Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ С НЕИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЕЙ И ОПРЕДЕЛЕНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ФОРМ УПРУГИХ ТЕЛ

Н. В. Баничук

(Москва)

Рассматривается задача оптимизации для одного уравнения в частных производных эллиптического типа. Граница области, в которой задано уравнение, выступает в качестве управляющей функции и подлежит определению из условия экстремума интеграла от решения краевой задачи. Отыскание экстремалей сведено к решению вариационной задачи без дифференциальных связей. Получены необходимые условия оптимальности, и с их помощью найдены формы упругих стержней, обладающих максимальной жесткостью при кручении.

1. Постановка задачи оптимизации и исключение дифференциальной связи. Рассмотрим краевую задачу для уравнения в частных производных

$$(a\varphi_x - c\varphi_y)_x + (b\varphi_y - c\varphi_x)_y + m = 0 \quad (x, y) \in D \tag{1.1}$$

$$\varphi = 0 \quad (x, y) \in \Gamma \tag{1.2}$$

Коэффициенты уравнения (1.1) a, b, c предполагаются заданными функциями переменных x, y, а $m > 0$ — заданная константа; Γ — граница односвязной области D.

Сформулируем следующую оптимизационную задачу. Требуется определить гладкую замкнутую линию Γ, удовлетворяющую изопериметрическому условию постоянства площади области D

$$\iint\limits_D dx\,dy = S \tag{1.3}$$

и такую, что для решения $\varphi(x, y)$ краевой задачи (1.1), (1.2) с данной границей Γ реализуется максимум интегрального функционала

$$K(\Gamma) = \iint\limits_D \varphi(x, y)\,dx\,dy \to \max\nolimits_\Gamma \tag{1.4}$$

Величина S, фигурирующая в (1.3) — заданная константа.

Задача оптимизации (1.1) — (1.4) относится к изопериметрическим вариационным задачам с дифференциальными связями. Роль дифференциальной связи, изопериметрического условия и управляющей функции в ней соответственно играют уравнение (1.1), равенство (1.3) и форма контура Γ.

В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты уравнения (1.1) удовлетворяют условиям

$$a > 0, \quad ab - c^2 > 0 \tag{1.5}$$

Предположение (1.5) позволяет свести задачу оптимизации (1.1) — (1.4) к вариационной задаче без дифференциальных связей. Действительно, для заданного контура Г и при выполнении условий (1.5) решение краевой задачи (1.1), (1.2) реализует минимум функционала

$$J = \iint\limits_D (a\varphi_x^2 - 2c\varphi_x\varphi_y + b\varphi_y^2 - 2m\varphi)\, dx\, dy \tag{1.6}$$

рассматриваемого на класс функций $\varphi = \varphi(x, y)$, удовлетворяющих граничному условию (1.2). В справедливости данного утверждения нетрудно убедиться, выписывая для функционала (1.6) уравнение Эйлера и замечая, что оно совпадает с уравнением (1.1), а также замечая, что известные достаточные условия абсолютного минимума квадратичного функционала (см., например, [1]) в рассматриваемом случае совпадают с неравенствами (1.5).

Для осуществления редукции к задаче без дифференциальных связей покажем, что для функции $\varphi(x, y)$, минимизирующей функционал (1.6) при условии (1.2), имеет место равенство

$$J = -mK \tag{1.7}$$

Равенство (1.7) является непосредственным обобщением на уравнение (1.1) соответствующего соотношения, известного для уравнения Пуассона [2]. Оно вытекает из следующего преобразования, в котором используются соотношения (1.1), (1.2), (1.4), (1.6):

$$\begin{aligned} mK &= \iint\limits_D \varphi m\, dx\, dy = -\iint\limits_D \varphi\, [(a\varphi_x - c\varphi_y)_x + (b\varphi_y - c\varphi_x)_y]\, dx\, dy = \\ &= \iint\limits_D [\varphi_x(a\varphi_x - c\varphi_y) + \varphi_y(b\varphi_y - c\varphi_x)]\, dx\, dy - \\ &- \int\limits_\Gamma \varphi\, ((a\varphi_x - c\varphi_y)\, dy - (b\varphi_y - c\varphi_x))\, dx = \\ &= \iint\limits_D (a\varphi_x^2 - 2c\varphi_x\varphi_y + b\varphi_y^2)\, dx\, dy = J + 2mK \end{aligned}$$

