $Q_1(p) \in H_\Omega$, т. е. локально удовлетворяет условию Гельдера на прямой $\Omega$.

Эти свойства функции $\Phi_1(p)$ позволяют, используя теорему Коши, сдвинуть в правом интеграле соотношения (1.4) контур интегрирования вправо на три, что и приводит к краевой задаче Карлемана для полосы

$$\lambda T^{-1}(p_0)\prod_{n=1}^{3}(p_0+n)\Phi_1(p_0)=\Phi_1(p_0+3)+\frac{1}{2}Q_1(p_0),\quad p_0\in\Omega \tag{1.7}$$

Для реализации второго способа обозначим

$$\Phi_2(p)=\prod_{n=1}^{3}(p+n)F(p),\qquad Q(p)=\int_0^\infty q(r)r^p dr \tag{1.8}$$

и предположим, что функция $\Phi_2(p)$ в полосе $\Pi_{-1}$ обладает теми же свойствами, что и функция $\Phi_1(p)$ в полосе $\Pi_0$. Ниже покажем, что она действительно обладает этими свойствами при условии, что $r^{1/2+k+c}\,q^{(k)}(r)\in\in L_2(0,\ \infty)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$, а $Q(p)\in H_\Omega$.

Сдвинув в левом интеграле соотношения (1.4) контур ингрирования влево на три, придем к задаче Карлемана

$$\lambda\Phi_2(p_0-3)=\prod_{n=1}^{3}(p_0+n)^{-1}T(p_0)\Phi_2(p_0)+\frac{1}{2}Q(p_0),\quad p_0\in\Omega \tag{1.9}$$

Точное решение задач (1.7) (1.9) можно получить, как и в работах [1—3], путем [4] сведения ее к задаче Римана [5], структура точного решения которой главным образом зависит от индекса. Как это видно из работ [1–3], нахождение индекса задачи Римана представляется затруднительным ввиду того, что коэффициент имеет сложную особенность на концах контура. Следует отметить, что аналогичные трудности возникают при решении уравнений Винера — Хопфа первого рода [6], сводящихся к задаче Римана на оси с коэффициентом, также имеющим особенность. Там они преодолены с помощью частичной факторизации. Применим эту идею к задачам Карлемана (1.7), (1.9), стремясь преобразовать их так, чтобы коэффициенты не имели особенностей и приращение их аргументов равнялось нулю (подобная идея ранее использовалась в работе [7]).

С помощью функции

$$\Phi(p)=[\lambda^{1/3\,p}\Gamma(p+1)\sin {}^1/_2\pi p]^{-1}\Phi_1(p) \tag{1.10}$$

краевое условие (1.7) перепишется в виде

$$K(p_0)\Phi(p_0)+\Phi(p_0+3)=H(p_0),\quad p_0\in\Omega \tag{1.11}$$
$$K(p)=\operatorname{tg}{}^1/_2\pi p T^{-1}(p),\quad H(p)=Q_1(p)[2\lambda^{1/3 p+1}\Gamma(p+4)\times\times\cos{}^1/_2\,\pi p]^{-1}$$

Теперь искомая функция $\Phi(p)$ в полосе $\Pi_0$ имеет простые полюсы в точках $p_1=0$ и $p_2=2$, но коэффициент задачи $K(p)$ на каждой прямой $\Omega$, лежащей в полосе $\gamma<\operatorname{Re}p<0$ ($\gamma=\max\{-1,\ 1-\pi/\alpha\}$), непрерывен, не имеет нулей, обладает асимптотикой $K(p)=1+O(e^{-2\beta|p|})$, $|p|\to\infty$ ($\beta=\min\{\alpha,\ {}^1/_2\pi\}$), удовлетворяет условию Гельдера и, наконец, $[\arg K(p)]_\Omega=0$. Все перечисленные свойства проверяются достаточно просто, за исключением последнего. Для его доказательства воспользуемся асимптотикой $T(p)=\pm i$, $\operatorname{Im}p\to\pm\infty$, позволяющей обнаружить, что $\Delta=[\arg T(p)]_\Omega=n\pi$, где $n$ — целое, нечетное и не зависит от $\alpha$. Полагая в выражении для $T(p)$ $\alpha = {}^1/_2\pi$, по аналогии с работой [1] (см. п. 4), найдем, что $\Delta = -\pi$, откуда и следует требуемое.

