Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 539.3

О ДЕФОРМИРОВАНИИ СПЛОШНЫХ СРЕД В КЛИНОВИДНОЙ ОБЛАСТИ С ГЛАДКИМИ ГРАНЯМИ

А. Д. Чернышов

(Воронеж)

В квазистационарной постановке рассматривается краевая задача о деформировании изотропных реологических сред в клиновидной области. Деформирование среды происходит из-за изменения угла раствора между плоскими гранями клина, образующими плоский диффузор, а также вследствие расхода массы через этот диффузор. Грани клина предполагаются идеально гладкими. Независимо от конкретных свойств среды удается определить поле перемещений с точностью до одной произвольной функции, не зависящей от полярного угла, при этом выполняются все граничные условия задачи. Показано, что при квазистационарной постановке задачи частная производная по времени определяется через частные производные по углу раствора диффузора и по величине расходуемой массы, которые предполагаются переменными. Эта формула для частной производной по времени позволяет выразить любую кинематическую характеристику (скорость, деформацию, скорость деформации и т. д.) через перемещения. Удается проинтегрировать уравнения равновесия и определить поле напряжений с точностью до одной произвольной функции, не зависящей от полярного угла. Таким образом, решение краевых задач о деформировании сплошных сред в клиновидной области с гладкими гранями сводится к нахождению зависимости двух произвольных функций от радиуса после подстановки найденных полей напряжений и перемещений в определяющее уравнение изучаемой среды.

Известны некоторые решения задач о деформировании сплошных сред в клиновидной области. Это — решение Гамеля [1] о расходе вязкой жидкости через плоский диффузор, решение Шилда [2] о продавливании жесткопластического материала через клиновидную матрицу. Несколько решений задач о малых плоских деформациях нелинейно-упругого клина приводится в монографии [3]. Точные решения задач о больших деформациях несжимаемого упругого клина с произвольным упругим потенциалом получены в [4]. Кроме отмеченных работ еще известны многочисленные результаты исследований деформирования сплошных сред в клиновидной области [5] и др.

1. Рассмотрим кинематику деформирования сплошной среды в клиновидной области, когда угол раствора диффузора медленно изменяется и задан расход массы через этот диффузор. Из условия гладкости стенок диффузора вытекает, что сдвиговая компонента $E_{r\theta}$ тензора конечных деформаций Альманси $\mathbf{E}$ [6] и сдвиговая компонента $\varepsilon_{r\theta}$ тензора скорости деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ на гранях клина равны нулю. Тензоры E_{ij} и ε_{ij} выражаются через перемещения $\mathbf{u}$ и скорость $\mathbf{v}$ среды по формулам

$$\mathbf{E} = {}^1/_2(\mathbf{U} + \mathbf{U}^* - \mathbf{U}^*\mathbf{U}), \quad \boldsymbol{\varepsilon} = {}^1/_2(\mathbf{V} + \mathbf{V}^*) \tag{1.1}$$

$$\mathbf{U} = \begin{Vmatrix} u_{r,r} & \dfrac{u_{r,\theta} - u_\theta}{r} \\ u_{\theta,r} & \dfrac{u_{\theta,\theta} + u_r}{r} \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{Vmatrix} v_{r,r} & \dfrac{v_{r,\theta} - v_\theta}{r} \\ v_{\theta,r} & \dfrac{v_{\theta,\theta} + v_r}{r} \end{Vmatrix}$$

Звездочка вверху над тензором означает транспонирование.

Так как задача симметрична относительно биссектрисы плоского угла диффузора для изотропных сред, то компоненты $E_{r\theta}$ и $\varepsilon_{r\theta}$ будут равны нулю на этой биссектрисе. Таким образом, задача о деформировании среды в клине с углом раствора α равносильна той же задаче для клина с углом раствора $\alpha/2$. Для клина же с углом раствора $\alpha/2$ задача вновь будет симметричной относительно биссектрисы для угла $\alpha/2$ и, следовательно, на этой биссектрисе компоненты $E_{r\theta}$ и $\varepsilon_{r\theta}$ тоже будут равны нулю. Проводя подобные рассуждения далее, приходим к выводу, что в рассматриваемой задаче для произвольных изотропных сред имеют место равенства

$$(1.2)\qquad 2E_{r\theta} = u_{\theta,r} + \frac{1}{r}(u_{r,\theta} - u_\theta) - \frac{1}{r}u_{r,r}(u_{r,\theta} - u_\theta) - \\ - \frac{1}{r}u_{\theta,r}(u_{\theta,\theta} + u_r) = 0, \quad 2\varepsilon_{r\theta} = v_{\theta,r} + \frac{1}{r}(v_{r,\theta} - v_\theta) = 0$$