Соотношение (1.7) может быть записано в следующем виде:

$$K = -\frac{1}{m}\min\nolimits_\varphi J$$

Отсюда и из формул (1.5), (1.6) окончательно получим

$$\begin{aligned} K_* &= \max\nolimits_\Gamma K(\Gamma) = \\ &= -\min\nolimits_\Gamma \min\nolimits_\varphi \frac{1}{m}\iint\limits_D (a\varphi_x^2 - 2c\varphi_x\varphi_y + b\varphi_y^2 + 2m\varphi)\, dx\, dy \end{aligned} \tag{1.8}$$

Таким образом, исходная задача оптимизации (1.1) — (1.4) свелась к вариационной задаче (1.2), (1.3), (1.8). Для решения задачи (1.2), (1.3), (1.8) требуется последовательно вычислить минимумы по φ и по Г. Внутренний минимум по φ в (1.8) вычисляется при заданной форме контура Г и граничном условии (1.2). Внешний минимум по Г разыскивается при изопериметрическом условии (1.3).

2. Необходимые условия экстремума. Рассмотрим вариационную задачу (1.2), (1.3), (1.8) и выведем условия, которым удовлетворяют ее экстремали (контур Г и функция $\varphi(x, y)$). С этой целью выпишем выражение для первой вариации интеграла (1.8)

$$\delta J = -2\iint \delta\varphi\,[(a\varphi_x - c\varphi_y)_x + (b\varphi_y - c\varphi_x)_y + m]\,dx\,dy + \tag{2.1}$$
$$+ 2\int_\Gamma \delta\varphi\,[(a\varphi_x - c\varphi_y)\,dy - (b\varphi_y - c\varphi_x)\,dx] +$$
$$+ \int_\Gamma \delta f\,(a\varphi_x^2 + b\varphi_y^2 - 2c\varphi_x\varphi_y - 2m\varphi)\,ds$$

Через δf в (2.1) обозначены нормальные смещения точек границы. Так как на контуре Г имеет место условие (1.2), то $\delta\varphi = 0$ ($(x, y) \in \Gamma$), и, следовательно, второй интеграл в правой части (2.1) равен нулю. Кроме того из условия (1.2) следует обращение в нуль члена $2m\varphi$ в третьем интеграле. Далее, используя произвольность функции $\delta\varphi$, а также условие экстремума $\delta J = 0$ и проводя стандартные рассуждения ([3]), получим, что функция $\varphi(x, y)$, реализующая экстремум рассматриваемого функционала, обращает в нуль выражение, записанное в квадратных скобках в первом интеграле (2.1). Уравнение Эйлера по φ совпадает с (1.1). В дальнейшем предполагаем, что функция φ удовлетворяет этому уравнению. Следовательно, для обращения в нуль первой вариации ($\delta J = 0$) необходимо, чтобы имело место равенство

$$\int_\Gamma \delta f\,(a\varphi_x^2 - 2c\varphi_x\varphi_y + b\varphi_y^2)\,ds = 0 \tag{2.2}$$

Вариация δf согласно (1.3) должна удовлетворять следующему изопериметрическому условию:

$$\int_\Gamma \delta f\,ds = 0 \tag{2.3}$$

Из соотношений (2.2), (2.3) имеем

$$a\varphi_x^2 - 2c\varphi_x\varphi_y + b\varphi_y^2 = \lambda^2, \quad (x, y) \in \Gamma \tag{2.4}$$

где через λ^2 обозначена неизвестная константа (множитель Лагранжа). Условие (2.4) служит для определения оптимального контура и замыкает совместно с соотношением (1.3) (из (1.3) определяется значение постоянной λ^2) краевую задачу (1.1), (1.2).

