

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВОЙНЫХ ВОЛН В ОКРЕСТНОСТИ ОБЛАСТИ ПОКОЯ

С. В. Вершинин, А. Ф. Сидоров

(Свердловск)

Исследуется структура решений уравнений нестационарных двойных волн газовой динамики в окрестности области покоя. Получены общие представления двойных волн в виде специальных рядов с логарифмическими членами. Приводятся результаты численного эксперимента.

В работах [1-3] исследовалась задача о построении в классах плоских и пространственных двойных волн течений, примыкающих через слабый разрыв к области покоя. Были построены приближенные представления решений в окрестности области покоя и изучены постановки краевых задач при решении уравнения для аналога потенциала скоростей в плоскости годографа.

Далее в работах [4-8] была рассмотрена общая (без предположения о вырожденности движения) задача о примыкании произвольных потенциальных течений политропного газа через слабый разрыв к области покоя. Решение задачи было представлено в виде специальных рядов в пространстве временного годографа по степеням модуля вектора скорости r . Значение $r = 0$ соответствовало поверхности слабого разрыва, разделяющей область возмущенного движения и область покоя. В этих же работах исследовались некоторые приложения построенных решений, в частности, к задаче о движении выпуклого поршня и к задаче о распространении слабых криволинейных ударных волн. Сходимость в малом полученных рядов была доказана в [9]. Однако попытка построить ряды по степеням r , использованным в [4-8] для представления решений уравнений двойных волн в окрестности области покоя, к успеху не привела.

Хотя в [1-3] также были построены отрезки разложений в ряды по степеням r (с точностью $O(r^2)$), оказалось, что коэффициент при r^3 из уравнений двойных волн уже не определяется — уравнение для него оказывается неразрешимым. Факт этот связан с тем, что для уравнений двойных волн поверхность $r = 0$ является линией параболического вырождения и одновременно — характеристикой.

Цель данной заметки — получение представлений решений уравнений плоских нестационарных двойных волн в окрестности области покоя. Отрезки построенных рядов, которые, вообще говоря, представляют неаналитические по r функции, могут быть использованы для описания течений при малых r , в частности, за двумерными нормальными детонационными волнами [10] или в задачах об угловых поршнях [11]. Кроме того, метод, использованный для конструирования рядов, может быть применен при исследовании пространственных автомодельных течений с переменными x_1/x_3 , x_2/x_3 (стационарный случай) или x_1/t , x_2/t , x_3/t (нестационарный случай). Регулярных представлений по степеням r в этих случаях также не удалось построить.

1. Система уравнений, описывающая нестационарные двойные волны в политропном газе, в полярных координатах r , φ ($u_1 = r \cos \varphi$, $u_2 = r \sin \varphi$) имеет вид [2]

$$(1.1) \quad \frac{\gamma-1}{2} \theta \left[\theta_{rr} \left(1 - \frac{\theta_\varphi^2}{r^2} \right) + \frac{1-\theta_r^2}{r^2} \theta_{\varphi\varphi} + 2 \frac{\theta_r \theta_\varphi}{r^2} \theta_{r\varphi} + \right. \\ \left. + \frac{\theta_r}{r} (1 - \theta_r^2) - 2 \frac{\theta_r \theta_\varphi^2}{r^3} \right] + \frac{\gamma-3}{2} \left(\theta_r^2 + \frac{\theta_\varphi^2}{r^2} \right) + 2 = 0$$

$$(1.2) \quad \Phi_{rr} \left(1 - \frac{\theta_r^2}{r^2}\right) + \frac{1 - \theta_r^2}{r^2} \Phi_{\varphi\varphi} + 2 \frac{\theta_r \theta_\varphi}{r^2} \Phi_{r\varphi} + \\ + \frac{\Phi_r}{r} (1 - \theta_r^2) - 2 \frac{\theta_r \theta_\varphi}{r^3} \Phi_\varphi = 0, \quad \theta(r, \varphi) = \frac{2}{\gamma - 1} c(r, \varphi)$$