От задачи Карлемана (1.11) с помощью функции

$$\omega(w) = \frac{1}{\sqrt{-w}}\Phi\left(\frac{3i\ln(-w)}{2\pi} + c\right)$$

переходим [1,4] к задаче Римана

$$K_1(u)\omega^+(u) = \omega^-(u) + h(u), \quad u<0 \tag{1.12}$$

$$K_1(u) = K\left(\frac{3i\ln(-u)}{2\pi} + c\right), \quad h(u) = \frac{1}{\sqrt{-u}}H\left(\frac{3i\ln(-u)}{2\pi} + c\right)$$

Отмеченные свойства функций $\Phi(p)$, $K(p)$ и $Q_1(p)$ позволяют получить решение задачи (1.12) по схеме, изложенной в работе [5]. Возвращаясь затем от $\omega(w)$ к функции $\Phi(p)$, получим формулы, дающие решение задачи Карлемана (1.11)

$$\Phi(p) = \mathrm{X}(p)\left[\frac{1}{6i}\int\limits_\Omega \frac{H(s)\,ds}{\mathrm{X}(s+3)\sin{}^1/_3\pi(p-s)} + \frac{C_1}{\sin{}^1/_3\pi p} + \right. \tag{1.13}$$

$$\left. + \frac{C_2}{\sin{}^1/_3\pi(p-2)}\right]$$

$$\mathrm{X}(p) = \exp\left\{\frac{1}{3}\int\limits_\Omega [e^{2/_3\pi i(s-p)} - 1]^{-1}\ln K(s)\,ds\right\}, \quad p\in\Pi_0$$

Здесь $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные.

Рассмотрим свойства построенной функции $\Phi(p)$. Анализируя формулы (1.13), замечаем, что для любого целого $m$ функция $\Phi(p)$ аналитична в каждой полосе $\Pi_m$, за исключением точек $p_1 = 3m$ и $p_2 = 3m + 2$, где находятся простые полосы, а на каждой прямой: $\{\mathrm{Re}\, p = c + 3m\} = \Omega_m$ она имеет скачок, причем предельные значения ее на этой прямой слева ($\Phi_-(p)$) и справа ($\Phi_+(p)$) связаны соотношением

$$\Phi_-(p) = K(p-3m)\Phi_+(p) - (-1)^m H(p-3m), \quad p\in\Omega_m \tag{1.14}$$

$$\Phi_+(p) = \mathrm{X}_+(p)\left[\frac{1}{2}\frac{H(p)}{\mathrm{X}(p+3)} + \frac{1}{6i}\int\limits_\Omega \frac{H(s)\,ds}{\mathrm{X}(s+3)\sin{}^1/_3\pi(p-s)} + \right.$$

$$\left. + \frac{C_1}{\sin{}^1/_3\pi p} + \frac{C_2}{\sin{}^1/_3\pi(p-2)}\right]$$

$$\mathrm{X}_+(p) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\ln K(p) + \frac{1}{3}\int\limits_\Omega [e^{2/_3\pi i(s-p)} - 1]^{-1}\ln K(s)\,ds\right\}, \; p\in\Omega$$

Учитывая, что функции $K(p)$, $H(p) \in H_\Omega$, можно показать [1], что $\Phi(p)$ непрерывна в каждой замкнутой полосе $\Pi_m$, за исключением точек $p_1$ и $p_2$, а, стало быть, функция $\Phi_1(p)$ в замкнутой полосе $\Pi_0$ непрерывна и аналитична.