3. Оптимальная форма скручиваемого упругого стержня. В прямоугольной системе координат xyz рассмотрим задачу о кручении упругого анизотропного стержня. Ось z направим параллельно оси стержня. Обозначим через D область поперечного сечения стержня плоскостью xy, а через Г — границу области D. Стержень будем предполагать сплошным и, следовательно, область D является односвязной. Пусть кручение происходит вокруг оси z. Выразим отличные от нуля компоненты тензора напряжений τ_{xz} и τ_{yz} через функцию напряжений $\varphi(x, y)$ соотношениями

$$\tau_{xz} = \theta\varphi_y, \quad \tau_{yz} = -\theta\varphi_x \tag{3.1}$$

где θ — угол закручивания, приходящийся на единицу длины стержня. Функция напряжений $\varphi(x, y)$, как известно (см., например, [4]), определяется из решения краевой задачи для уравнения

$$a\varphi_{xx} - 2c\varphi_{xy} + b\varphi_{yy} = -2 \tag{3.2}$$

с граничным условием (1.2). Через a, b, c в (3.2) обозначены коэффициенты деформации анизотропного материала. Эти коэффициенты, как известно (см. [4]), удовлетворяют условиям (1.5). Будем предполагать заданными длину стержня и его объем. Это предположение приводит к изопериметрическому условию (1.3).

Поставим задачу об отыскании формы стержня (формы его поперечного сечения D), для которой выполняется условие (1.3) и достигается максимум жесткости стержня при кручении

$$K = 2\iint\limits_D \varphi\, dx\, dy \to \max{}_\Gamma \tag{3.3}$$

Момент кручения M, жесткость K и угол закручивания θ, приходящийся на единицу длины стержня, связаны соотношением $M = K\theta$.

Сформулированная оптимизационная задача (3.2), (3.3) является частной по отношению к задаче (1.1) — (1.4), и поэтому для определения оптимальной формы стержня можно использовать условие (2.4). Решение краевой задачи (1.2), (2.4), (3.2) с условием (1.3) имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{2(ab-c^2)}\left[\frac{S}{\pi}\sqrt{ab-c^2} - bx^2 - 2cxy - ay^2\right] \tag{3.4}$$

$$\Gamma:\ bx^2 + 2cxy + ay^2 = \pi^{-1}S\sqrt{ab-c^2} \tag{3.5}$$

Жесткость стержня оптимального сечения (3.6), вычисленная на основании формул (3.3) — (3.5) равна

$$K_* = \frac{S^2}{2\pi\sqrt{ab-c^2}} \tag{3.6}$$

Сравним жесткости стержней оптимального сечения (3.5) и круглого сечения. Учитывая, что жесткость стержня круглого сечения равна $K_0 = S^2 / \pi(a+b)$ и предполагая равными площади поперечных сечений стержней, приходим к следующей формуле, служащей для оценки выигрыша за счет оптимизации:

$$\frac{K_* - K_0}{K_0} = \frac{1}{\beta} - 1, \quad \beta = \frac{2\sqrt{ab-c^2}}{a+b}$$

Как известно, коэффициенты деформации анизотропного материала a, b, c удовлетворяют неравенствам (1.5). Учитывая это, нетрудно показать, что $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. Для ортотропного материала $c = 0$, $a = 1/G_1$, $b = 1/G_2$, где через G_1 и G_2 обозначены модули сдвига, соответствующие координатам x и y. В этом случае эффективность оптимизации оценивается формулой $(K_* - K_0) / K_0 = (G_1 + G_2) / 2\sqrt{G_1G_2} - 1$. Из этого соотношения видно, что выигрыш за счет оптимизации увеличивается как при $G_1 / G_2 \to 0$, так и при $G_1 / G_2 \to \infty$, т. е. относительный выигрыш увеличивается с увеличением степени анизотропии. Минимальный выигрыш, равный нулю, получается при $G_1 =$

$= G_2 = G$, т. е. для изотропного материала. В этом случае $K_* = K_0 = GS^2 / 2\pi$, а оптимальное сечение представляет собой круг.

Оптимальность круглого сечения для стержня из изотропного однородного материала доказана на основании теоремы о симметризации в работе [5].

Отметим, что для стержня из однородного изотропного материала условие оптимальности (2.4) означает постоянство касательного напряжения на контуре Г. Действительно, на основании формул (3.1) и (2.4) ($c = 0$, $a = b = 1 / G = \mathrm{const}$) имеем

$$\tau^2 = \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = \theta^2 (\varphi_y^2 + \varphi_x^2) = \mathrm{const} \tag{3.7}$$

В случае, если варьируется только часть контура Γ_1, а остальная часть Γ_2 фиксирована, вид условия оптимальности на искомой кривой остается прежним.