Из отсутствия сдвига материала вытекает, что все материальные плоскости, проведенные через ребро клина, деформируются одинаково, а поле деформаций $\mathbf{E}$ и скоростей деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$ не зависят от полярного угла θ, т. е.

$$(1.3)\qquad \mathbf{E} = \mathbf{E}(r), \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(r)$$

Свойства (1.2) и (1.3) доказывают, что материальные частицы, которые до деформации среды лежали на цилиндрической поверхности $r_0 = \text{const}$, после деформации будут лежать на новой цилиндрической поверхности $r = \text{const}$ и что материальные частицы, лежащие на плоскости $\theta_0 = \text{const}$ до деформации среды в клине, после деформации будут лежать на некоторой плоскости $\theta = \text{const}$. Эти свойства деформирования материальных поверхностей в области клина предполагались в работе [4], после чего удалось получить выражения для перемещений с двумя произвольными функциями $f_1(r)$ и $\varphi(\theta)$

$$(1.4)\qquad u_r = r - \frac{f_1(r)}{\sqrt{1+\varphi^2(\theta)}}, \quad u_\theta = -\frac{f_1(r)\varphi(\theta)}{\sqrt{1+\varphi^2(\theta)}}$$

Подстановка перемещений из (1.4) в выражение для $E_{r\theta}$ из (1.2) приводит к тождеству, для E_{rr} из (1.1) — к выполнению свойства (1.3), а в выражение для $E_{\theta\theta}$ после выполнения условия, что $E_{\theta\theta}$ не должно зависеть от угла θ, — к уравнению для определения функции $\varphi(\theta)$

$$(1.5)\qquad \frac{d\varphi}{d\theta}\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}} = B_1$$

где B_1 — произвольная постоянная. Решение уравнения (1.5) имеет вид

$$(1.6)\qquad \varphi = \operatorname{tg}(B_1\theta + B_2)$$

Отличные от нуля компоненты тензора Альманси из (1.1) выражаются через одну произвольную функцию $f_1(r)$ по формулам

$$(1.7)\qquad E_{rr} = \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{df_1}{dr}\right)^2\right], \quad E_{\theta\theta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{f_1(r)(1+B_1)}{r}\right]^2$$

Скорость $\mathbf{v}$ выражается через перемещения $\mathbf{u}$ в полярной системе координат по формулам

$$v_r = \frac{\partial u_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta\right) \tag{1.8}$$
$$v_\theta = \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right)$$

Напомним, что все рассмотрения проводятся в квазистационарной постановке, тем не менее в (1.8) нельзя пренебрегать частными производными по времени от перемещений. Очевидно, что если угол раствора диффузора α и количество массы q, протекшей через диффузор, не изменять во времени, то перемещения u_r и u_θ тоже будут неизменными, а скорость v_r и v_θ обратится в нуль. Таким образом, u_r и u_θ зависят не только от координат r и θ, но и от параметров α и q, т. е. $\mathbf{u} = \mathbf{u}(r, \theta, \alpha, q)$.

Параметры α и q зависят только от времени, и поэтому перемещения $\mathbf{u}$ зависят от времени только через зависимости $\alpha(t)$ и $q(t)$. Отсюда следует, что функция f_1 и величины B_1, B_2 тоже зависят от параметров $\alpha(t)$ и $q(t)$, т. е. $f_1 = f_1(r, \alpha, q)$, $B_i = B_i(\alpha, q)$, $i = 1, 2$, а частная производная по времени выражается через частные производные по параметрам α и q по формуле

$$\frac{\partial}{\partial t} = \omega \frac{\partial}{\partial \alpha} + Q \frac{\partial}{\partial q}, \quad \frac{d\alpha}{dt} = \omega, \quad \frac{dq}{dt} = Q$$

Пусть плоскости граней клина записываются уравнениями $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \alpha(t)$. Из равноправия деформирования материальных плоскостей $\theta = \mathrm{const}$ и из условия отсутствия скорости сдвига материала следует, что

$$v_\theta = \frac{\omega}{\alpha} r\theta, \quad v_r = f_2(r) \tag{1.9}$$

где f_2 — произвольная функция, не зависящая от угла θ. После подстановки (1.4) и (1.9) в (1.8) получим два уравнения

$$\omega \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} + Q \frac{\partial f_1}{\partial q} + \frac{\partial f_1}{\partial r} f_2 = 0 \tag{1.10}$$
$$\omega f_1 \left(\frac{\partial B_1}{\partial \alpha}\theta + \frac{\partial B_2}{\partial \alpha}\right) + Q f_1 \left(\frac{\partial B_1}{\partial q}\theta + \frac{\partial B_2}{\partial q}\right) + \frac{\omega\theta}{\alpha} f_1 (1 + B_1) = 0$$

