Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 536.24.01 + 517.946

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТЕПЛА В ОДНОМЕРНЫХ ДИСПЕРСНЫХ СРЕДАХ

В. Г. Марков, О. А. Олейник

(Москва)

Доказывается, что решения первой краевой задачи для линейного параболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными сходятся в области ω при слабой в $L_2(\omega)$ сходимости его коэффициентов к решению первой краевой задачи для некоторого предельного уравнения. Это означает, что решение «микроскопической» задачи о распространении тепла в одномерной дисперсной среде приближенно можно заменить решением «макроскопической» задачи.

Основная задача теории дисперсных сред состоит в определении их макроскопических свойств по известным свойствам составляющих компонентов и по макроскопическим параметрам, зависящим от структуры дисперсной среды. Строгая математическая постановка этой задачи в общем виде еще не дана (см. обзоры [1,2]). Одним из подходов к изучению свойств дисперсных сред является применение статистических методов [3-5]. Другой подход состоит в изучении уравнений с разрывными коэффициентами, которыми описываются дисперсные среды на «микроскопическом» уровне, с целью приближения решений этих уравнений функциями, удовлетворяющими уравнениям, коэффициенты которых являются в определенном смысле предельными и обладают лучшими дифференциальными свойствами, чем коэффициенты исходных уравнений (см. [6-8]). Такая задача в общем виде еще не исследована. В рассмотренных случаях накладываются дополнительные ограничения на структуру коэффициентов исходных уравнений, как, например, условие их периодичности [9, 10] или условия другого вида [6, 11]. Упомянутые макроскопические параметры, характеризующие дисперсную среду, обычно определяются как некоторые средние величины; осреднение проводится по малому объему.

В данной работе микроскопические параметры, характеризующие дисперсную среду в области ω, рассматриваются как члены последовательностей, слабо сходящихся в $L_2(\omega)$ к некоторым (вообще говоря, гладким) функциям, которые и берутся в качестве макроскопических характеристик дисперсной среды. В случае одномерной среды это условие является достаточным для равномерной сходимости решений «микроскопической» задачи к решению «макроскопической» задачи. Ниже дается доказательство этого предложения для общего параболического уравнения второго порядка с одним пространственным переменным; при этом используются методы работы [11]. Рассматривается случай первой краевой задачи, хотя аналогичное исследование может быть проведено и для ряда других краевых условий, а также для задачи Коши.

1. Пусть функция $u^m(x, t)$, $m = 1, 2, \ldots$ в области $\omega = \{x, t: 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ удовлетворяет краевой задаче для уравнения параболического типа

$$L^m(u) \equiv -p^m(x, t)\, u_t + (a^m(x, t)\, u_x)_x + b^m(x, t)\, u_x + c^m(x, t)\, u = f^m(x, t) \tag{1.1}$$

$$u(x, 0) = u_0^m(x), \quad u(0, t) = u_1^m(t), \quad u(l, t) = u_2^m(t) \tag{1.2}$$

Доказывается, что при определенных предположениях $u^m(x, t)$ стремятся к пределу $u(x, t)$ при $m \to \infty$, если p^m, $1/a^m$, b^m/a^m, c^m, f^m сходятся слабо в $L_2(\omega)$ (см. [12]) при $m \to \infty$ соответственно к функциям p, $1/A$, B, c, f, а функции u_0^m, u_1^m, u_2^m сходятся в среднем при $m \to \infty$ соответственно к функциям u_0, u_1, u_2. (Через $L_2(\omega)$ обозначено пространство измеримых функций $v(x, t)$ в ω, для которых $\int\limits_\omega v^2 dxdt < \infty$.) Предельная функция $u(x, t)$ задает распределение температуры, соответствующее предельному параболическому уравнению и предельным условиям вида

$$L(u) \equiv -p(x, t)\, u_t + (A(x, t)\, u_x)_x + B(x, t)\, A(x, t)\, u_x + c(x, t)\, u = f(x, t) \tag{1.3}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u(0, t) = u_1(t), \quad u(l, t) = u_2(t) \tag{1.4}$$

Будем предполагать, что в ω

$$|p^m| + |a^m| + |b^m| + |c^m| + |f^m| \leqslant M \tag{1.5}$$

$$p^m \geqslant \alpha_0 > 0, \quad a^m \geqslant \alpha_1 > 0$$

$$\left| \int\limits_0^x \left(\frac{1}{a^m(s, t)} \right)_t ds \right| \leqslant M, \quad |p_t^m| \leqslant M$$

$$|u_0^m(x)| + |u_1^m(t)| + |u_2^m(t)| + \left| \frac{du_1^m}{dt} \right| + \left| \frac{du_2^m}{dt} \right| \leqslant M \tag{1.6}$$

где постоянные M, α_0, α_1 не зависят от m.

