

**ТЕЧЕНИЯ РЕАГИРУЮЩЕЙ СМЕСИ В СОПЛАХ ЛАВАЛЯ
В УСЛОВИЯХ КВАЗИЗАМОРОЖЕННОГО ПРОЦЕССА**

А. Л. Ни

(Москва)

Исследуются течения химически активной газовой смеси в малой области сопла Лавалья, где их характер меняется с дозвукового на сверхзвуковой (под скоростью звука подразумевается замороженная скорость звука). Строятся как непрерывные решения, так и решения с ударными волнами. Получены условия безударности.

1. Непрерывные течения. Возьмем начало системы координат (x, r) (цилиндрической или декартовой) на оси симметрии сопла в точке, где скорость потока равна замороженной скорости звука. Ось x направим вдоль оси симметрии сопла. Система уравнений движения газовой смеси в условиях квазизамороженного процесса имеет вид [1] ($\nu = 1$ для плоскопараллельных течений, $\nu = 2$ для течений с осевой симметрией)

$$(1.1) \quad v_x + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_r}{\partial r} = (\nu - 1) \frac{v_r}{r}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial r} = \frac{\partial v_r}{\partial x}$$

Для системы (1.1) на оси симметрии сопла поставим задачу Коши

$$(1.2) \quad v_x = A_1 x, \quad x < 0; \quad v_x = A_2 x, \quad x > 0; \quad v_r = 0 \quad (A_1 > 0)$$

и будем искать в рассматриваемой области течения решения задачи (1.1), (1.2), непрерывные или разрывные.

Заметим, что в точке $x = 0, r = 0$ допускается разрыв производной. Его величина определяет характер перехода от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым.

Задача (1.1), (1.2) инвариантна относительно непрерывной группы преобразования подобия

$$x \rightarrow \alpha x, \quad r \rightarrow \alpha^{1/2} r, \quad v_x \rightarrow \alpha x, \quad v_r = \alpha^{3/2} v_r$$

В соответствии с этим ее решение можно искать в автомодельном виде

$$(1.3) \quad v_x = r^2 f(\xi), \quad v_r = r^3 g(\xi), \quad \xi = x / r^2$$

Подставив (1.3) в (1.1), получим уравнения, которым удовлетворяют функции f и g . После исключения из них g для определения f получим уравнение второго порядка (1.4); при этом g определяется соотношением (1.5)

$$(1.4) \quad (f - 4\xi^2) \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \left(\frac{df}{d\xi} \right)^2 + (2\nu\xi + 1) \frac{df}{d\xi} - 2\nu f = 0$$