Здесь $c(r, \varphi)$ — скорость звука, γ — показатель адиабаты, $\Phi(r, \varphi)$ — аналог потенциала скоростей в плоскости годографа, u_1 и u_2 — компоненты вектора скорости, нижние индексы r и φ обозначают соответственно дифференцирование по r и φ . Для восстановления течения в физических координатах x_1, x_2, t используются формулы

$$(1.3) \quad x_1 = \left[r \cos \varphi + \frac{\gamma - 1}{2} \theta \left(\theta_r \cos \varphi - \theta_\varphi \frac{\sin \varphi}{r} \right) \right] t + \Phi_r \cos \varphi - \Phi_\varphi \frac{\sin \varphi}{r}$$

(аналогичная формула для x_2 получается из (1.3) заменой φ на $\varphi - \pi/2$).

Полагая в покоящейся газе скорость звука $c = 1$, для уравнения (1.1) имеем при $r = 0$ следующие условия Коши [2]:

$$(1.4) \quad \theta(0, \varphi) = \frac{2}{\gamma - 1}, \quad \theta_\varphi(0, \varphi) = 0, \quad |\theta_r(0, \varphi)| = 1$$

План дальнейшего изложения таков. Вначале рассмотрим случай симметричного годографа $\theta = \theta(r)$. Установим структуру представления $\theta = \theta(r)$ в окрестности точки $r = 0$ с помощью выделения последовательных членов разложения $\theta(r)$. Выделение этих членов производится путем последовательных линеаризаций соответствующих уравнений с оценками порядков отбрасываемых членов.

Далее, в п. 2 при рассмотрении случая несимметричного годографа будем действовать методом неопределенных коэффициентов, взяв за основу структуру решения для симметричного годографа.

Итак, для $\theta = \theta(r)$ имеем задачу Коши

$$(1.5) \quad \frac{\gamma - 1}{2} \theta \left[\theta_{rr} + \frac{\theta_r (1 - \theta_r^2)}{r} \right] + \frac{\gamma - 3}{2} \theta_r^2 + 2 = 0$$

$$(1.6) \quad \theta(0) = \frac{2}{\gamma - 1}, \quad |\theta_r(0)| = 1$$

Не умаляя общности, будем рассматривать случай $\theta_r(0) = 1$. Исследуем прежде всего тип особой точки уравнения (1.5) с начальными условиями (1.6). Уравнение (1.5) — обобщенное однородное, поэтому после замены $r = e^t$, $\theta = u(t) e^t$, $du/dt = p$, $p = y - u$, $u = 1/x$, $y = z + 1$ оно приводится к виду

$$(1.7) \quad \frac{dz}{dx} = \left[-\frac{\gamma + 1}{2} z(z + 1)(z + 2) + \frac{\gamma - 3}{2} (z + 1)^2 x + 2x \right] \times \\ \times \left\{ \frac{\gamma - 1}{2} x [x(z + 1) - 1] \right\}^{-1}$$

с особой точкой (0,0). Оставляя в (1.7) линейные члены, получим уравнение

$$(1.8) \quad \frac{dw}{dx} = \left[\frac{\gamma + 1}{2} x - (\gamma - 1)w \right] \left(-\frac{\gamma - 1}{2} x \right)^{-1}$$

Интегральные кривые уравнения (1.8) имеют вид $w = Cx^2 + (\gamma + 1)(\gamma - 1)^{-1}x$, и особая точка классифицируется как узел. Два исклю-

чительных направления в плоскости w, x определяются соотношениями $\operatorname{tg} \varphi_1 = \infty$, $\operatorname{tg} \varphi_2 = (\gamma + 1)(\gamma - 1)^{-1}$.