Из первого уравнения (1.10) видно, что функция f_2 представима в виде

$$f_2 = f_{2\alpha}\omega + f_{2q} Q, \quad f_{2\alpha} = -\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} \Big/ \frac{\partial f_1}{\partial r}, \quad f_{2q} = -\frac{\partial f_1}{\partial q} \Big/ \frac{\partial f_1}{\partial r}$$

т. е.

$$v_r = -\left(\omega \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} + Q \frac{\partial f_1}{\partial q}\right) \Big/ \frac{\partial f_1}{\partial r} \tag{1.11}$$

Величины f_1, B_1 и B_2, входящие во второе уравнение (1.10), не зависят от ω и Q, поэтому, приравнивая нулю коэффициенты перед ω и перед Q в отдельности, будем иметь равенства

$$\frac{\partial B_1}{\partial \alpha}\theta + \frac{\partial B_2}{\partial \alpha} + \frac{\theta}{\alpha}(1 + B_1) = 0, \quad \frac{\partial B_1}{\partial q}\theta + \frac{\partial B_2}{\partial q} = 0$$

Так как B_1 и B_2 не зависят от θ, то отсюда получаем

$$\frac{\partial B_1}{\partial \alpha}+\frac{1+B_1}{\alpha}=0,\quad \frac{\partial B_2}{\partial q}=\frac{\partial B_2}{\partial \alpha}=\frac{\partial B_1}{\partial q}=0$$

Решение этих уравнений с граничным условием $\varphi(\theta)=0$ при $\alpha(0)=\alpha_0$ имеет вид

$$B_1=\alpha_0/\alpha-1,\quad B_2=k\pi,\quad k=0,1,2,\ldots$$

Окончательно для функции $\varphi(\theta)$ получаем выражение

$$\varphi(\theta)=\operatorname{tg}(\alpha_0/\alpha-1)\,\theta$$

Таким образом, кинематика деформирования изотропной сплошной среды полностью определена с точностью до одной произвольной функции $f_1(r,\alpha,q)$, которая должна быть найдена после задания конкретных свойств материала. Обычно зависимость функции f_1 от параметров α и q в процессе решения краевой задачи сразу не удается найти. Тогда правая часть выражения (1.11) для скорости v_r тоже становится неопределенной. В таких случаях вместо (1.11) для v_r удобнее пользоваться выражением (1.9), считая f_2 неизвестной функцией. Отличные от нуля компоненты тензора скоростей деформаций выражаются через $f_2(r)$ по формулам

$$\varepsilon_{rr}=\frac{df_2(r)}{dr},\quad \varepsilon_{\theta\theta}=\frac{f_2(r)}{r}+\frac{\omega}{\alpha}$$

Главные направления тензоров $\mathbf{E}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ совпадают с направлениями осей полярной системы координат. Пользуясь этим обстоятельством, запишем выражение плотности среды через главные значения тензора Альманси в форме Лагранжа [6]

$$\rho=\rho_0\sqrt{(1-2E_{rr})(1-2E_{\theta\theta})}$$

где ρ_0 — начальная плотность до деформации. Подставляя сюда (1.7), получим

$$\rho=\frac{\alpha_0\rho_0}{\alpha r}\left|f_1\frac{df_1}{dr}\right| \tag{1.12}$$

Подстановка выражений (1.9), (1.11) и (1.12) в уравнение неразрывности приводит к тождеству. Остается рассмотреть закон сохранения расходуемой массы через диффузор, играющий роль граничного условия. Обычно в задачах о продавливании массы через плоский диффузор, когда угол раствора диффузора постоянный, этот закон записывают в виде

$$Q=\int_0^\alpha \rho v_r r\,d\theta \tag{1.13}$$

В рассматриваемом случае угол раствора диффузора α изменяется со временем, что необходимо учесть в (1.13). За время Δt угол раствора диффузора изменится на величину $\Delta\alpha$. Внесенная в диффузор масса среды $\Delta q=Q\Delta t$ расходуется на перетекание через поверхность $r=\mathrm{const}$ и на заполнение сектора с центральным углом $\Delta\alpha$ и радиусом r, т. е.