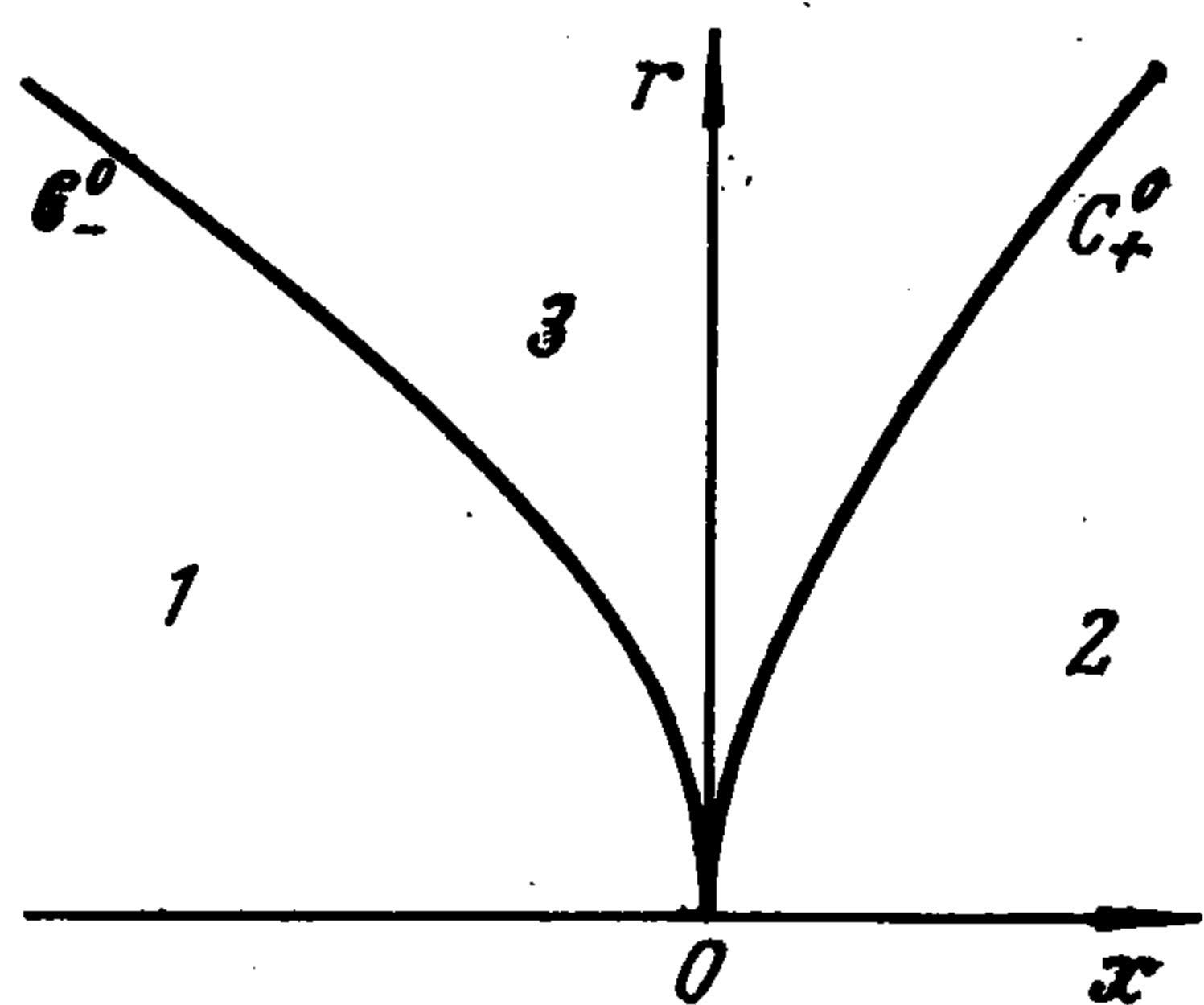
$$(1.5) \quad g = \frac{1}{\nu + 2} \left[f \frac{df}{d\xi} - 4\xi^2 \frac{df}{d\xi} + f(4\xi + 1) \right]$$

Уравнение (1.4) обладает простым частным решением [1]

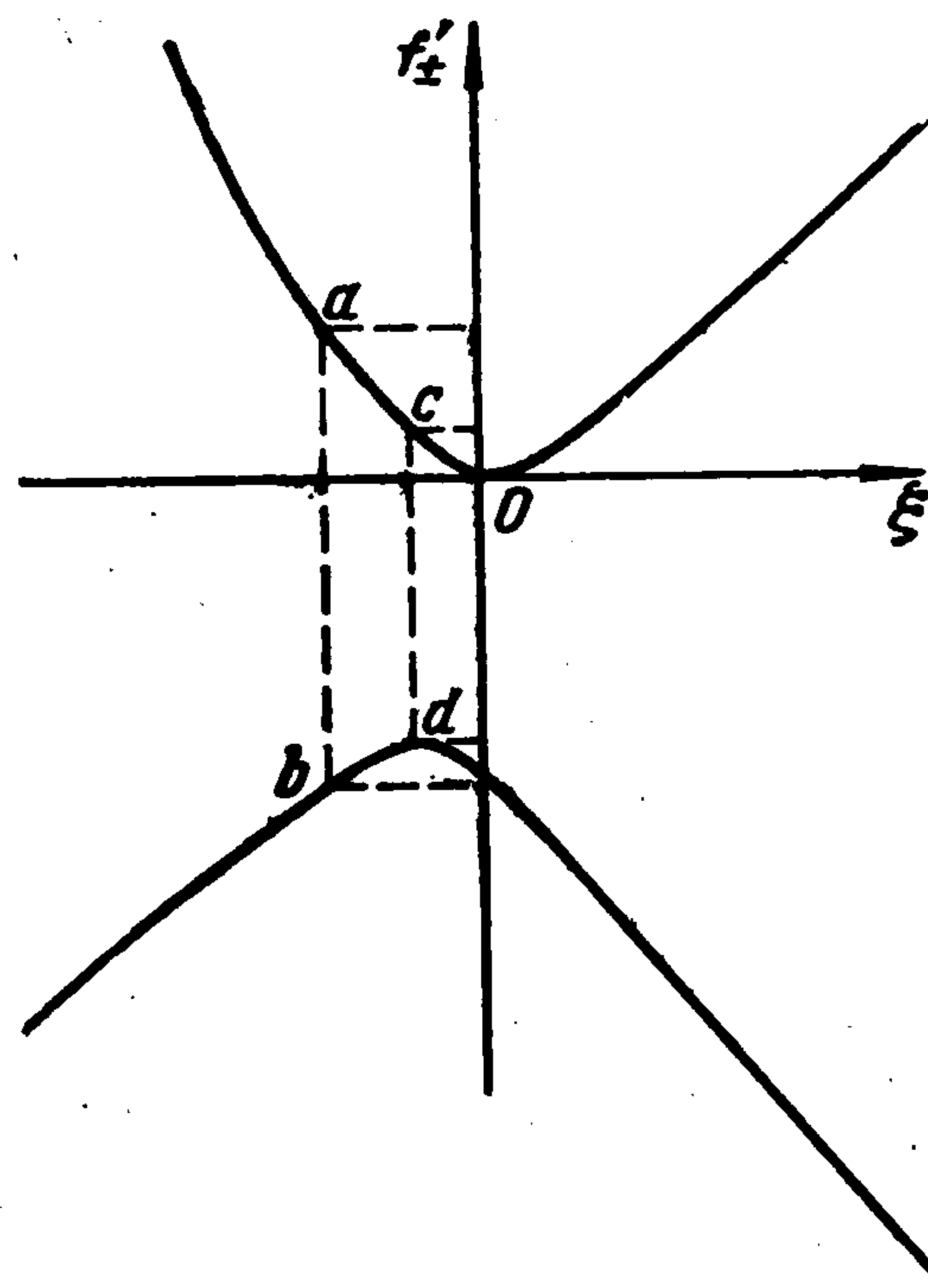
$$(1.6) \quad f = A\xi + A(A + 1) / (2\nu)$$