Отметим, что в случае однородного изотропного материала условию (2.4) или, что то же, условию (3.7) можно придать более универсальный вид, в котором это условие и используется ниже. Для этого перейдем от дифференцирования по координатам x, y к вычислению производных по касательному и нормальному к контуру Г направлениям. Учитывая условие (1.2), приходим к следующему соотношению (λ^2 — неизвестная постоянная):

$$(\partial\varphi/\partial n)^2 = \lambda^2, \quad (x, y) \in \Gamma \tag{3.8}$$

Замечание 1. Определение формы упругого стержня, обладающего минимальной площадью поперечного сечения или, что то же, минимальным весом, при заданной жесткости приводит к двойственной задаче. Проведение рассмотрений полностью аналогичных тем, которые делались в п. 1, позволяет исключить дифференциальную связь и свести отыскание границы области поперечного сечения к решению следующей изопериметрической вариационной задачи:

$$K = -\frac{1}{2}\min_\varphi J = K', \qquad S = \iint_D dx\,dy \to \min_\Gamma$$

где K' — заданная константа. Решение данной задачи находится из (3.4) — (3.6) простым расчетом. Для оптимального контура и минимизируемого функционала будем иметь

$$\Gamma:\ bx^2 + 2cxy + ay^2 = (ab - c^2)^{3/4}\sqrt{2K'/\pi}, \qquad S = \sqrt{2\pi K'}\,(ab - c^2)^{1/4}$$

Замечание 2. Максимизация жесткости стержня из неоднородного упругого материала возможна также за счет оптимального распределения неоднородности по сечению. Этому вопросу посвящена работа [6]. Другая задача оптимизации неоднородного стержня решалась в работе [7], где в предположении, что стержень составляется из двух материалов с различными константами пластичности, разыскивалось оптимальное взаимное расположение этих материалов по сечению. Все рассмотрения в [7] проводились в рамках теории предельного пластического проектирования.

4. Задачи оптимизации жесткости в случае неодносвязного сечения. Рассмотрим задачу о кручении однородного изотропного призматического стержня неодносвязного сечения. Для краткости изложения будем считать область поперечного сечения D двусвязной. Обозначим через Γ_0 и Г соответственно внутреннюю и внешнюю границу области D. При заданных границах Γ_0 и Γ задача кручения сводится к отысканию функции напряжений $\varphi(x, y)$ из решения краевой задачи [2,8]

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = -2 \tag{4.1}$$

$$\varphi = 0, \quad (x, y) \in \Gamma; \quad \varphi = C, \quad (x, y) \in \Gamma_0 \tag{4.2}$$

$$\int_{\Gamma_0} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, ds = 2\Omega \tag{4.3}$$

где Ω — площадь области, ограниченной контуром Γ_0. Постоянная C, фигурирующая в (4.2), — неизвестная величина и для ее определения служит условие (4.3). Для напряжений τ_{xz}, τ_{yz} и жесткости на кручение K имеют место следующие выражения:

$$\tau_{xz} = G\Theta\varphi_y, \quad \tau_{yz} = -G\Theta\varphi_x \tag{4.4}$$

$$K = 2\left(\iint_D \varphi\, dx\, dy + C\Omega\right) \tag{4.5}$$

Функция φ, связанная с компонентами тензора напряжений соотношениями (4.4), отличается постоянным множителем G (модулем сдвига) от функции напряжений, введенной в предыдущем параграфе соотношениями (3.1.) Имеется в виду случай однородного изотропного материала, когда $c = 0$, $G_1 = G_2 = G$. Этим, в частности, объясняется, что жесткость K, определенная согласно (4.5), имеет размерность четвертой степени длины и отличается от жесткости K' из п. 3 множителем G $(K' = GK)$.

Контур Γ_0 и тем самым площадь Ω области, ограниченной этим контуром, предполагаются заданными. Также считается заданной площадь области D, ограниченной контурами Γ_0 и Γ. Граница Γ заранее фиксируется и подлежит определению.

Задача оптимизации заключается в отыскании формы контура Γ, максимизирующего функционал (4.5) при условиях (1.3), (4.1) — (4.3).

Можно показать, что условие для определения оптимального контура Γ в рассматриваемом случае двусвязной области остается прежним и совпадает с (3.8).