$$Q\Delta t=\Delta t\int_0^\alpha \rho v_r r\,d\theta+\Delta\alpha\int_0^r \rho r\,dr \tag{1.14}$$

В пределе при $\Delta t \to 0$ из (1.14) получаем искомый закон сохранения расходуемой массы

$$Q = \int_0^\alpha \rho v_r r d\theta + \omega \int_0^r \rho r dr \tag{1.15}$$

При помощи (1.11) и (1.12) закон (1.15) приводится к виду

$$-Q = \alpha_0\rho_0\beta f_1 \left(\omega \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} + Q \frac{\partial f_1}{\partial q}\right) + \alpha_0\rho_0\omega \frac{\beta}{2\alpha} [f_1^2 - f_1^2(0)] \tag{1.16}$$

$$\beta = \operatorname{sign}\left(f_1 \frac{df_1}{dr}\right)$$

Как и при рассмотрении уравнения (1.10), приравнивая коэффициенты перед Q и ω в отдельности в (1.16), получим два равенства

$$2\alpha f_1 \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} = f_1^2(r) - f_1^2(0), \quad \alpha_0\rho_0 f_1 \frac{\partial f_1}{\partial q} = -\beta \tag{1.17}$$

Из второго уравнения в (1.17) получим

$$f_1^2 = C(\alpha, r) - \frac{2\beta}{\alpha_0\rho_0} q \tag{1.18}$$

где $C(\alpha, r)$ — произвольная функция. Подстановка (1.18) в первое равенство (1.17) приводит к уравнению для определения функции $C(\alpha, r)$

$$\alpha \partial C / \partial \alpha = C(\alpha, r) - C(\alpha, 0) \tag{1.19}$$

Если расход массы отсутствует ($q = 0$), то материальные частицы на ребре клина остаются неподвижными при смыкании граней этого клина. Это означает, что при $r = q = 0$ перемещения равны нулю

$$f_1(r, \alpha, q) = 0 \quad \text{при } r = q = 0 \tag{1.20}$$

Полагая в (1.18) $r = q = 0$, получим

$$C(\alpha, 0) = 0 \tag{1.21}$$

Решение уравнения (1.19) при условии (1.21) имеет вид

$$C(\alpha, r) = \beta C_1(r)\alpha, \quad C_1(0) = 0 \tag{1.22}$$

где $C_1(r)$ — произвольная функция. Подставляя (1.22) в (1.18), придем к выражению для $f_1^2(r, \alpha, q)$

$$f_1^2(r, \alpha, q) = \beta\left[\alpha C_1(r) - \frac{2q}{\alpha_0\rho_0}\right] \tag{1.23}$$

Чтобы установить одно важное свойство функции $C_1(r)$, продифференцируем по переменной r равенство (1.23)

$$2f_1\partial f_1 / \partial r = \beta\alpha dC_1 / dr \tag{1.24}$$

Знак левой части равенства (1.24) совпадает со знаком величины β, определенной в (1.17), поэтому из (1.24) следует

$$dC_1 / dr \geqslant 0, \quad C_1(r) \geqslant 0, \quad C_1(0) = 0 \tag{1.25}$$

т. е. $C_1(r)$ — положительная, монотонно возрастающая функция. Интересный смысл имеет значение $r = r^*$, при котором правая часть (1.23) обращается в нуль

(1.26) $$C_1(r^*) = 2q / (\alpha_0\alpha\rho_0)$$

В силу свойства (1.25) уравнение (1.26) имеет единственное решение только при $q > 0$, т. е. когда масса среды поступает в диффузор через бесконечно узкую щель в его ребре. При обратном процессе, когда масса среды выдавливается из диффузора и $q < 0$, уравнение (1.26) не имеет решения. Радиус r^* отделяет массу среды, которая находилась в диффузоре до начала процесса вдавливания, от вдавливаемой массы среды. Это следует из того, что $u_r = r$, $u_\theta = 0$ при $r = r^*$, а также из тождества

$$q \equiv \alpha \int_0^{r^*} \rho r dr$$

Из условия положительности обеих частей равенства (1.23) следует, что знак величины β совпадает со знаком выражения в квадратных скобках равенства (1.23). В силу монотонности функции $C_1(r)$ будут выполняться соотношения

при $q > 0$: $\beta = 1$ при $r > r^*$, $\beta = -1$ при $r \leqslant r^*$; при $q \leqslant 0$: $\beta = 1$