Осталось показать выполнение условия (1.6) при сделанном выше ограничении на нагрузку. Это ограничение, согласно [8], равносильно условию $Q_1(p) \in L_2(\Omega)$. Из формулы (1.11) и известной [9] асимптотики для Г-функции следует, что $H(p)$ и $p^{7/_2+c}H(p) \in L_2(\Omega)$. Используя преобразование Фурье (после замены $s = c + i\tau$, $p = c + iz$) и теорему 68 из

[8], можно показать, что этим же свойством обладает и интеграл

$$\frac{1}{6i}\int\limits_{\Omega}[\mathrm{X}(s+3)\sin{}^1/_3\pi(p-s)]^{-1}H(s)\,ds, \quad p\in\Pi_0$$

Последующее использование формул (1.10), (1.13) и асимптотики для Г-функции позволяет сделать вывод, что функция $\Phi_1(p)$ удовлетворяет условию (1.6).

В случае шарнирной связи между балками постоянные $C_1$ и $C_2$ фиксируются условиями (1.2), реализовать которые удобно в форме

$$\Sigma(p,\alpha)+Q(p)=0, \quad p=0,\ 1 \tag{1.15}$$

Здесь через $\Sigma(p,\alpha)$ обозначено преобразование Меллина контактного напряжения $\sigma_\theta(r,\alpha)$. Заметив, что

$$\Sigma(p,\alpha)=2[\Phi_1(p)]_+, \quad Q(p)=Q_1(p-3)$$

реализуем условия (1.15). В результате получим уравнения для определения этих постоянных

$$\Phi(1)+Q_1(-2)(2\sqrt[3]{\lambda})^{-1}=0, \quad C_1=-Q_1(-3)[3X(0)]^{-1} \tag{1.16}$$

В случае жесткого соединения балок реализация условия (1.3) сложна. С целью упрощения умножим уравнение изгиба балки на $r^2$ и проинтегрируем (по частям) от нуля до бесконечности. Это преобразование приводит к выражению

$$\int\limits_0^\infty[\sigma_\theta(r,\alpha)+q(r)]\,r^2dr=2D\frac{\partial v}{\partial r}(r,\alpha)\big|_{r=0}=0$$

Следовательно, условие (1.3) равносильно соотношению $\Sigma(2,\alpha)+ Q(2)=0$. Реализация последнего и условия (1.15) при $p=0$ дает

$$C_1=-Q_1(-3)[3X(0)]^{-1}, \quad C_2=Q_1(-1)[6\lambda^{2/3}X(2)]^{-1}$$

Итак, получено точное решение задачи 1а. Это позволяет записать в виде квадратур все представляющие интерес величины. Например, контактное напряжение $\sigma_\theta(r,\alpha)$ имеет вид

$$\sigma_\theta(r,\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Omega}2\lambda^{1/3p}\,\Gamma(p+1)\sin\frac{1}{2}\pi p\,\Phi_+(p)\,r^{-p-1}dp \tag{1.17}$$

Здесь функция $\Phi_+(p)$ определяется формулами (1.14).

Исследуя теперь поведение напряжения (1.17) в вершине клина и на бесконечности по схеме работы [1], обнаружим, что в случае шарнирной связи балок справедлива асимптотика при $r\to 0$: $\sigma_\theta=O(\ln r)$ для $\alpha\leqslant{}^1/_2\pi$ и $\sigma_\theta=O(r^{\pi/\alpha-2})$ для ${}^1/_2\,\pi<\alpha<\pi$, а в случае жесткой связи — $\sigma_\theta=O(1)$ и $\sigma_\theta=O(r^{\pi/\alpha-2})$ соответственно. При $r\to\infty$ контактное напряжение $\sigma_\theta$, независимо от способа связи балок, убывает как $r^{-\delta}$, $\delta=\min(4,\varepsilon)$, где $\varepsilon$ входит в асимптотику $q(r)=O(r^{-\varepsilon})$, $r\to\infty$. Полученные результаты для $\alpha={}^1/_2\,\pi$ совпадают с результатами работы [10].