В задачах теории дисперсных сред наибольший интерес представляет случай, когда коэффициенты уравнения (1.1) и функции $f^m(x, t)$ лишь кусочно-непрерывные и кусочно-гладкие. Здесь задача (1.1), (1.2) рассматривается при произвольных ограниченных измеримых функциях p^m, a^m, b^m, c^m, f^m; удовлетворяющих условиям (1.5); тем самым для этих функций допускаются любые разрывы, представляющие физический интерес. В соответствии с этим необходимо рассматривать обобщенные решения $u^m(x, t)$ задачи (1.1), (1.2).

Сначала рассматривается случай, когда коэффициенты уравнения (1.1), функция f^m, функции u_0^m, u_1^m, u_2^m удовлетворяют условиям гладкости и условиям согласования в точках (0, 0) и (0, l), при которых существует решение задачи (1.1), (1.2), обладающее в $\bar{\omega}$ непрерывными производными, входящими в уравнение (1.1) (см., например, [13], § 3 [14]). (Через $\bar{\omega}$ обозначено замыкание множества ω.) Затем, с использованием полученных результатов, рассматривается случай разрывных коэффициентов в уравнении (1.1), представляющий наибольший интерес для теории дисперсных сред.

2. Пусть $p(x, t)$, $p_t(x, t)$, $A(x, t)$, $B(x, t)$, $c(x, t)$, $f(x, t)$ — ограниченные и измеримые функции в ω, $u_0(x)$ — ограниченная измеримая функция на отрезке $[0, l]$, $u_1(t)$, $u_2(t)$ ограничены и непрерывны при $0 < t < T$, $p \geqslant \alpha_0 > 0$, $A \geqslant \alpha_2 > 0$; α_0, α_2 — постоянные.

Определение. Ограниченная в ω и непрерывная в $\bar{\omega}$ при $t > 0$ функция $u(x, t)$ называется обобщенным решением задачи (1.3), (1.4), если

$u_x \in L_2(\omega)$, $u(0, t) = u_1(t)$, $u(l, t) = u_2(t)$ при $t > 0$ и если при любой бесконечно дифференцируемой в $\overline{\omega}$ функции $\varphi(x, t)$ такой, что $\varphi(x, T) = 0$, $\varphi(0, t) = 0$, $\varphi(l, t) = 0$, выполняется интегральное тождество

$$(2.1)\qquad \int_\omega [(p\varphi)_t u - Au_x\varphi_x + BAu_x\varphi + cu\varphi - f\varphi]\,dx\,dt + \int_0^l p(x, 0)\,\varphi(x, 0)\,u_0\,dx = 0$$

Теорема 1. **Пусть обобщенные производные A_t и $(BA)_x$ ограничены в ω. Тогда обобщенное решение $u(x, t)$ задачи (1.3), (1.4) единственно.**

Доказательство. Предположим, что существуют два обобщенных решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ задачи (1.3), (1.4), и докажем, что $u_1 \equiv u_2$ в ω. Их разность $u_1 - u_2 = v$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$(2.2)\qquad \int_\omega [(p\varphi)_t v - Av_x\varphi_x + BAv_x\varphi + cv\varphi]\,dx\,dt = 0$$

Предельным переходом легко показать, что интегральное тождество (2.2) справедливо также при любой функции $\varphi(x, t)$, такой, что $\varphi \in L_2(\omega)$, $\varphi_x \in L_2(\omega)$, $\varphi_t \in L_2(\omega)$, $\varphi(x, t) = 0$, $\varphi(0, t) = 0$, $\varphi(l, t) = 0$. Подставим в (2.2) вместо $\varphi(x, t)$ функцию, определенную равенством

$$\varphi(x, t) = e^{\alpha t}\psi(x, t)\quad 0 \leqslant t \leqslant T_1$$

$$\varphi(x, t) = 0,\quad T_1 \leqslant t \leqslant T;\qquad \psi(x, t) = \int_t^{T_1} v(x, s)\,ds$$