Для получения этого условия воспользуемся способом, который может применяться и в случае произвольной n-связной области. Введем в рассмотрение функцию кручения ψ, связанную с функцией напряжений φ известными соотношениями $\psi_x = \varphi_y + y$, $\psi_y = -\varphi_x - x$. Для введенной функции имеем следующую задачу Неймана:

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in D; \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = yn_x - xn_y, \quad (x, y) \in \Gamma_0 + \Gamma \tag{4.6}$$

где n_x, n_y — проекции на оси x и y единичной нормали к границе области D. Жесткость стержня K вычисляется через ψ по формуле

$$K = I + \iint_D (x\psi_y - y\psi_x)\, dx\, dy, \quad I = \iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy \tag{4.7}$$

При заданных границах области D функция кручения может быть найдена путем решения вариационной задачи [2]

$$J_1 = \frac{1}{2} \iint_D [(\psi_x - y)^2 + (\psi_y + x)^2]\, dx\, dy \to \min_\psi \tag{4.8}$$

Заметим, что здесь не требуется, чтобы функции сравнения ψ удовлетворяли краевому условию (4.7), так как это условие является «естественным» для функционала (4.8). Для функции ψ, доставляющей минимум интегралу (4.8) (а не для произвольной функции сравнения), имеем $J_1 = {}^1/_2\, K$ (см. [2]). Данное соотношение позволяет записать оптимизационную задачу в следующем виде:

$$K_* = \max_\Gamma \min_\psi 2J_1 \tag{4.9}$$

Максимум по Г в (4.9) вычисляется при изопериметрическом условии (1.3). Выписывая далее выражение для первой вариации интеграла J_1 и замечая, что в силу (1.3) имеет место ограничение $\int \delta f ds = 0$ (интеграл берется по контуру Г), получаем в качестве необходимых условий экстремума уравнение и граничные условия (4.6), а также условие оптимальности контура Г

$$(\psi_x - y)^2 + (\psi_y + x)^2 = \mathrm{const} \tag{4.10}$$

Возвращаясь в (4.10) к функции напряжений φ, приходим к условию $\varphi_x{}^2 + \varphi_y{}^2 = \lambda^2$, которое может быть записано в виде (3.8).

Исследуем некоторые свойства оптимальных решений.

Применяя теорему Бредта к контуру Г и используя условие оптимальности (3.8), получим выражение, связывающее значение константы λ из (3.8) с длиной l оптимального контура и площадью $\Omega + S$

$$2(\Omega + S) = -\int_\Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds = \lambda l \tag{4.11}$$

Из равенства (4.11), в частности, следует, что $\lambda \neq 0$ и $\lambda \neq \infty$.

Покажем, что оптимальный контур является гладким и не имеет ни выступающих, ни входящих углов. Рассуждая от противного, предположим сначала наличие на оптимальном контуре выступающего угла. Тогда при приближении вдоль контура Г к вершине этого угла будем иметь $\tau = \partial\varphi / \partial n \to 0$ (см., например, [2]), и следовательно, в этом случае нарушается условие $\lambda \neq 0$. Допустим теперь, что на контуре Г имеется входящий угол. Тогда при приближении вдоль Г к вершине этого угла величина $\tau = \partial\varphi / \partial n$ стремится к бесконечности и, следовательно, нарушается предположение $\lambda \neq \infty$.

5. **Определение оптимальной формы методом малого параметра.** Получим решение рассмотренной в п. 4 задачи в случае тонкостенного стержня. Для удобства введем новую координатную систему st, связанную с опорной линией Γ_0. Координата s точки $P \in D$ отсчитывается вдоль Γ_0 от некоторой точки $O \in \Gamma_0$ до точки A пересечения Γ_0 с нормалью (к Γ_0), проходящей через точку P. Координата t равна длине отрезка AP. Обозначим через $\rho = \rho(s)$ и $h = h(s)$ радиус кривизны опорной линии Γ_0 и уравнение контура Г.

Предположение о тонкостенности стержня означает, что (L — длина контура Γ_0)

$$\max_s h(s) = H \ll L \quad (0 \leqslant s \leqslant L)$$

т. е. отношение $H / L = \varepsilon$ — малое число ($\varepsilon \ll 1$).