Из результатов качественной теории дифференциальных уравнений [12] следует, что сектор $S(\delta) : \{|\varphi - \varphi_2| \leq \delta\}$ параболический (все траектории, наблюдаемые в достаточно малой окрестности особой точки, одним концом входят в эту точку, другим — выходят на границу окрестности). Из теоремы Лона получаем единственность проблемы различения, а следовательно, тип особой точки определяется линейной частью разложений и рассматриваемая точка, действительно, узел.

Решение уравнения (1.5) с начальными условиями (1.6) будем строить в виде формального ряда (ε_0 берется из [2])

$$(1.9) \quad \theta(r) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i(r), \quad \varepsilon_i(r) \sim o(r^{i+1}), \quad \varepsilon_0 = \frac{2}{\gamma-1} + r + \frac{\gamma+1}{4} r^2$$

Опишем алгоритм последовательного определения функций $\varepsilon_i(r)$. На первом шаге $\theta(r)$ представим в виде

$$(1.10) \quad \theta(r) = \theta_1(r) + o(\varepsilon_1) = \varepsilon_0(r) + \varepsilon_1(r) + o(\varepsilon_1)$$

$$(1.11) \quad \varepsilon_1(r) \sim o(r^2) \quad (\varepsilon_1' \sim o(r), \quad \varepsilon_1'' \sim o(1))$$

Подставляя (1.10) в (1.5), получим нелинейное уравнение для определения $\varepsilon_1(r)$

$$(1.12) \quad \varepsilon_1'' + \frac{1}{r} [\varepsilon_0' + \varepsilon_1' + o(\varepsilon_1')] [1 - (\varepsilon_0' + \varepsilon_1' + o(\varepsilon_1'))^2] + \varepsilon_0'' + o(\varepsilon_1'') + F_1(r) = 0$$

$$F_1(r) = \frac{1/2(\gamma-3)(\varepsilon_0' + \varepsilon_1' + o(\varepsilon_1'))^2 + 2}{1/2(\gamma-1)(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + o(\varepsilon_1))} \approx \frac{\gamma+1}{2} \left(1 + \frac{\gamma-5}{2} r + o(r)\right)$$

Оставляя в уравнении (1.12) члены порядка ε_1'' и отбрасывая члены порядка $o(\varepsilon_1'')$, получим линейное уравнение относительно $\varepsilon_1(r)$

$$\varepsilon_1'' - \frac{2}{r} \varepsilon_1' = \frac{(\gamma+1)(\gamma+4)}{2} r$$

Интегрируя его с учетом (1.11), находим (C — произвольная постоянная)

$$\varepsilon_1(r) = \frac{(\gamma+1)(\gamma+4)}{6} r^3 \ln r + \left[\frac{1}{3} C - \frac{(\gamma+1)(\gamma+4)}{18} \right] r^3$$

Второй шаг метода дает

$$\varepsilon_2(r) = \frac{(\gamma+1)(\gamma+3)(\gamma+4)}{4} r^4 \ln r + \left\{ -\frac{5(\gamma+1)(\gamma+3)(\gamma+4)}{16} + \frac{1}{4} \left[\frac{\gamma+1}{48} (25\gamma^2 + 100\gamma + 243) + 6(\gamma+3) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{1}{3} C - \frac{(\gamma+1)(\gamma+4)}{18} \right) \right] \right\} r^4$$

На n -м шаге разыскиваемое решение запишем в виде

$$(1.13) \quad \theta(r) = \theta_n + o(\varepsilon_n) = \theta_{n-1} + \varepsilon_n + o(\varepsilon_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i + \varepsilon_n + o(\varepsilon_n)$$

причем величина $\varepsilon_n(r)$ должна удовлетворять условию

$$(1.14) \quad \varepsilon_n(r) \sim o(r^{n+1}), \quad (\varepsilon_n' \sim o(r^n), \quad \varepsilon_n'' \sim o(r^{n-1}))$$