где положительные постоянные α и T_1 выберем ниже. Имеем

$$(2.3)\qquad \int_\omega [vp_t\psi - v^2p + \alpha vp\psi - Av_x\psi_x + BAv_x\psi + cv\psi]\,e^{\alpha t}\,dx\,dt = 0$$

Преобразуем отдельные члены равенства (2.3) интегрированием по частям. Получаем

$$(2.4)\qquad \int_\omega Av_x\psi_x e^{\alpha t}\,dx\,dt = \int_\omega \frac{1}{2}e^{\alpha t}(A_t + \alpha A)\,\psi_x^2\,dx\,dt + \int_0^l \frac{1}{2}A(x, 0)\,(\psi_x(x, 0))^2\,dx$$

$$(2.5)\qquad \int_\omega e^{\alpha t}BAv_x\psi\,dx\,dt = -\int_\omega e^{\alpha t}v\,[BA\psi_x + (BA)_x\psi]\cdot dx\,dt$$

Запишем равенство (2.3), учитывая соотношения (2.4) и (2.5). Применяя неравенство Коши — Буняковского и элементарное неравенство $2ab \leqslant \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1}b^2$ для оценки интегралов в равенстве (2.3), получаем

$$\left|\int_\omega [p_t + \alpha p + c - (BA)_x]\,e^{\alpha t}v\psi\,dx\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant (K_1 + \alpha K_2)\,e^{\alpha T_1}\left(\int_\omega v^2\,dx\,dt\right)^{1/2}\left(\int_\omega \psi^2\,dx\,dt\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\varepsilon + \frac{(K_1 + \alpha K_2)^2}{\varepsilon}\,e^{2\alpha T_1}\,T_1^2\right]\int_\omega v^2\,dx\,dt$$

$$\left|\int_\omega e^{\alpha t} B A v \psi_x \, dx \, dt\right| \leqslant \varepsilon I(v) + \frac{K_3}{\varepsilon} I(\psi_x),$$

$$I(q) = \int_\omega q^2 e^{\alpha t} \, dx \, dt$$

где ε — произвольная положительная постоянная, а постоянные K_1, K_2, K_3 не зависят от ε, T_1, α. Учитывая эти оценки, из равенства (2.3) выводим, что

$$\int_\omega \left[pv^2 + \frac{1}{2} A\alpha\psi_x^2 + \frac{1}{2} A_t\psi_x^2\right] e^{\alpha t} \, dx \, dt + \int_0^l \frac{1}{2} A(x, 0) \psi_x^2 \, dx \leqslant \tag{2.6}$$

$$\leqslant \left(2\varepsilon + \frac{(K_1 + \alpha K_2)^2}{\varepsilon} T_1^2 e^{2\alpha T_1}\right) I(v) + \frac{K_3}{\varepsilon} I(\psi_x)$$

Положим $\varepsilon = \alpha_0/4$ и выберем $\alpha \geqslant \alpha^{-1}{}_2$ ($\sup \omega \mid A_t \mid + 2\varepsilon^{-1} K_3$), а затем T_1 выберем настолько малым, что

$$\frac{1}{2} \alpha_0 > (K_1 + \alpha K_2)^2 \varepsilon^{-1} T_1^2 e^{2\alpha T_1}$$

Тогда из равенства (3.6) вытекает, что $I(v) \leqslant 0$, и, следовательно, $v \equiv 0$ в ω при $0 < t \leqslant T_1$.

Затем таким же образом доказываем, что $v \equiv 0$ при $T_1 \leqslant t \leqslant 2T_1, \ldots, kT_1 \leqslant \leqslant t \leqslant T$, где k равно целой части T/T_1. Теорема доказана.

Заметим, что из теоремы единственности обобщенного решения $u(x, t)$ и теорем существования гладкого решения задачи (1.3), (1.4), доказанных в [13–14], вытекает, что если коэффициенты уравнения (1.3), функция $f(x, t)$ и функции в условиях (1.4) достаточно гладкие и удовлетворяют условиям согласования в точках (0, 0) и (0, l), то обобщенное решение задачи (1.3), (1.4) является функцией, обладающей в $\bar{\omega}$ непрерывными производными u_t, u_x, u_{xx}.

3. Рассмотрим случай достаточно гладких функций p^m, a^m, b^m, c^m, f^m и u_0^m, u_1^m, u_2^m.