Применяя прием частичной факторизации к задаче (1.9), придем к следующей задаче:

$$\Phi(p_0 - 3) + K(p_0)\Phi(p_0) = H(p_0), \quad p_0 \in \Omega \tag{1.18}$$

$$\Phi(p) = [\lambda^{1/3 p}\cos {}^1/_2\pi\rho\,\Gamma(p + 4)]^{-1}\Phi_2(p),\ K(p) = \operatorname{ctg} {}^1/_2\pi p T(p)$$

$$H(p) = -[2\lambda^{1/3 p}\,\Gamma(p+1)\sin {}^1/_2\pi p]^{-1}Q(p)$$

Отметим, что функция $\Phi(p)$ в полосе $\Pi_{-1}$ имеет два простых полюса $p_1 = -3$ и $p_2 = -1$, коэффициент задачи (1.18) обладает теми же свойствами, что и коэффициент задачи (1.11), а свободный член (при сделанном выше ограничении на функцию $q(r)$) обладает свойствами: $H(p) \in H_\Omega$; $p^{1/2+k+c}H(p) \in L_2(\Omega)$, $k = 0, 1, 2, 3$. Решение задачи (1.18) строится тем же способом, что и задачи (1.11), и имеет вид

$$\Phi(p) = X^{-1}(p)\left[\frac{1}{6i}\int\limits_\Omega \frac{X(s-3)H(s)\,ds}{\sin {}^1/_3\pi(s-p)} + \frac{C_1}{\sin {}^1/_3\pi p} + \frac{C_2}{\sin {}^1/_3\pi(p+1)}\right] \tag{1.19}$$

Здесь функция $X(p)$ определяется второй из формул (1.13).

Проводя анализ, аналогичный анализу формул (1.13), приходим к выводу, что функция $\Phi_2(p)$ в полосе $\Pi_{-1}$ обладает всеми предположенными ранее свойствами. Смена мест индексов плюс, минус при $\Phi(p)$ в соотношении (1.14) дает формулу, связывающую предельные значения функции (1.19) на прямой $\Omega_m$.

Приведем выражение для контактного напряжения $\sigma_\theta(r, \alpha)$

$$\sigma_\theta(r, \alpha) = \frac{-1}{2\pi i}\int\limits_\Omega \frac{(\sin 2\alpha p + p\sin 2\alpha)\,\Gamma(p+1)\,\Phi_-(p)\,\lambda^{1/3 p}}{\sin\alpha(p-1)\sin\alpha(p+1)\operatorname{sc}{}^1/_2\pi p}\,r^{-p-1}dp \tag{1.20}$$

Постоянные $C_1$, $C_2$ в случае шарнирной связи между балками определяются формулами

$$C_1 = -\frac{\sqrt{3}}{12i}\int\limits_\Omega X(s-3)H(s)\csc\frac{1}{3}\pi(s-1)\,ds, \quad C_2 = 0$$

а в случае жесткой связи: $C_1 = C_2 = 0$.

Исследование интеграла (1.20) показывает, что для обоих видов соединения асимптотика напряжения $\sigma_\theta(r, \alpha)$ при $r \to 0$ (как впрочем и при $r \to \infty$) полностью совпадает с соответствующей асимптотикой напряжения (1.17).

Итак, на основе задач Карлемана (1.7) и (1.9) получены две формы решения задачи 1а. При этом для строгого обоснования решения, полученного на основе задачи (1.9), потребовалось, чтобы $r^{1/2+k+c}q^{(k)}(r) \in L_2(0, \infty)$, $k = 0, 1, 2, 3$, а на основе задачи (1.7), чтобы $r^{7/2+c}q(r) \in L_2(0, \infty)$. Таким образом, выбор формы решения контактной задачи следует увязывать с предварительным анализом свойств функции $q(r)$.

Решение оставшихся задач получим на основе задачи Карлемана вида (1.7). Предпочтение этой форме решения отдано потому, что она включает случай кусочно-постоянной нагрузки $q(r)$, представляющий наибольший практический интерес (от этого случая можно перейти к случаю сосредоточенной силы).