Предположим, что контур Γ_0 не имеет сильно искривленных участков, т. е., что

$$\min_s \rho(s) \sim L \tag{5.1}$$

Запишем основные соотношения (1.3), (3.8), (4.1) — (4.3), (4.5) в новой системе координат и перейдем к новым переменным и обозначениям

$$s = Ls', \quad t = Ht', \quad h = Hh', \quad \varphi = HL\varphi', \quad \Omega = L^2\Omega' \tag{5.2}$$

$$S = HLS', \rho = L\rho', \quad K = HL^3K', \quad C = HLC', \quad \lambda = L\lambda'$$

(штрихи в дальнейшем опускаем). Получим

$$(T\varphi_t)_t + \varepsilon^2 (T^{-1}\varphi_s)_s = -2\varepsilon T, \quad T = 1 + \frac{\varepsilon t}{\rho} \tag{5.3}$$

$$\varphi_t(s, h) = -\lambda, \quad \varphi(s, 0) = C, \quad \varphi(s, h) = 0$$

$$\int_0^1 \varphi_t(s, 0)\, ds = -2\Omega, \quad \int_0^1 \left(h + \frac{\varepsilon h^2}{2\rho}\right) ds = S$$

$$K = 2\left(C\Omega + \varepsilon \int_0^1\int_0^h T\varphi\, dt\, ds\right)$$

Для решения этой задачи применим метод малого параметра и будем искать функции φ, h и неизвестные константы C, λ, K в виде рядов по параметру ε

$$\varphi = \varphi^\circ + \varepsilon\varphi^1 + \varepsilon^2\varphi^2 + \ldots \tag{5.4}$$

Для h, C, λ и K используются аналогичные разложения.

Выпишем уравнения для определения величин нулевого, первого и второго приближения. С этой целью подставим представления (5.4) в соотношения (5.3) и приравняем члены при одинаковых степенях ε. В результате приходим к краевым задачам, последовательное решение которых позволяет определить все искомые величины.

Для определения величин нулевого приближения имеем следующую краевую задачу:

$$\varphi_{tt}^\circ = 0, \ \varphi^\circ(s, 0) = C^\circ, \quad \varphi^\circ(s, h^\circ) = 0 \tag{5.5}$$

$$\varphi_t^\circ(s, h^\circ) = -\lambda^\circ \tag{5.6}$$

$$\int_0^1 \varphi_t^\circ(s, 0)\, ds = -2\Omega, \quad \int_0^1 h^\circ\, ds = S \tag{5.7}$$

Учитывая свойства искомых функций нулевого приближения, запишем краевую задачу для величин первого приближения

$$\varphi_{tt}^1 = -2 - \rho^{-1}\varphi_t^\circ, \quad \varphi^1(s, 0) = C^1, \quad \varphi^1(s, h^\circ) = 0 \tag{5.8}$$

$$\varphi_t^1(s, h^\circ) = -\lambda^1 \tag{5.9}$$

$$\int_0^1 \varphi_t^1(s, 0)\, ds = 0, \quad \int_0^1 h^1\, ds = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(h^\circ)^2}{\rho}\, ds \tag{5.10}$$

Краевую задачу для величин второго приближения с учетом (5.5) — (5.10) запишем в виде

$$
\begin{aligned}
(5.11)\qquad & \varphi_{tt}^2 = -\rho^{-1}[(t\varphi_t^1)_t + 2t] - \varphi_{ss}^\circ, \quad \varphi^2(s, 0) = C^2 \\
& \varphi^2(s, h^\circ) = \lambda^1 h^1 + \lambda^\circ h^2 \\
& \varphi_t^2(s, h^\circ) = (2 + \rho^{-1}\lambda^\circ) h^1 - \lambda^2 \\
& \int_0^1 \varphi_t^2(s, 0)\, ds = 0, \quad \int_0^1 h^2\, ds = -\int_0^1 \frac{h^\circ h^1}{\rho}\, ds
\end{aligned}
$$