Теорема 2. Пусть $u^m(x, t)$ — решение задачи (1.1), (1.2), обладающее в $\bar{\omega}$ непрерывными производными u_t^m, u_x^m, u_{xx}^m. Предположим, что выполнены условия (1.5) — (1.6) и что при $m \to \infty$ функции p^m, p_t^m, $1/a^m$, b^m/a^m, c^m, f^m сходятся слабо в $L_2(\omega)$ соответственно к функциям p, p_t, $1/A$, B, c, f; функции $p^m(x, 0)$ сходятся слабо в $L_2(0, l)$ к функции $p(x, 0)$, $u_0^m(x)$ сходятся по норме $L_2(0, l)$ к функции $u_0(x)$, а $u_1^m(t)$, $u_2^m(t)$ сходятся по норме $L_2(0, T)$ соответственно к функциям $u_1(t)$, $u_2(t)$. Предположим, что A_t и $(BA)_x$ ограничены в ω. Тогда при $m \to \infty$ решения $u^m(x, t)$ задачи (1.1), (1.2) сходятся равномерно в $\omega_\delta = \{x, t : 0 < x < l, \delta < < t < T\}$ при любом $\delta > 0$ к обобщенному решению $u(x, t)$ задачи (1.3), (1.4).

Доказательство. Согласно принципу максимума (см. [13]),

$$|u^m(x, t)| \leqslant c_1 \tag{3.1}$$

где постоянная c_1 не зависит от m. Обозначим через $w^m(x, t)$ функцию, удовлетворяющую в ω условиям

$$(a^m(x, t) w_x)_x = 0; \quad w(0, t) = u_1^m(t), \quad w(l, t) = u_2^m(t)$$

Видно, что

$$w^m(x, t) = u_1^m(t) + q^m(x, t)\,[q^m(l, t)]^{-1}\,[u_2^m(t) - u_1^m(t)]$$

$$q^m(x, t) = \int_0^x [a^m(s, t)]^{-1}\,ds$$

Очевидно, что в силу условий (1.5) — (1.6) функции w^m, w_t^m, w_x^m ограничены в ω равномерно относительно m.

Для оценки u_x^m в норме $L_2(\omega)$ рассмотрим функции $v^m = u^m - w^m$. Очевидно, $v^m(0, t) = 0$, $v^m(l, t) = 0$. Умножим уравнение (1.1) на v^m и проинтегрируем его по области ω. Преобразуем отдельные члены полученного равенства интегрированием по частям. Имеем

$$\begin{aligned}(3.2)\qquad \int_\omega p^m u_t^m v^m\,dx\,dt &= \int_\omega \left[-\frac{1}{2}p_t^m(u^m)^2 + (p^m w^m)_t\cdot u^m\right]dx\,dt + \\ &+ \int_0^l \left[\frac{1}{2}p^m(x, t)(u^m(x, t))^2 - \frac{1}{2}p^m(x, 0)(u_0^m(x))^2\right]dx - \\ &- \int_0^l [p^m(x, T)u^m(x, T)w^m(x, T) - p^m(x, 0)u_0^m(x)w^m(x, 0)]\,dx\end{aligned}$$

В силу оценки (3.1) и предположений (1.5) — (1.6) относительно функций p^m, a^m, u_0^m, u_1^m, u_2^m все интегралы, стоящие в правой части равенства (3.2), ограничены постоянной, не зависящей от m. Далее

$$\int_\omega (a^m u_x^m)_x v^m\,dx\,dt = \int_\omega [-a^m(u_x^m)^2 + a^m u_x^m w_x^m]\,dx\,dt$$

Таким образом, получаем

$$(3.3)\qquad \int_\omega a^m(u_x^m)^2\,dx\,dt - \int_\omega [a^m u_x w_x^m + b^m u_x^m w^m]\,dx\,dt = B^m$$

где B^m ограничены постоянной, не зависящей от m. Применяя неравенство Коши — Буняковского и элементарное неравенство $2ab \leqslant \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1}b^2$ для оценки второго интеграла в равенстве (3.3), получаем, что (постоянная c_2 не зависит от m)

$$(3.4)\qquad \int_\omega a^m(u_x^m)^2\,dx\,dt \leqslant c_2$$

Рассмотрим уравнение, которому удовлетворяет функция v^m

$$\begin{aligned}(3.5)\qquad L^m(v^m) \equiv L^m(u^m) - L^m(w^m) = f^m - p^m w_t^m + \\ + b^m w_x^m + c^m w^m \equiv F^m(x, t)\end{aligned}$$

В силу предположений (1.5) — (1.6) функции $F^m(x, t)$ равномерно ограничены относительно m.