где A — произвольная постоянная. Особые точки уравнения (1.4) соответствуют особым характеристикам, проходящим через начало координат физической плоскости (x, r) .

Решение задачи будем строить следующим образом. Обозначим через C_-° крайнюю левую, а через C_+° крайнюю правую — особые характеристики, проходящие через начало координат. Область течения разобьем на три части: область 1 расположена слева от C_-° , область 2 — справа от C_+° и область 3 — между особыми характеристиками (фиг. 1). Решения в



Фиг. 1



Фиг. 2

областях 1 и 2 — интегралы (1.6) с постоянной A , равной A_1 и A_2 соответственно, причем уравнения характеристик C_\pm° имеют вид $x/r^2 = \xi_\pm^\circ = \text{const}$, где ξ_-° (ξ_+°) определяет левую (правую) точку пересечения с параболой $f = 4\xi^2$ прямой (1.6) с $A = A_1$ ($A = A_2$). Интегральные кривые, соответствующие физически реальным течениям, могут иметь в точках пересечения с параболой только два наклона, определяемых из (1.4)

$$(1.7) \quad f_\pm' = -v\xi - 1/2 \pm \sqrt{(v\xi + 1/2)^2 + 8v\xi^2}$$

Их качественное поведение изображено на фиг. 2. Точка a имеет координаты $(-1/4, v/2)$, $b - (-1/4, -1)$, $c - (-1/(v+8), v/(v+8))$, $d - (-1/(v+8), -8/(v+8))$.

Заметим, что кривые, отличные от интеграла (1.6), могут иметь точки перегиба только в точках параболы $f = 4\xi^2$. Действительно, пусть в некоторой точке ξ_1 величина $f(\xi_1) \neq 4\xi_1^2$ и $d^2f/d\xi^2 = 0$. Тогда уравнение (1.5) на рассматриваемой интегральной кривой в точке ξ_1 принимает вид

$$(1.8) \quad (df/d\xi)^2 + (2v\xi + 1) df/d\xi - 2vf = 0$$

Отсюда, на основании теоремы существования и единственности, заключаем, что рассматриваемая интегральная кривая имеет вид (1.6). Решение в области 3 можно найти численным интегрированием (1.4) при условии непрерывности решения на особых характеристиках C_-° и C_+° и конечности на них производных.