Остановимся вкратце на задаче 1б. Учитывая ее антисимметрию и реализуя краевые условия, придем к задаче Карлемана (1.7), у которой функции $T(p)$ и $\Phi_1(p)$ определяются формулами

$$T(p) = {}^1/_2[(p+1)\operatorname{tg}\alpha(p-1) - (p-1)\operatorname{tg}\alpha(p+1)] \tag{1.21}$$
$$\Phi_1(p) = T(p)\,p\cos\alpha(p+1)\,B(p)$$

Легко убедиться, что в полосе $\gamma < \operatorname{Re} p < 0$, $\gamma = \max\{-1, 1-\pi/ / 2\alpha\}$ функция

$$K(p) = \operatorname{tg}{}^1/_2\,\pi p\,T^{-1}(p) \tag{1.22}$$

обладает теми же свойствами, что и коэффициент задачи (1.11).

С помощью функции (1.10) от задачи (1.7), (1.21) перейдем к задаче (1.11), (1.21), (1.22), решение которой определяют формулы (1.13). Постоянные $C_1$ и $C_2$, независимо от типа соединения концов балок, фиксируют соотношения (1.16), а интеграл (1.17) дает выражение для контактного напряжения $\sigma_\theta$. Анализируя поведение напряжения в вершине клина, обнаружим, что для $\alpha < {}^1/_6\,\pi$ величина $\sigma_\theta(r, \alpha)$ при $r \to 0$ стремится к нулю как $r$, для $\alpha = {}^1/_6\,\pi$ — как $r\ln r$, для ${}^1/_6\,\pi < \alpha \leqslant {}^1/_4\,\pi$ — как $r^{\pi/2\alpha-2}$, а для ${}^1/_4\,\pi < \alpha < {}^1/_2\pi$ имеет степенную особенность вида $r^{\pi/2\alpha-2}$. При $\alpha \geqslant {}^1/_2\,\pi$ особенность становится неинтегрируемой, следовательно, задача 1б корректна лишь для выпуклых углов. На бесконечности контактное напряжение убывает так же, как и в предыдущей задаче.

2. *Задача 2а.* Балка свободно лежит на грани ($\theta = 0$) клина ($0 \leqslant r < < \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant \alpha < 2\pi$). Тогда краевые условия для клина и условия равновесия балки имеют вид

$$\sigma_\theta, \tau_{r\theta}(r, \alpha) = 0; \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad D\frac{\partial^4 v}{\partial r^4} = \sigma_\theta + q(r), \quad \theta = 0 \tag{2.1}$$
$$\int_0^\infty [\sigma_\theta(r, 0) + q(r)]\,r^k dr = 0, \quad k = 0, 1$$

Реализация краевых условий (2.1) приводит к задаче Карлемана (1.7), в которой следует положить

$$T(p) = 2(\sin^2\alpha p - p^2\sin^2\alpha)(\sin 2\alpha p + p\sin 2\alpha)^{-1} \tag{2.2}$$
$$\Phi_1(p) = T(p)\,p\,B(p)$$

и которая посредством функции (1.10) приводится к задаче (1.11). Очевидно, что функция

$$K(p) = {}^1/_2\operatorname{tg}{}^1/_2\pi p\,(\sin 2\alpha p + p\sin 2\alpha)(\sin^2\alpha p - p^2\sin^2\alpha)^{-1} \tag{2.3}$$

в полосе $\gamma < \operatorname{Re} p < 0$, где $\gamma = \max\{-1, c_1\}$, а $c_1$ — первый отрицательный корень уравнения $\sin 2\alpha p + p\sin 2\alpha = 0$, обладает всеми необходимыми свойствами. Поскольку прямая $\Omega$ находится в этой полосе, т. е. $\gamma < \operatorname{Re} p_0 < 0$, то решение задачи (1.11), (2.3) дают формулы (1.13). Как и прежде, постоянные $C_1$, $C_2$ фиксируются соотношениями (1.16).