Сделаем в этом уравнении замену независимых переменных вида

$$\tau = t, \quad y = \frac{q^m(x, t)}{q^m(l, t)} \equiv \Phi^m(x, t)$$

При такой замене переменных область ω переходит в область $\Omega = \{y, \tau : 0 < y < 1,\ 0 < \tau < T\}$. Уравнение (3.5) переходит в уравнение

$$(3.6)\qquad -p^m v_\tau^m - p^m \Phi_\tau^m v_y^m + a^m(\Phi_x^m)^2 v_{yy}^m + b^m \Phi_x^m v_y^m + c^m v^m = F^m$$

Введем обозначения

$$\Omega_\delta = \{y, \tau : 0 < y < 1,\ \delta < \tau < T\},\ \delta = \mathrm{const} > 0$$

$$\| v \|_\gamma^D = \sup_D | v(y, \tau) | + \sup_{\substack{(y_1, \tau_1) \in D \\ (y_2, \tau_2) \in D}} \frac{| v(x_1, \tau_1) - v(y_2, \tau_2) |}{(| \tau_1 - \tau_2 | + | y_1 - y_2 |^2)^{\gamma/2}}$$

где $\gamma = \mathrm{const}$, $0 < \gamma < 1$, D — область в пространстве (y, τ). Для оценки v_y^m применим к уравнению (3.6) с условиями $v^m(0, t) = 0$, $v^m(l, t) = 0$ теорему 3 работы [15]. Согласно этой теореме

$$\| v^m \|_\gamma^{\Omega_\delta} + \| v_y^m \|_\gamma^{\Omega_\delta} \leqslant c_3 \tag{3.7}$$

где постоянные γ и c_3 не зависят от m (но могут зависеть от δ).

Из оценки (3.7) вытекает, что семейства функций $\{v^m\}$ и $\{q^m(l, t)\, a^m v_x^m\}$ равномерно ограничены и удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\gamma/2$ по переменным y и τ в любой области Ω_δ с постоянной Гельдера, не зависящей от m. Так как $q^m(l, t)$, $\Phi^m(x, t)$ имеют производные по x и t, ограниченные равномерно по m, и $q^m(x, t) \geqslant \alpha_3 = \mathrm{const} > 0$, то отсюда следует, что семейства $\{v^m\}$ и $\{a^m v_x^m\}$ равномерно ограничены и удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\gamma/2$ по переменным x и t в любой области ω_δ с постоянной Гельдера, не зависящей от m. Этим же свойством обладают семейства $\{u^m\}$ и $\{a^m u^m\}$ в силу того, что $v^m = u^m - w^m$, w^m равномерно ограничены по m, а $a^m\, w_x^m$ имеют ограниченные относительно m производные по t и x в ω. Следовательно, по теореме Арцела семейства функций $\{u^m\}$ и $\{a^m u_x^m\}$ компактны в смысле равномерной сходимости в любой области ω_δ, $\delta = \mathrm{const} > 0$.

С помощью диагонального процесса выделим последовательность номеров m_k, такую, что при $m_k \to \infty$ функции u^{m_k}, $a^{m_k} u_x^{m_k}$ сходятся в ω соответственно к функциям $u(x, t)$, $V(x, t)$, и притом равномерно в любой области ω_δ, а последовательность $u_x^{m_k}$ слабо в $L_2(\omega)$ сходится к $u_x(x, t)$.

Заметим, что

$$u_x^m = \frac{1}{a^m}(a^m u_x^m) \tag{3.8}$$

Так как при $m_k \to \infty$ $a^{m_k} u_x^{m_k}$ сходятся к V равномерно в ω_δ, $a^m u_x^m$ равномерно по m ограничены в норме $L_2(\omega)$, а $1/a^m(x, t)$ сходятся слабо в $L_2(\omega)$ к $1/A(x, t)$, то, переходя к пределу в равенстве (3.8) по выбранной последовательности m_k, получим равенство слабых в $L_2(\omega)$ пределов: $u_x = V/A$. Так как $u_x \in L_2(\omega)$, то и $V = Au_x \in L_2(\omega)$. Умножая уравнение (1.1) на бесконечно дифференцируемую функцию $\varphi(x, t)$, такую, что $\varphi(x, T) = 0$, $\varphi(0, t) = 0$, $\varphi(l, t) = 0$, интегрируя полученное равенство по области ω и преобразуя его члены интегрированием по частям, получим, что для $u^m(x, t)$ удовлетворяется интегральное тождество

$$\int_\omega [(p^m\varphi)_t - a^m u_x^m \varphi_x + \frac{b^m}{a^m} a^m u_x^m \varphi + c^m u^m \varphi - f^m \varphi]\, dx\, dt + \tag{3.9}$$

$$+ \int_0^l p^m(x, 0)\, u_0^m(x)\, \varphi(x, 0)\, dx = 0$$

Перейдем теперь к пределу в интегральном тождестве (3.9) по выбранной ранее последовательности m_k. При этом надо учитывать неравенство