Подставляя (1.13) в (1.5), получим

$$(1.15) \quad \frac{\gamma-1}{2} (\theta_{n-1} + \varepsilon_n + o(\varepsilon_n)) \left\{ \varepsilon_n'' + \frac{1}{r} (\theta_{n-1}' + \varepsilon_n' + o(\varepsilon_n')) [1 - (\theta_{n-1}' + \varepsilon_n' + o(\varepsilon_n'))^2] + \theta_{n-1}'' + o(\varepsilon_n'') \right\} + \frac{\gamma-3}{2} [\theta_{n-1}' + \varepsilon_n' + o(\varepsilon_n')]^2 + 2 = 0$$

Проведя оценки всех членов уравнения (1.15), приходим к уравнению

$$(1.16) \quad \varepsilon_n'' - \frac{2}{r} \varepsilon_n' = -\frac{\gamma-1}{2} \theta_{n-1} \left[\frac{1}{r} \theta_{n-1}' (1 - \theta_{n-1}'^2) + \theta_{n-1}'' \right] - \frac{\gamma-3}{2} \theta_{n-1}'^2 - 2 + o(\varepsilon_n'')$$

Члены уравнения (1.16), порядка ниже чем r^{n-1} , уничтожаются по построению. Отбрасывание членов порядка $o(\varepsilon_n'')$ приводит к уравнению n -го приближения

$$(1.17) \quad \varepsilon_n'' - \frac{2}{r} \varepsilon_n' = r^n \sum_{i=0}^{k_n} b_i^{(n)}(\gamma, C) \ln^i r$$

где $k_n = m$, если $n = 2m - 1$, $n = 2m$; $b_1^{(1)} \equiv 0$, $b_i^{(n)}$ — постоянные, зависящие от γ и C , вид их можно найти с помощью рекуррентных формул. Интегрирование (1.17) (в соответствии с требованием (1.14) константы интегрирования полагаются тождественными нулю) приводит к представлению (структура $d_i^{(n)}(\gamma, C)$ аналогична $b_i^{(n)}(\gamma, C)$)

$$\varepsilon_n(r) = r^{n+2} \sum_{i=0}^{k_n} d_i^{(n)}(\gamma, C) \ln^i r$$

Таким образом, решению $\theta(r)$ уравнения (1.5) с начальными условиями (1.6) можно поставить в соответствие формальный ряд

$$(1.18) \quad \theta(r) \sim \frac{2}{\gamma-1} + \sum_{\substack{n=0 \\ m=1}}^{\infty} a_{nm}(\gamma, C) r^{m+2n} \ln^n r$$

$$(a_{01} = 1, \quad a_{02} = 1/4 (\gamma + 1), \quad a_{11} = 1/6 (\gamma + 1) (\gamma + 4), \quad a_{03} = 1/3 C - 1/18 (\gamma + 1) (\gamma + 4))$$

Замечание. В [13] для случая цилиндрической симметрии с автономной переменной $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}/t$ в окрестности слабого разрыва с точностью до величин первого порядка малости получено — $\xi - C_0 = 2\alpha_0 v + \text{const } v^2$ ($v(r, t) = v_r$, $\xi = r/t$, C_0 — значение скорости звука при $v = 0$, α_0 — положительная постоянная), т. е. нулевой член разложения для $\theta(r)$. Рекуррентная процедура, описанная выше, позволяет сконструировать все разложение целиком.

2. В случае несимметричного ($\theta = \theta(r, \varphi)$) годографа решение уравнения (1.1) с начальными условиями (1.4) будем по аналогии с (1.18) искать

В ВИДЕ

$$(2.1) \quad \theta(r, \varphi) = \frac{2}{\gamma-1} + \sum_{\substack{n=0 \\ m=1}}^{\infty} a_{nm}(\varphi) r^{m+2n} \ln^n r$$

Для определения неизвестных коэффициентов $a_{nm}(\varphi)$ (2.1) подставляется в (1.1) и коэффициенты при членах вида $r^s \ln^q r$ приравняются нулю.