Анализ конечных разложений в окрестности особых точек $f = 4\xi^2$ показывает, что при $0 \leq A_1 \leq \nu / (\nu + 8)$ в области \mathcal{Z} не существует непрерывных решений, отличных от интегралов (1.6) с A , определяемыми из (1.7). При $A_1 > \nu / (\nu + 8)$ из каждой точки пересечения с параболой прямой $f = A_1\xi + A_1(A_1 + 1) / (2\nu)$ выходит пучок интегральных кривых, имеющих в этой точке отрицательный наклон A_1' , который находится из (1.7) при $\xi = \xi_-^0$. Единственным решением, имеющим в этой точке положительный наклон, является прямая (1.6) с $A = A_1$.

Интегральные кривые, выходящие из параболы с отрицательным наклоном и проходящие под прямой (1.6) с $A = A_1'$, вторично пересекают параболу с бесконечным отрицательным наклоном. Действительно, на таких кривых по ранее доказанному $d^2f / d\xi^2 < 0$ и $df / d\xi < A_1'$, а, поскольку вторая точка пересечения такой кривой с параболой лежит левее второй точки пересечения с параболой прямой (1.6) с $A = A_1'$, из фиг. 2 можно заключить, что рассматриваемая кривая входит в параболу $f = 4\xi^2$ с бесконечным отрицательным наклоном. Таким решениям соответствуют течения с бесконечными ускорениями. Физически такие течения реализоваться не могут, и либо в них образуется ударная волна, либо они должны полностью перестроиться. Аналогично можно показать, что интегральные кривые, проходящие над прямой (1.6) с $A = A_1'$, входят в правую ветвь параболы с положительным наклоном. Решение (1.6) с $A = A_1'$ является предельным в области \mathcal{Z} для непрерывных течений при $A_1 > \nu/2$. В этом случае для плоских течений условие безударности имеет вид

$$(1.9) \quad 17A_1 / 8 - 5R / 2 + 1/2 \leq A_2 \leq A_1$$

$$R = \sqrt{A_1^2 / 16 + A_1(A_1 + 1) / 8} \quad (A_2 > 0)$$

Для $A_2 < 0$ (что соответствует течениям с сомкнувшимися на оси сверхзвуковыми зонами) оно запишется так:

$$(1.10) \quad -5A_1 / 4 - R - 1 \leq A_2 \leq -5A_1 / 4 + R - 1$$

Эти условия при $A_1 \rightarrow \infty$ переходят в условия $1/4 \leq A_2 / A_1 \leq 1$ и $-2 \leq A_2 / A_1 \leq -1/2$, полученные в [2,3] для инертного газа.

При $\nu / (\nu + 8) \leq A_1' \leq \nu / 2$ предельным решением для непрерывных течений в области \mathcal{Z} является ломаная, составленная из отрезка прямой (1.6) с $A = A_1'$ вплоть до второго пересечения с параболой в точке ξ_0 и прямой (1.6) с $A = A_1''$, где A_1'' находится из (1.7) с $\xi = \xi_0$. Это предельное решение, в отличие от случая инертного газа, имеет уже три особых характеристики (кривая 4, фиг. 4).