Используя соответствующие соотношения из (5.3), (5.4) и (5.5), получим следующее выражение для жесткости:

$$
\begin{aligned}
(5.12)\qquad K = K^\circ + \varepsilon K^1 + \varepsilon^2 K^2 + \ldots = 2C^\circ\Omega + 2\varepsilon\left(\int_0^1\int_0^{h^\circ} \varphi^\circ\, dt\, ds + C^1\Omega\right) + \\
+ 2\varepsilon^2\left(\int_0^1\int_0^{h^\circ} \varphi^1\, dt\, ds + C^2\Omega\right) + O(\varepsilon^3)
\end{aligned}
$$

Найдем решение задачи в нулевом приближении. Из уравнения и граничных условий (5.5) следует, что $\varphi^\circ = C^\circ(1 - t / h^\circ)$. Используя выражение для φ° и условие оптимальности (5.6), получим $h^\circ = C^\circ(\lambda^\circ)^{-1}$. Подставляя найденные функции φ°, h° в изопериметрические условия (5.7), находим постоянные λ°, C°. Окончательно имеем

$$
(5.13)\qquad h^\circ = S, \quad \varphi^\circ = 2S\Omega\left(1 - \frac{t}{S}\right), \quad K^\circ = 4S\Omega^2, \quad \lambda^\circ = 2\Omega, \quad C^\circ = 2S\Omega
$$

Таким образом, в случае малой кривизны контура Γ_0 (предположение (5.1)) оптимальное распределение толщины в нулевом приближении является постоянным.

Определим величины первого приближения. Для этого проинтегрируем уравнение (5.8) и определим постоянные интегрирования из краевых условий (5.8), а функцию h^1 и константы λ^1, C^1 — из соотношений (5.9), (5.10). В результате получим следующие выражения для искомых величин первого приближения:

$$
\begin{aligned}
(5.14)\qquad & h^1 = -2\frac{S^2}{\rho}, \quad \varphi^1 = t^2\left(\frac{\Omega}{\rho} - 1\right) + \\
& + 2S\Omega\left(\Pi_1 - \frac{1}{\rho}\right)t + S^2 - 2\Omega S^2\Pi_1 \\
& C^1 = S^2(1 - 2\Omega\Pi_1), \quad \lambda^1 = 2S(1 - \Omega\Pi_1), \quad K^1 = 4\Omega S^2(1 - \Omega\Pi_1) \\
& \Pi_1 = \int_0^1 \frac{ds}{\rho}
\end{aligned}
$$

В формуле (5.14) для h^1 учитывается влияние кривизны внутреннего контура Γ_0 на оптимальную форму внешней границы Г. Выражение для оптимального распределения толщины стержня

$$
h = h^\circ + \varepsilon h^1 = S(1 - \varepsilon S/2\rho)
$$

(в размерных переменных $h = SL^{-1}(1 - S / 2\rho L)$) показывает, что с увеличением кривизны для соответствующих точек контура Γ_0 уменьшается толщина h.

Аналогично, путем решения краевой задачи (5.11) определяются все искомые величины второго приближения. Приведем здесь найденные выражения для h^2 и постоянной C^2

$$h^2 = -\frac{S^3}{2\rho^2}\left(3 + \frac{\rho}{\Omega} - 4\rho^2\Pi_2 - \frac{\rho^2}{\Omega}\Pi_1\right) \tag{5.15}$$

$$C^2 = \frac{2S^3}{3}(\Omega\Pi_2 - 2\Pi_1) + 2S^3\Omega\Pi_1^2, \quad \Pi_2 = \int_0^1 \frac{ds}{\rho^2}$$

При помощи постоянной C^2 и соответствующих величин нулевого и первого приближения, входящих в формулу (5.12), определяется поправка K^2.

Используя найденные выражения и переходя к исходным размерным величинам (5.2), получим следующую формулу для жесткости оптимального стержня (в размерных переменных):

$$K = \frac{4S\Omega^2}{L^2} + \frac{4S^3\Omega}{L^2}\left(1 - \frac{\Omega}{L^2}\int_0^L \frac{ds}{\rho}\right) + \frac{4S^3}{3L^6}\left[3\Omega^2\left(\int_0^L \frac{ds}{\rho}\right)^2 + \right. \tag{5.16}$$

$$\left. + \Omega^2 L\int_0^L \frac{ds}{\rho^2} - 4\Omega L^2 \int_0^L \frac{ds}{\rho} + L^4\right]$$