Опишем процедуру последовательного отыскания $a_{nm}(\varphi)$. С этой целью выпишем явный вид коэффициента T_{sq} при $r^s \ln^q r$ в уравнении (1.1) после подстановки туда (2.1)

$$(2.2) \quad T_{sq} = -\frac{\gamma-1}{2} \left\{ \sum_{\substack{M_4=s-2q \\ N_4=q}} p_2 [\Pi_1 - (2m_4 - m_2 + 4n_4 - 2n_2) \Pi_2 + \right. \\ \left. + p_3 \Pi_3] + \sum_{\substack{M_4=s-2q-2 \\ N_4=q+1}} \left(\sum_{\substack{i,j,k=2 \\ i \neq j \neq k}}^4 n_i p_j p_k \right) \Pi_1 + [n_2 (p_2^2 - 1) - 2(\alpha_{24} + \right. \\ \left. + 4n_2 m_4 + n_4)] \Pi_2 + [\alpha_{24} + 4\beta_{23} + (n_2 + n_3)] \Pi_3 + \right. \\ \left. + \sum_{\substack{M_4=s-2q-4 \\ N_4=q+2}} \left(\sum_{\substack{i,j,k=2 \\ i \neq j \neq k}}^4 \beta_{ij} p_k \right) \Pi_1 - n_2 [2n_4 - (p_2 - 1)(n_2 - 1)] \Pi_2 + \right. \\ \left. + \beta_{23} \Pi_3 + \sum_{\substack{M_4=s-2q-6 \\ N_4=q+3}} \delta_{234} \Pi_1 \right\} - \sum_{\substack{M_3=s-2q+1 \\ N_3=q}} p_1 [p_2 p_3 \Pi_4 + (2(n_1 - 2n_3) + \\ \left. + (m_1 - 2m_3)) \Pi_5 + p_2 \Pi_6] - \sum_{\substack{M_3=s-2q-1 \\ N_3=q+1}} \left(\sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^3 n_i p_j p_k \right) \Pi_4 + \\ \left. + [n_1 (p_1^2 - 1) - 2(\alpha_{13} + 4\beta_{13} + n_3)] \Pi_5 + (\alpha_{12} + 4\beta_{12} + N_2) \Pi_6 - \right. \\ \left. - \sum_{\substack{M_3=s-2q-3 \\ N_3=q+2}} \left(\sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^3 \beta_{ij} p_k \right) \Pi_4 + n_1 [-2n_3 + (p_1 - 1)(n_1 - 1)] \Pi_5 + \right. \\ \left. + \beta_{12} \Pi_6 - \sum_{\substack{M_3=s-2q-5 \\ N_3=q+3}} \delta_{123} \Pi_4 + \sum_{\substack{M_3=s-2q \\ N_3=q}} \left[\frac{\gamma-1}{2} p_1 (p_1 - 1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\gamma-1}{2} p_2 + \frac{\gamma-3}{2} p_1 p_2 \right] \Pi_7 + \frac{\gamma-3}{2} \Pi_8 + \frac{\gamma-1}{2} \Pi_9 + \right. \\ \left. + \sum_{\substack{M_3=s-2q-2 \\ N_3=q+1}} \left[(\gamma-1) n_1 p_1 + \frac{\gamma-3}{2} (\alpha_{12} + 4\beta_{12} + N_2) \right] \Pi_7 + \right. \\ \left. + \sum_{\substack{M_3=s-2q-4 \\ N_3=q+2}} \left[\frac{\gamma-1}{2} n_1 (n_1 - 1) + \frac{\gamma-3}{2} n_1 n_2 \right] \Pi_7 + (s+2)^2 a_{qs-2q+2} + \right. \\ \left. + a_{qs-2q+2} + 2(q+1)(s+2) a_{q+1s-2q} + (q+1)(q+2) a_{q+2s-2q-2} \right.$$