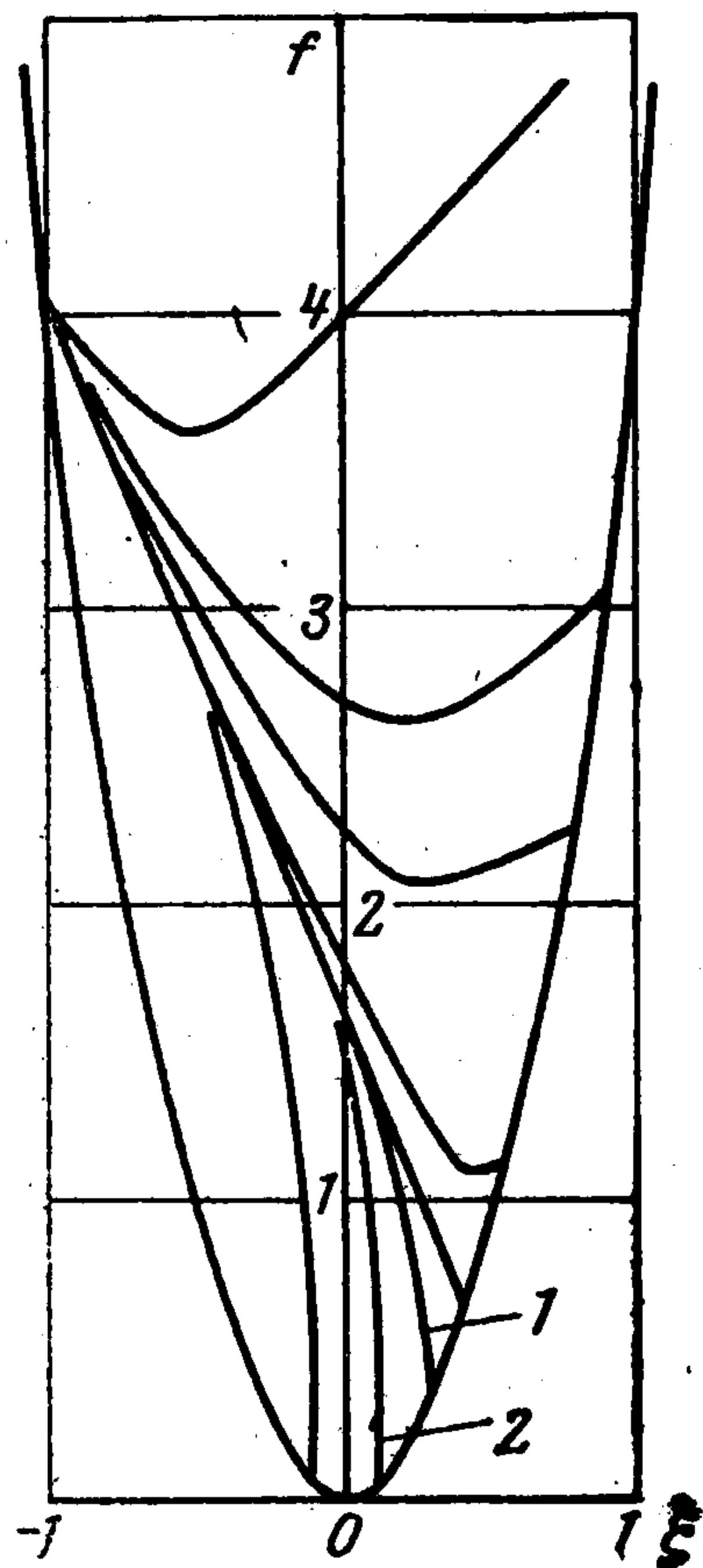
Нетрудно получить условия безударности и в этом случае. В плоских течениях они имеют вид