Оценим выигрыш, получаемый за счет оптимизации. Для этого построим решение задачи кручения для стержня с постоянным распределением толщины h вдоль контура Γ_0. Не приводя соответствующих выкладок, которые в основном аналогичны описанным выше, выпишем выражение для разности $\Delta K = K - K'$ между жесткостями оптимального стержня и стержня постоянной толщины

$$\Delta K = \frac{S^3\Omega^2}{L^6}\left[L\int_0^L \frac{ds}{\rho^2} - \left(\int_0^L \frac{ds}{\rho}\right)^2\right]$$

Применяя к этому выражению неравенство Коши — Буняковского, заключаем, что $\Delta K \geqslant 0$. Равенство $\Delta K = 0$, как нетрудно заметить, реализуется для круглого контура. В этом случае оптимальное распределение толщины является постоянным.

Решение (5.13) — (5.16) было найдено в предположении (5.1). Исследуем другой случай, когда $\min_s \rho(s) \sim H$, т. е. случай наличия на контуре Γ_0 участков большой кривизны. Задачу оптимизации опять рассмотрим в переменных (5.2) с тем лишь отличием, что теперь $\rho = H\rho'$. Основные соотношения задачи получаются из (5.3) заменой в (5.3) выражения ε / ρ на $1 / \rho$. Используем метод малого параметра и будем разыскивать решение в виде (5.4). Ограничимся определением величин нулевого приближения, которые удовлетворяют следующей системе соотношений:

$$\left[\left(1 + \frac{t}{\rho}\right)\varphi_t^\circ\right]_t = 0, \quad \varphi^\circ(s,\ 0) = C^\circ, \quad \varphi^\circ(s, h^\circ) = 0$$

$$\varphi_t^\circ(s, h^\circ) = -\lambda^\circ, \quad \int_0^1 \varphi_t^\circ(s, 0)\, ds = -2\Omega, \quad \int_0^1 \left(h^\circ + \frac{(h^\circ)^2}{2\rho}\right) ds = S$$

Разрешая эти соотношения, получим следующие выражения для искомых величин:

$$\varphi^\circ(s, t) = 2\Omega\left[\int_0^1 \frac{ds}{\rho \ln(1 + h^0/\rho)}\right]^{-1}\left(1 - \frac{\ln(1 + t/\rho)}{\ln(1 + h_0/\rho)}\right) \tag{5.17}$$

$$\rho\left(1 + \frac{h^\circ}{\rho}\right)\ln\left(1 + \frac{h^\circ}{\rho}\right) = \mathrm{const}$$

Из второй формулы (5.17) видно, что толщина оптимального стержня уже в нулевом приближении является переменной. Если при изменении s $(0 < s < 1)$ возрастает кривизна $1 / \rho$, то согласно (5.17) функция $h^0(s)$ будет убывать. Из соотношений (5.17) также видно, что на участках с малой кривизной распределение толщины оптимального стержня с достаточной степенью точности является постоянным. Это согласуется с результатами, полученными выше.

Подобным образом можно исследовать оптимальное распределение толщин в зависимости от кривизны контура Γ_0 на участках, для которых $\rho \sim \varepsilon^m H$ $(m > 1)$. Не приводя выкладок, которые аналогичны приведенным выше, укажем окончательный результат. Для искомой зависимости имеем следующее асимптотическое представление: $\rho = h^\circ \exp(-\gamma / h^\circ)$, где γ — произвольная постоянная.

Автор благодарит Б. Л. Карихалу за полезное обсуждение результатов работы.

Поступила 21 III 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 4, ч. 1, М., «Наука», 1974.
2. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.
3. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. М., Гостехиздат, 1951.
4. *Лехницкий С. Г.* Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М., «Наука», 1971.
5. *Polya G.* Torsional rigidity, principal frequency, electrostatic capacity and symmetrization. Quart. Appl. Math., 1948, vol. 6, No. 3.
6. *Klosowicz B., Lurie K. A.* On the optimal nonhomogenety of torsional elastic bar. Archiv. Mech., 1971, vol. 24, No. 2.
7. *Majerczyk-Gomulkowa J., Mioduchowski A.* Optymalna niejednorodnosc plastyczna skreconego preta ze wzgledu na nosnosc graniczna. Pozpr. inz., 1969, vol. 17, No. 4.
8. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1963.