Подставляя (1.23) в (1.4), (1.7), (1.11) и в выражения для ε_{rr} и $\varepsilon_{\theta\theta}$, получим выражения для перемещений, скоростей и главных значений тензоров деформаций и скоростей деформаций

(1.27) $$u_r = r - \sqrt{B}\cos\left(\frac{\alpha_0}{\alpha} - 1\right)\theta, \quad u_\theta = -\sqrt{B}\sin\left(\frac{\alpha_0}{\alpha} - 1\right)\theta$$

$$B = \beta\left[\alpha C_1(r) - \frac{2q}{\alpha_0\rho_0}\right]$$

$$v_r = \frac{2Q}{\alpha_0\alpha\rho_0 C_1'(r)} - \frac{\omega C_1(r)}{\alpha C_1'(r)}, \quad v_\theta = \frac{\omega}{\alpha} r\theta$$

$$E_{rr} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha^2 C_1'^2}{4B}\right), \quad E_{\theta\theta} = \frac{1}{2} - \frac{B\alpha_0^2}{2\alpha^2 r^2}$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\omega(C_1 C_1'' - C_1'^2)}{\alpha C_1'^2} - \frac{2QC_1''}{\alpha_0\alpha\rho_0 C_1'^2}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\omega}{\alpha} - \frac{\omega C_1}{\alpha r C_1'} + \frac{2Q}{\alpha_0\alpha\rho_0 r C_1'}$$

Из (1.27) видно, что $E_{\theta\theta} \to 1/2$ и $E_{rr} \to -\infty$ при $r \to r^*$. Это означает, что при приближении к поверхности $r = r^*$ материальные элементы начинают испытывать неограниченное сжатие в радиальном и неограниченное растяжение в окружном направлениях. Заметим еще, что если произведение $\omega Q > 0$, то существует радиус r^{**}, который разделяет два встречных течения. Из условия $v_r = 0$ радиус r^{**} определяется как корень уравнения $C_1(r^{**}) = 2Q / (\alpha_0\omega\rho_0)$.

Для несжимаемой сплошной среды после подстановки условия $\rho = \rho_0$ в (1.12) получим $C_1(r) = r^2 / \alpha_0$. В этом случае при условии $q = Q = 0$ деформация и скорости деформаций постоянны во всей области клина.

2. Перейдем к изучению напряжений в рассматриваемой задаче. Считаем, что всюду в области клина сдвиг и скорость сдвига равны нулю. Поэтому естественно предположить, что в данном случае для изотропных сплошных сред касательное напряжение τ будет отсутствовать: $\tau = 0$.

Предположим еще, что в силу равноправия деформирования всех материальных плоскостей, проходящих через ребро клина, напряжения σ подобно тензорам E и ε не зависят от угла θ : $\sigma = \sigma(r)$. Тогда уравнения равновесия интегрируются

$$\sigma_{rr} = \frac{f_3(r)}{r}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{df_3(r)}{dr}, \quad \tau = 0 \tag{2.1}$$

где $f_3(r)$ — произвольная функция, зависящая только от радиуса r, параметров задачи α, q, производных по времени от этих параметров и физических констант, описывающих свойства материала.

Полученные выражения (1.27) и (2.1) значительно упрощают решение краевой задачи о продавливании сплошной среды через плоский диффузор с изменяющимся углом раствора.

Запишем определяющее уравнение для изотропной сплошной среды в виде

$$F_{kl}(\sigma_{ij}, E_{ij}) = 0 \tag{2.2}$$

где F_{kl} — тензорный интегродифференциальный оператор. Подстановка соответствующих выражений из (1.27) и (2.1) в (2.2) при $k = l = r$ и $k = l = \theta$ приводит к двум интегродифференциальным уравнениям. Так как соотношения (1.27) и (2.1) заранее обеспечивают выполнение граничных условий, а также выполнение уравнений равновесия и сохранения массы, то решение указанных двух интегродифференциальных уравнений относительно двух неизвестных функций $C_1(r)$ и $f_3(r)$ является искомым решением рассматриваемой краевой задачи.

Поступила 20 I 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика, т. 2. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
2. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. М., «Высшая школа», 1969.
3. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. Киев, «Наукова думка», 1968.
4. *Чернышова Р. В., Чернышов А. Д.* Некоторые точные решения задач о конечных деформациях упругого клина. Прикл. механика, 1973, т. 9, вып. 9.
5. *Швед Г. Л.* Расход вязко-пластической среды в некруглой трубе. Прикл. механика, 1972, т. 8, вып. 2.
6. *Седов Л. И.* Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.