(3.10)
$$\left|\int\limits_{\omega}\left[a^m u_x{}^m \frac{b^m}{a^m}\varphi - Au_x B\varphi\right]dx\,dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int\limits_{\omega_\delta}\frac{b^m}{a^m}(a^m u_x{}^m - V)\,\varphi dx\,dt\right| + \left|\int\limits_{\omega_\delta} V\varphi\left(\frac{b^m}{a^m} - B\right)dx\,dt\right| +$$
$$+ \sqrt{\delta}\left[\int\limits_{\omega\setminus\omega_\delta}(b^m u_x{}^m\varphi - VB\varphi)^2 dx\,dt\right]^{1/2}$$

Из неравенства (3.10) следует, что его левая часть стремится к нулю при $m_k \to \infty$, так как в силу предположений (1.5) и оценки (3.4) значение последнего интеграла в правой части неравенства (3.10) не превосходит $\sqrt{\delta}\,K_4$, где K_4 не зависит от δ, первый интеграл правой части стремится к нулю при фиксированном δ и $m_k \to \infty$ в силу равномерной сходимости $a^m u_x{}^m$ к V в ω_δ, а второй интеграл стремится к нулю при фиксированном δ в силу слабой сходимости в $L_2(\omega)$ функции b^m/a^m к B.

Аналогично доказывается, что при $m_k \to \infty$

$$\int\limits_{\omega} a^m u_x{}^m \varphi_x dx\,dt \to \int\limits_{\omega} V\varphi_x dx\,dt = \int\limits_{\omega} Au_x\varphi_x dx\,dt$$

Таким образом, получаем, что предельная функция $u(x, t)$ удовлетворяет интегральному тождеству (2.1). Так как, кроме того, $u(x, t)$ ограничена в ω и непрерывна в $\overline{\omega}$ при $t > 0$,

$$u(0, t) = u_1(t), \quad u(l, t) = u_2(t), \quad u_x \in L_2(\omega),$$

то $u(x, t)$, по определению, является обобщенным решением задачи (1.3), (1.4). Согласно теореме 1, обобщенное решение задачи (1.3), (1.4) единственно. Поэтому вся последовательность $u^m(x, t)$ сходится в ω при $m \to \infty$ к функции $u(x, t)$, и притом равномерно в ω_δ, $\delta = \text{const} > 0$. Теорема доказана.

4. Рассмотрим случай разрывных коэффициентов и функций f^m в уравнении (1.1). В этом случае необходимо рассматривать обобщенные решения задачи (1.1), (1.2). Будем предполагать, что функции p^m, a^m, b^m, c^m, f^m измеримы в ω, $u_0{}^m(x)$, $u_1{}^m(t)$, $u_2{}^m(t)$ измеримы соответственно на отрезках $[0, l]$ и $[0, T]$ и выполнены условия (1.5) — (1.6).

Под обобщенным решением задачи (1.1), (1.2) будем понимать функцию $u^m(x, t)$, ограниченную в ω и непрерывную в $\overline{\omega}$ при $t > 0$ и такую, что $u^m(0, t) = u_1{}^m(t)$, $u^m(l, t) = u_2{}^m(t)$, $u_x{}^m$ принадлежит $L_2(\omega)$ и при любой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x, t)$ с условиями $\varphi(x, T) = 0$, $\varphi(0, t) = 0$, $\varphi(l, t) = 0$ выполняется интегральное тождество (3.9).

Ниже доказывается, что при условиях (1.5) — (1.6) обобщенное решение $u^m(x, t)$ задачи (1.1), (1.2) существует. Если предположить, что обобщенные производные $a_t{}^m$ и $b_x{}^m$ существуют и ограничены в ω, то из теоремы 1 вытекает, что обобщенное решение $u^m(x, t)$ задачи (1.1), (1.2) единственно. Однако в дальнейшем это ограничение не накладывается.