Частные случаи задачи 2а (нагрузка в виде сосредоточенных силы $P$ и момента $M$ приложена к концу балки, совпадающем с острием клина, а $\alpha = {}^1/_2\pi, \pi, {}^3/_2\pi$) были рассмотрены в работе [1]. Ясно, что рассмотрение этого случая нагрузки проводится по обычной схеме. При этом функция $\Phi(p)$ определяется формулами (1.13), в которых положено

$$H(p)\equiv 0,\quad C_2=C_1+\sqrt{3}\,M\,[4\sqrt[3]{\lambda}\,X(1)]^{-1},\quad C_1=-P\,[3X(0)]^{-1}$$

Для любого вида нагрузки выражение контактного напряжения $\sigma_\theta(r,\alpha)$ дает формула (1.17). Анализ поведения этого напряжения при $r\to 0$ показывает, что для $\alpha<{}^1/_2\pi$ величина $\sigma_\theta$ стремится к нулю, как $r^\mu$, $\mu=\max\{1,-c_1-1\}$, для $\alpha={}^1/_2\pi$ она ограничена, а для $\alpha>{}^1/_2\pi$ имеет степенную особенность вида $r^{-c_1-1}$. Поведение $\sigma_\theta$ при $r\to\infty$ такое же, как и у задачи 1. Эти результаты совпадают с аналогичными результатами работ [1, 11].

*Задача 2б.* В данном случае краевые условия имеют вид

$$u,v=0,\quad \theta=\alpha;\quad \tau_{r\theta}=0,\quad D\frac{\partial^4 v}{\partial r^4}=\sigma_\theta+q(r),\quad \theta=0 \tag{2.4}$$

К ним следует добавить одно из следующих условий закрепления конца балки:

$$\frac{\partial v}{\partial r}(r,0)=0,\quad r=0;\quad \int_0^\infty[\sigma_\theta(r,0)+q(r)]\,r\,dr=0 \tag{2.5}$$

Первое условие характеризует жесткое, а второе — шарнирное закрепления (условие свободного края эквивалентно шарнирному закреплению).

Реализация условий (2.4) приводит к задаче Карлемана (1.7), у которой

$$\Phi_1(p)=T(p)\,pB(p) \tag{2.6}$$

$$T(p)={}^1/_2[4\varkappa\sin^2\alpha p+4p^2\sin^2\alpha-(\varkappa+1)^2](\varkappa\sin 2\alpha p-$$
$$-p\sin 2\alpha)^{-1}$$

Пусть $c_2$ и $c_3$ — наибольшие вещественные части находящихся в левой полуплоскости корней уравнений $4\varkappa\sin^2\alpha p+4p^2\sin^2\alpha-(\varkappa+1)^2=0$ и $\varkappa\sin 2\alpha p-p\sin 2\alpha=0$ соответственно. Тогда в полосе $\gamma<\operatorname{Re}p<0$, $\gamma=\max\{-1,c_2,c_3\}$ функция $T(p)$ непрерывна, не обращается в нуль и имеет асимптотику $T(p)=\pm i$, $\operatorname{Im}p\to\pm\infty$. Кроме того, $[\arg T(p)]_\Omega=\pi$. Поэтому множитель $\operatorname{tg}{}^1/_2\pi p$, улучшавший коэффициент задачи (1.7) в п. 1 не подходит. Здесь его заменяет множитель $-\operatorname{ctg}{}^1/_2\pi p$. Действительно, функция

$$K(p)=-2\operatorname{ctg}{}^1/_2\pi p\,(\varkappa\sin 2\alpha p-p\sin 2\alpha)[4\varkappa\sin^2\alpha p+ \tag{2.7}$$
$$+4p^2\sin^2\alpha-(\varkappa+1)^2]^{-1}$$

в полосе $\gamma<\operatorname{Re}p<0$ обладает всеми необходимыми свойствами. С помощью функции (1.10), в выражении которой $\sin{}^1/_2\pi p$ заменен на $\cos{}^1/_2\pi p$, перейдем от задачи (1.7), (2.6) к задаче (1.11), (2.7). При этом в выражении для $H(p)$ следует заменить $\cos{}^1/_2\pi p$ на $-\sin{}^1/_2\pi p$. Поскольку функция $\Phi(p)$ в полосе $\Pi_0$ имеет уже только один полюс — точку $p=1$, то первая из формул (1.13) изменится и примет вид

$$\Phi(p)=X(p)\left[\frac{1}{6i}\int_\Omega\frac{H(s)\,ds}{X(x+3)\sin{}^1/_3\pi(p-s)}+\frac{C}{\sin{}^1/_3\pi(p-1)}\right]$$

Реализация условий (2.5) дает уравнения для постоянной $C$

$$C = Q_1(-2)[3\sqrt[3]{\lambda}X(1)]^{-1}, \quad \Phi(2) = {}^1/_4\lambda^{-2/3}Q_1(-1)$$

Первое из них соответствует случаю свободного конца балки, а второе — жестко защемленного.