$$(1.11) \quad 17A_1' / 8 - 5R / 2 + 1/2 \leq A_2 \leq A_1$$

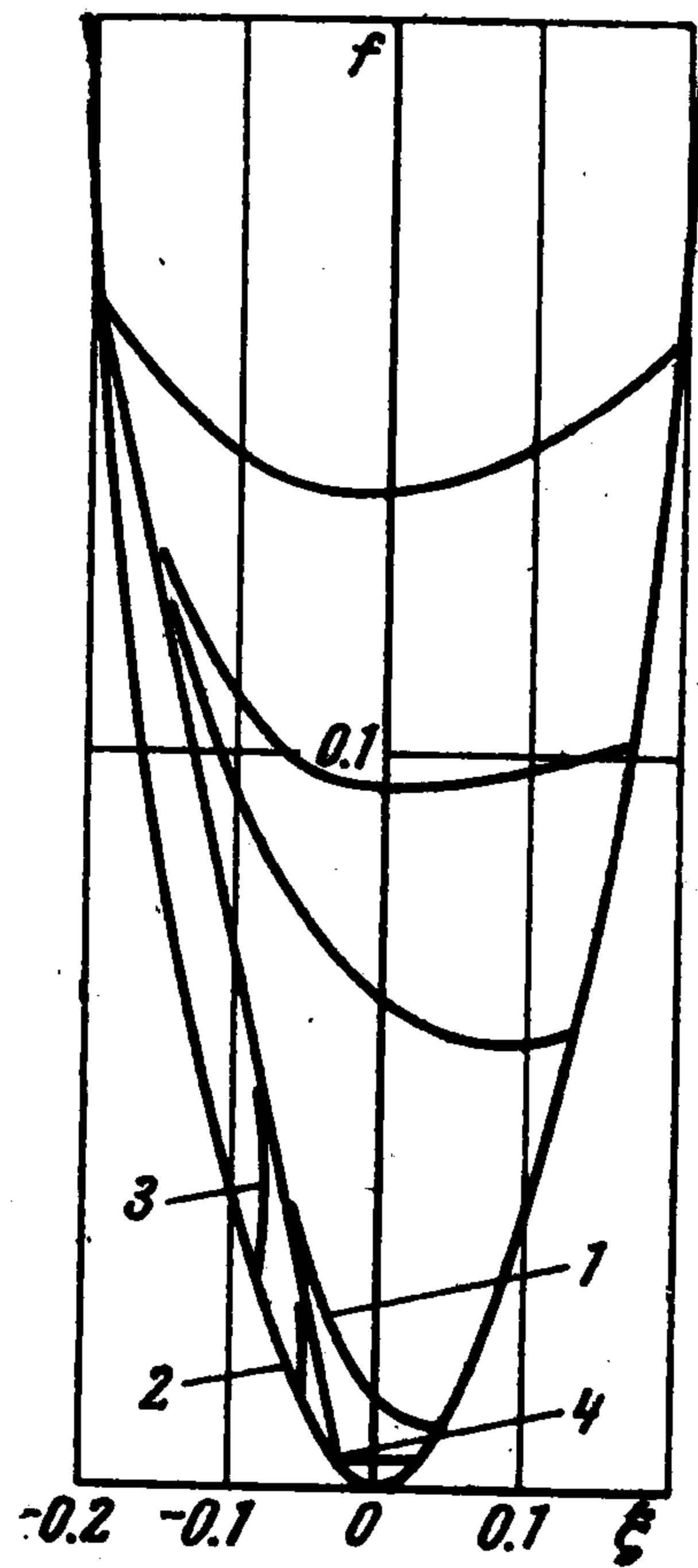
$$(A_2 > 0)$$

$$(1.12) \quad 5A_1' / 4 - R - 1 \leq A_2 \leq -65A_1' / 4 + 21R / 4 - 9/4$$

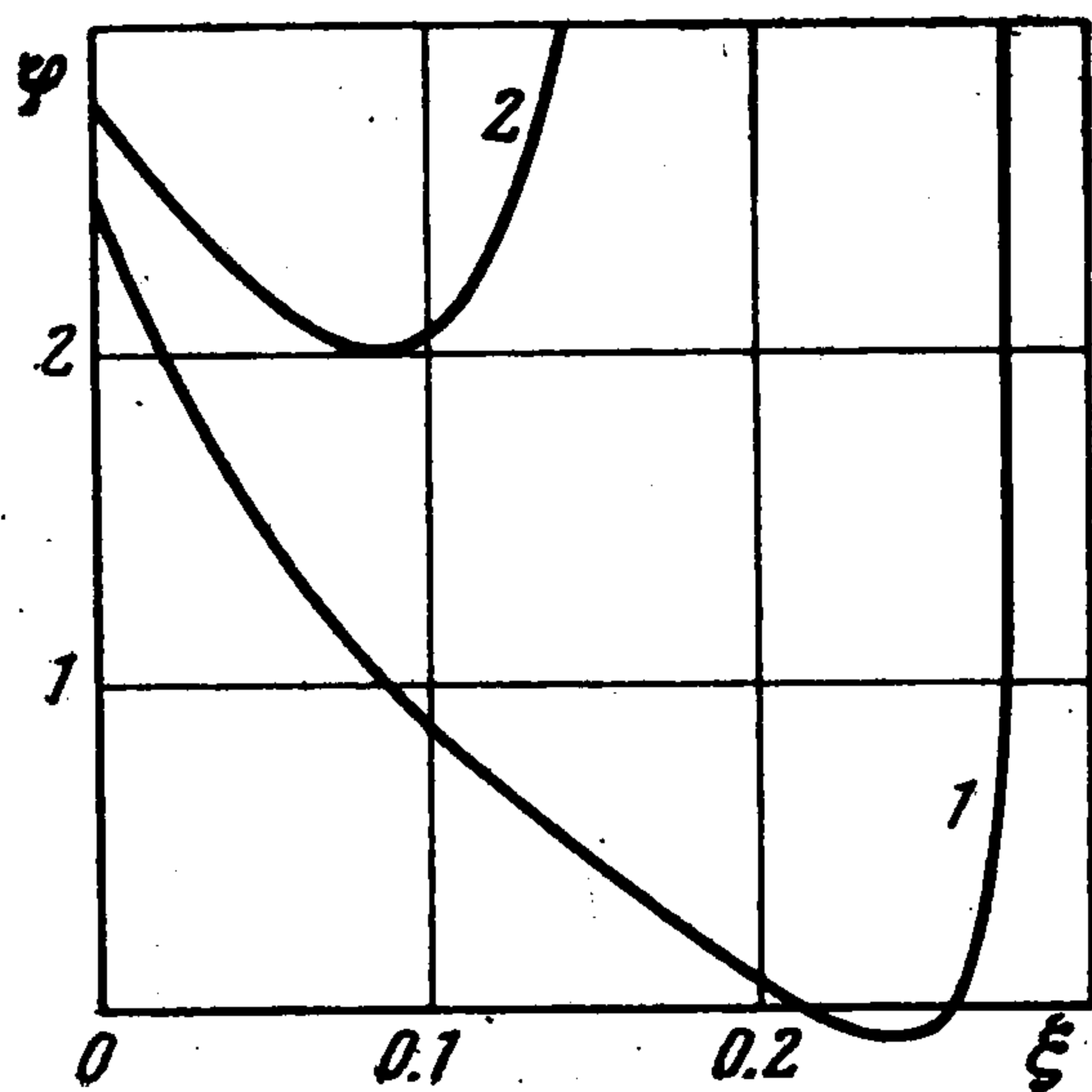
Аналогично можно записать и условия безударности для осесимметричных течений. На фиг. 3 и 4 приведены расчеты при $\nu = 1$ и $A_1 = 1$ и $A = 0.4$ соответственно.