Теорема 3. Пусть $u^m(x, t)$ — обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) и пусть относительно коэффициентов уравнения (1.1), функций f^m, $u_0{}^m$, $u_1{}^m$, $u_2{}^m$, A_t и $(BA)_x$ выполнены предположения, сформулированные в теореме 2. Тогда при $m \to \infty$ обобщенное решение $u^m(x, t)$ задачи (1.1), (1.2) сходится в ω, и притом равномерно в ω_δ при $\delta = \text{const} > 0$, к обобщенному решению $u(x, t)$ задачи (1.3), (1.4).

Доказательство. Приблизим коэффициенты p^m, a^m, b^m, c^m и функцию f^m бесконечно дифференцируемыми в ω функциями $p^{m,n}$, $a^{m,n}$, $b^{m,n}$, $c^{m,n}$, $f^{m,n}$, $n = 1, 2, \ldots$, так что при $n \to \infty$ эти функции сходятся в $L_2(\omega)$ соответственно к функциям p^m, a^m, b^m, c^m, f^m, причем $p^{m,n}(x, 0)$ сходятся в $L_2(0, l)$ к $p^m(x, 0)$, а функции u_0^m, u_1^m, u_2^m приблизим бесконечно дифференцируемыми функциями $u_0^{m,n}$, $u_1^{m,n}$, $u_2^{m,n}$ так, что эти функции при $n \to \infty$ сходятся соответственно в $L_2(0, l)$ и $L_2(0, T)$ к функциям u_0^m, u_1^m, u_2^m. Указанные приближения выбираются так, что при любом m и n для $p^{m,n}$, $a^{m,n}$, $b^{m,n}$, $c^{m,n}$, $f^{m,n}$, $u_0^{m,n}$, $u_1^{m,n}$ $u_2^{m,n}$ выполнены условия (1.5) — (1.6) с постоянными M, α_0, α_1, не зависящими от m и n. Предполагается также, что для новых коэффициентов $p^{m,n}$, $a^{m,n}$, $b^{m,n}$ $c^{m,n}$ и функций $f^{m,n}$, $u_0^{m,n}$, $u_1^{m,n}$, $u_2^{m,n}$ при любом n выполнены условия согласования в точках (0, 0) и (0, l), обеспечивающие существование в ω решения $u^{m,n}(x, t)$ краевой задачи

$$-p^{m,n}u_t + (a^{m,n}u_x)_x + b^{m,n}u_x + c^{m,n}u = f^{m,n}$$
$$u(x, 0) = u_0^{m,n}, \quad u(0, t) = u_1^{m,n}, \quad u(l, t) = u_2^{m,n}$$

обладающего непрерывными в $\bar{\omega}$ производными u_t, u_x, u_{xx}.

Видно, что оценки (3.1), (3.4), (3.7) справедливы для функций $u^{m,n}(x, t)$ с постоянными c_1, c_2, c_3, не зависящими от m и n. Решения $u^{m,n}(x, t)$ удовлетворяют интегральному тождеству

$$\int\limits_\omega [(p^{m,n}\varphi)_t u^{m,n} - a^{m,n}u_x^{m,n}\varphi_x + b^{m,n}u_x^{m,n}\varphi_x + \tag{4.1}$$
$$+ c^{m,n}u^{m,n}\varphi - f^{m,n}\varphi]\,dx\,dt + \int\limits_0^l p^{m,n}(x, 0)\,u_0^{m,n}(x)\,\varphi(x, 0)\,dx = 0$$

при любой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x, t)$, такой, что $\varphi(x, T) = 0$, $\varphi(0, t) = 0$, $\varphi(l, t) = 0$.

Из оценок (3.1), (3.4), (3.7) вытекает, что при фиксированном m можно выбрать такую последовательность $n_k \to \infty$, что $u^{m,n_k} \to u^m$ в ω, и притом равномерно в ω_δ, $\delta = \text{const} > 0$, $u_x^{m,n_k} \to u_x^m$ слабо в $L_2(\omega)$. Учитывая, что $p^{m,n}$, $a^{m,n}$, $b^{m,n}$, $c^{m,n}$, $f^{m,n}$ сходятся в норме $L_2(\omega)$, а $p^{m,n}(x, 0)$, $u_0^{m,n}(x)$ сходятся в норме $L_2(0, l)$ при $n \to \infty$, и переходя к пределу при $n_k \to \infty$ в интегральном тождестве (4.1), получим, что предельная функция $u^m(x, t)$ является обобщенным решением задачи (1.1), (1.2). Предельным переходом получаем, что для функции $u^m(x, t)$ справедливы оценки (3.1), (3.4) и, кроме того, семейства $\{u^m(x, t)\}$ и $\{a^m(x,t)\,u^m(x, t)\}$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны в ω_δ, $\delta = \text{const} > 0$. Поэтому найдется последовательность m_k, такая, что u^{m_k} сходятся к $u(x, t)$ в ω, и притом равномерно в ω_δ, $u_x^{m_k}$ сходятся слабо в $L_2(\omega)$ к u_x, $a^{m_k}u_x^{m_k}$ сходятся равномерно в ω_δ к $V = Au_x$ при $m_k \to \infty$.