Здесь

$$\Pi_1 = a_{n_1 m_1+1} a_{n_2 m_2+1} a_{n_3 m_3+1} a_{n_4 m_4+1}$$

$$\Pi_2 = a_{n_1 m_1+1} a_{n_2 m_2+1} a_{n_3 m_3+1} a_{n_4 m_4+1},$$

$$\Pi_3 = a_{n_1 m_1+1} a_{n_2 m_2+1} a_{n_3 m_3+1} a_{n_4 m_4+1}$$

$$\Pi_4 = a_{n_1 m_1+1} a_{n_2 m_2+1} a_{n_3 m_3+1}, \quad \Pi_5 = a_{n_1 m_1+1} a_{n_2 m_2+1} a_{n_3 m_3+1}$$

Указанный алгоритм позволяет с помощью разложений (1.18), (2.1) определять структуру решения уравнения для потенциала скоростей (1.2). Разыскивая $\Phi(r, \varphi)$ в виде

$$\Phi(r, \varphi) \sim b_{01}r + \sum_{\substack{n=0 \\ m=2}}^{\infty} b_{nm}(\varphi) r^{m+2n} \ln^n r$$

получим соответствующие рекуррентные формулы для коэффициентов b_{nm} .

$$(2k+1)(2k+2)b_{q_2k-2q+2} = \psi_{q_2k-2q+2}(b_{01}, \dots, b_{q_*2k-2q_*+2}, a_{00}, \dots, a_{q_*2k-2q_*+1})$$

$$(2k+2)(2k+3)b_{q_2k-2q+3} = \psi_{q_2k-2q+3}(b_{01}, \dots, b_{q_*2k-2q_*+3}, a_{00}, \dots, a_{q_*2k-2q_*+2})$$

$$(k \geq q_* > q \geq 0, k = 0, 1, 2, \dots), \text{ где } b_{01} = l_1(\varphi) \text{ — произвольная функция.}$$