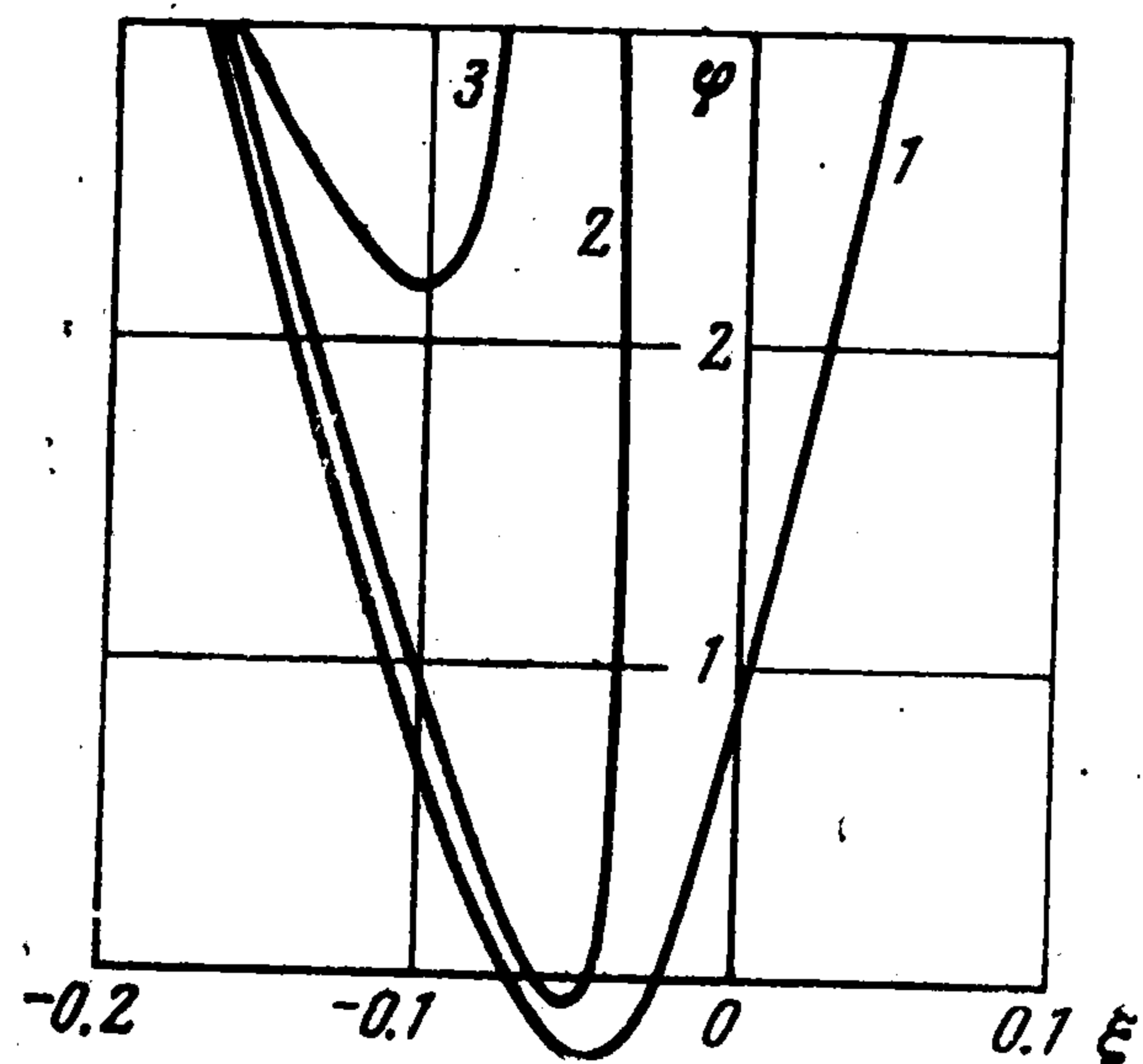
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