Контактное напряжение $\sigma_\theta(r, 0)$ определяется интегралом (1.17), в котором $\sin {}^1/_2\pi p$ нужно заменить на $\cos {}^1/_2\pi p$. Анализируя этот интеграл, обнаружим, что, независимо от способа крепления конца балки, величина $\sigma_\theta^*$ при $r \to 0$ ограничена для $\alpha < {}^1/_2\pi$, для $\alpha = {}^1/_2\pi$ она имеет логарифмическую особенность, а для $\alpha > {}^1/_2\pi$ особенность становится степенной и имеет вид $r^{-c_3-1}$.

*Задача 3.* Пусть балка одной своей стороной контактирует с гранью $\theta = 0$ клина $A$ $(0 \leqslant r < \infty, -\beta \leqslant \theta \leqslant 0)$, а другой — с гранью $\theta = 0$ клина $B$ $(0 \leqslant r < \infty, 0 \leqslant \theta \leqslant \alpha)$. Пометим индексом 1 вверху все величины, характеризующие напряженное состояние клина $A$, а индексом 2 — клина $B$. Тогда краевые условия и условия свободного края для балки запишутся в виде

$$\begin{aligned}
(2.8)\qquad & \sigma_\theta^{(1)} = \tau_{r\theta}^{(1)} = 0, \quad \theta = -\beta; \quad \sigma_\theta^{(2)} = \tau_{r\theta}^{(2)} = 0, \quad \theta = \alpha \\
& \tau_{r\theta}^{(1)} = \tau_{r\theta}^{(2)} = 0, \quad v^{(1)} = v^{(2)}, \quad \theta = 0 \\
& D\frac{\partial^4 v^{(2)}}{\partial r^4} = \sigma_\theta^{(2)} - \sigma_\theta^{(1)} + q(r), \quad \theta = 0 \\
& \int_0^\infty [\sigma_\theta^{(2)} - \sigma_\theta^{(1)} + q(r)]\, r^k dr = 0, \quad k = 0, 1, \quad \theta = 0
\end{aligned}$$

Реализуя выписанные краевые условия, придем к задаче Карлемана (1.7). При этом

$$(2.9)\qquad T(p) = \frac{D}{4\lambda}\left[\frac{2G^{(2)}}{\varkappa^{(2)}+1}\frac{\sin^2\alpha p - p^2\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha p + p\sin 2\alpha} + \frac{2G^{(1)}}{\varkappa^{(1)}+1}\frac{\sin^2\beta p - p^2\sin^2\beta}{\sin 2\beta p + p\sin 2\beta}\right]$$

$$\lambda = \frac{D}{4}\left[\frac{G^{(2)}}{\varkappa^{(2)}+1} + \frac{G^{(1)}}{\varkappa^{(1)}+1}\right]^{-1}, \quad \Phi_1(p) = \frac{4\lambda(\varkappa^{(2)}+1)}{DG^{(2)}}T(p)pB^{(2)}(p)$$

Предположим, что функция $T(p)$ не имеет нулей в полосе $\gamma < \operatorname{Re} p < 0$, $\gamma = \max\{-1, c_1^{(1)}, c_1^{(2)}\}$, где $c_1^{(1)}$ и $c_1^{(2)}$ — наибольшие вещественные части находящихся в левой полуплоскости корней уравнений $\sin 2\beta p + p\sin 2\beta = 0$ и $\sin 2\alpha p + p\sin 2\alpha = 0$ соответственно.