Переходя к пределу при $m_k \to \infty$ в интегральном тождестве (3.9), как и при доказательстве теоремы 2, получим, что $u(x, t)$ — обобщенное решение задачи (1.3), (1.4). В силу единственности обобщенного решения этой задачи вся последовательность $u^m(x, t)$ сходится при $m \to \infty$ к $u(x, t)$. Теорема доказана.

Заметим, что теоремы, аналогичные теоремам 2 и 3, можно доказать и в том случае, когда условия (1.2) заменены условиями вида

$$u(x, 0) = u_0^m(x), \quad a^m u_x\,|_{x=0} = u_1^m(t), \quad a^m u_x\,|_{x=l} =$$
$$= u_2^m(t)$$

Кроме того, аналогично может быть исследована в области $\omega' = \{x, t$ $\beta_1(t) < x < \beta_2(t)$, $0 < t < T\}$ первая краевая задача с граничными условиями вида

$$u|_{x=\beta_1(t)} = u_1^m(t), \quad u|_{x=\beta_2(t)} = u_2^m(t)$$

или краевая задача с граничными условиями вида

$$a^m u_x|_{x=\beta_1(t)} = u_1^m(t), \quad a^m u_x|_{x=\beta_2(t)} = u_2^m(t)$$

и начальным условием $u(x, 0) = u_0^m(x)$. Используемые в работе методы полностью применимы также для исследования задачи Коши для уравнения (1.1) в области $\{x, t: -\infty < x < \infty, 0 < t < T\}$ с начальным условием $u(x, 0) = u_0^m(x)$.

Поступила 10 II 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *De Vries D. A.* La conductibilité thermique des matériaux granuleux. Bull. Inst. internat. froid. 1952, vol. 32, N 6.
2. *Hashin Z.* Assessment of the self-consistent scheme approximation; conductivity of particulate compositions. J. Composite Materials, 1968, vol. 2, No. 3.
3. *Brown W. F.* Solid mixture permittivities. J. Chem. Phys., 1955, vol. 23, No. 8.
4. *Болотин В. В., Москаленко В. Н.* Макроскопические коэффициенты теплопроводности и диффузии в микронеоднородных твердых телах. ПМТФ, 1967, № 6.
5. *Буевич Ю. А. Корнеев Ю. А.* О переносе тепла и массы в дисперсной среде. ПМТФ, 1974, № 4.
6. *Marino A., Spagnolo S.* Un tipo di approssimazione dell' operatore $\sum_1^n {}_{ij} D_i(a_{ij}(x) D_j)$ con operatori $\sum_1^n D_j(\beta(x) D_j)$. Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa, 1969, Sep. 3. vol. 23, fsc. 4.
7. *Spagnolo S.* Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche. Ann. scuoba Norm. sup. Pisa, 1968, Sep. 3, vol. 22, fsc. 4.
8. *De Giorgi E., Spagnolo S.* Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori ellittici dell secondo ordine, Bull. Unione mat. ital., Sep. 4, 1973, vol. 8, No. 3.
9. *Sanchez-Palencia E.* Comportements local et macroscopique d'un type de milieux physiques hétérogènes. Internat. J. Engng. Sci., 1974, vol. 12.
10. *Бахвалов Н. С.* Осредненные характеристики тел с периодической структурой. Докл. АН СССР, 1974, т. 218, № 5.
11. *Олейник О. А.* О распространении тепла в некоторых многомерных дисперсных средах. Успехи матем. наук, 1975, т. 30, № 4.
12. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. М., Физматгиз, 1959, т. 5.
13. *Ильин А. М., Калашников А. С. Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа. Успехи матем. наук, 1962, т. 17, № 3.
14. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М., «Мир», 1968.
15. *Кружков С. Н.* Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными. Тр. Моск. матем. о-ва, 1967, т. 16.