2. Течения с ударными волнами. На ударном фронте, заданном неявно уравнением $\varphi(x, r) = 0$, должны выполняться условия

$$(2.1) \quad \begin{aligned} (v_{x1}^2 - v_{x2}^2) \varphi_x / 2 - (v_{r1} - v_{r2}) \varphi_r &= 0, \\ (v_{x1} - v_{x2}) \varphi_r - (v_{r1} - v_{r2}) \varphi_x &= 0 \end{aligned}$$

Здесь индекс 2 относится к состоянию за скачком, а 1 — перед скачком. Условия (2.1) полностью совпадают с условиями на ударном фронте в идеальном газе [2]. По теореме Цемплена $v_{x1} > v_{x2}$.

Уравнение ударного фронта запишем в виде $x/r^2 = \xi_s = \text{const}$. Тогда, с учетом (1.3) и (2.1), получим при $\nu = 1$

$$(2.2) \quad f_1 + f_2 = 8\xi_s^2, \quad (df/d\xi)_1 + (df/d\xi)_2 + 2(10\xi_s + 1) = 0$$

Решение за скачком описывается интегралом (1.6), где A и ξ_s находятся из (2.2). Приведем (2.2) к более удобному виду

$$(2.3) \quad f_1 + \left[\left(\frac{df}{d\xi} \right)_1 + 2(10\xi_s + 1) \right] \left[\left(\frac{df}{d\xi} \right)_1 + 20\xi_s + 1 \right] - \\ - \left[\left(\frac{df}{d\xi} \right)_2 + 20\xi_s + 2 \right] \xi_s - 8\xi_s^2 = 0$$

В численных расчетах для нахождения положения ударного фронта и течения за ним искались нули функции $\Phi(\xi)$, стоящей в левой части (2.3).

На фиг. 5—6 приведены графики $\Phi(\xi)$ для интегральных кривых, изображенных соответственно на фиг. 3—4. Интегральным кривым в плоскости (f, ξ) с индексами 1, 2, 3 соответствуют кривые $\Phi(\xi)$ с теми же индексами. Для каждого случая существует некоторая предельная кривая $\Phi(\xi)$, которая обращается на ней в нуль в одной точке, такая, что для всех кривых, лежащих ниже нее, удовлетворить условиям (2.3) невозможно. Такие течения нельзя представить целиком в указанной здесь авто-модельной форме.

Как видно из фиг. 6, оказывается возможным удовлетворить условиям (2.3) не только на интегральных кривых, описывающих течения с предельной линией, но и на некоторых кривых, для которых существуют непрерывные решения. Кроме того, в отличие от случая инертного газа, возможно образование ударного фронта, имеющего координату $\xi_s < 0$. Течения с приходящей в центр сопла ударной волной, по-видимому, в реальных соплах не реализуются и соответствуют течениям в соплах с изломом стенок.

Автор благодарен О. С. Рыжову за постановку задачи и за полезные обсуждения в процессе работы.

Поступила 13 I 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Наполитано Л. Дж., Рыжов О. С. Об аналогии между неравновесными и вязкими течениями при околосзвуковых скоростях. Ж. выч. матем. и матем. физ., 1971, т. 11, № 5.
2. Рыжов О. С. Образование ударных волн в соплах Лавалья. ПММ, 1962, т. 27, вып. 2.
3. Франкль Ф. И. К теории сопел Лавалья. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1945, т. 9, №5.