При $\alpha = \beta$ это проверяется достаточно просто. Кроме того, подтверждением этому предположению могут служить следующие соображения. В случае наличия нулей у функции $T(p)$ в полосе $\gamma < \operatorname{Re} p < 0$ можно показать, опираясь на принцип аргумента, что решение задачи (1.7), (2.9) будет содержать число произвольных постоянных, не равное двум, а это приведет либо к противоречию с единственностью решения разбираемой механической задачи, либо к несуществованию ее решения.

Принимая это предположение за основу, легко показать, что функция $T(p) \in H_\Omega$, если $\gamma < \operatorname{Re} p_0 < 0$, и что $[\arg T(p)]_\Omega = -\pi$. Тогда функция (1.10) приводит задачу (1.7), (2.9) к задаче (1.11), (2.9), решение которой дают формулы (1.13). Произвольные постоянные $C_1$ и $C_2$, входящие в решение, фиксируются условиями равновесия для балки (2.8). От этих условий легко перейти к уравнениям (1.16), определяющим постоянные $C_1$ и $C_2$, если воспользоваться формулами

$$\Sigma^{(2)}(p,0)-\Sigma^{(1)}(p,0)+Q(p)=0,\quad p=0,1$$

$$2[\Phi_1(p)]_+=\Sigma^{(2)}(p,0)-\Sigma^{(1)}(p,0)$$

Выражения для контактных напряжений $\sigma_\theta^{(1)}(r,0)$ и $\sigma_\theta^{(2)}(r,0)$ получим из интеграла (1.17), умножив подынтегральное выражение соответственно на функции $f^{(1)}(p)$ и $f^{(2)}(p)$, имеющие вид

$$f^{(1)}(p)=-DG^{(1)}(\sin^2\beta p-p^2\sin^2\beta)[2\lambda(\varkappa^{(1)}+1)(\sin 2\beta p+ \\ +p\sin 2\beta)T(p)]^{-1}$$

$$f^{(2)}(p)=DG^{(2)}(\sin^2\alpha p-p^2\sin^2\alpha)[2\lambda(\varkappa^{(2)}+1)(\sin 2\alpha p+ \\ +p\sin 2\alpha)T(p)]^{-1}$$

Анализ поведения контактных напряжений при $r\to 0$ показывает, что для $\beta,\alpha<{}^1/_2\pi$ напряжения $\sigma_\theta^{(1,2)}(r,0)$ имеют нуль порядка $\mu^{(1,2)}=\max\{1,c_1^{(1,2)}-1\}$, для $\beta=\alpha={}^1/_2\pi$ эти напряжения ограничены, а для $\beta,\ \alpha>{}^1/_2\pi$ они имеют степенную особенность порядка — $c_1^{(1,2)}-1$ соответственно.

Метод, которым получено точное решение задачи 3, позволяет получить точные решения целой серии задач, отличающихся от задачи 3 лишь краевыми условиями на гранях $\theta=-\beta$ и $\theta=\alpha$ (в том числе и неоднородными).

Поступила 1 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Г. Я., Тихоненко Л. Я.* Плоская задача о контакте полубесконечной балки с упругим клином. ПММ, 1974, т. 38, вып. 2.
2. *Тихоненко Л. Я.* Плоская смешанная задача теплопроводности для клина. Дифференциальные уравнения, 1973, т. 9, № 10.
3. *Тихоненко Л. Я.* Плоская контактная задача для упругого клина и сцепленного с ним полубесконечного упругого стержня. В сб.: Устойчивость и прочность элементов конструкций. Изд-во Днепропетровск. ун-та, 1973.
4. *Черский Ю. И.* Нормально разрешимое уравнение плавного перехода. Докл. АН СССР, 1970, т. 190, № 1.
5. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
6. *Попов Г. Я.* Об одном интегро-дифференциальном уравнении. Укр. матем. ж., 1960, т. 12, № 1.
7. *Банцури Р. Д.* Контактная задача для клина с упругим креплением. Докл. АН СССР, 1973, т. 211, № 4.
8. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
10. *Попов Г. Я.* О расчете неограниченной шарнирно разрезной балочной плиты, лежащей на упругом полупространстве. Изв. вузов. Стр-во и архит-ра, 1959, № 3.
11. *Попов Г. Я.* Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на линейно-деформируемом основании. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.