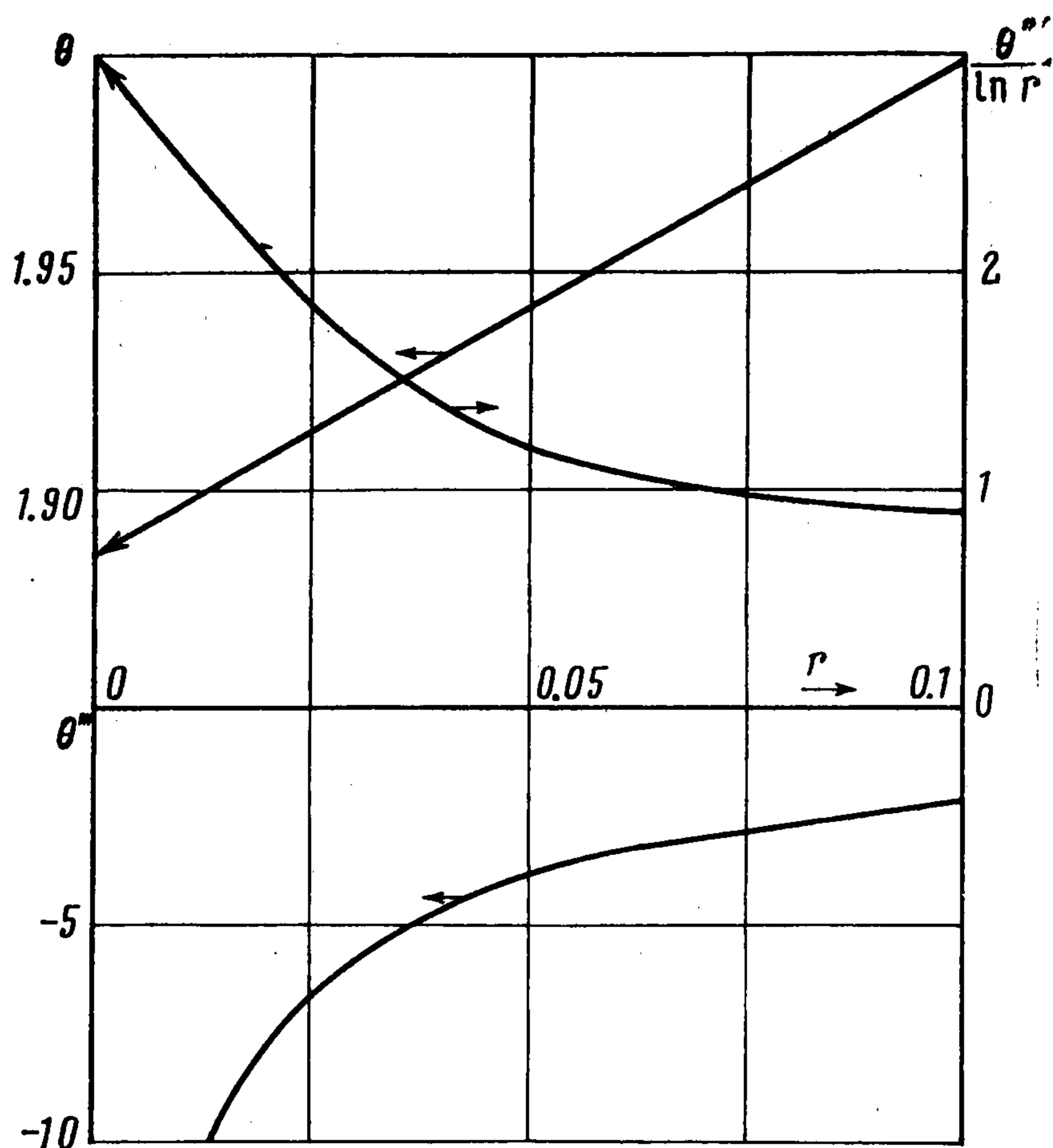
Итак, построение представления решений уравнений двойных волн (1.1), (1.2) завершено. Произвол в этих представлениях — две функции

$l(\varphi)$ и $l_1(\varphi)$ от одного аргумента. С помощью $l_1(\varphi)$ можно в произвольный момент времени $t = t_0$ задать форму слабого разрыва. Задание же $l(\varphi)$ определяется конкретными условиями физической задачи. Сходимость построенных рядов пока не установлена.

3. Были проведены численные расчеты для обыкновенного дифференциального уравнения (1.5) с граничными условиями [10]

$$r = \frac{D}{\gamma + 1}, \quad \theta(r) = \frac{2\gamma D}{\gamma^2 - 1}, \quad \theta_r(r) = 1$$

(D — скорость фронта детонационной волны) вплоть до $r = 0$.



Эти граничные условия соответствуют выполнению условий Чепмена — Жуге на фронте цилиндрической детонационной волны, инициированной в момент $t = 0$ вдоль бесконечной оси. Функция $\theta(r)$ соответствует распределению скорости звука за волной как функция скорости продуктов взрыва. Значение $\theta(0)$ соответствует скорости распространения слабого разрыва, отделяющего область движения от области, где продукты взрыва покоятся.

На фигуре приведены профили величин θ , θ'' , $\theta''/\ln r$ ($\gamma = 3$, $D = 4$). Из графиков видно, что для θ , θ'' , $\theta''/\ln r$ справедливо: $\theta \sim 1 + r$, $\theta'' \sim C_1 + C_2 \ln r$, $|\theta''/\ln r| < K$, в некоторой окрестности $r = 0$ (C_1, C_2, K — постоянные). Таким образом, численные расчеты подтверждают наличие члена $r^3 \ln r$ в разложении функции $\theta(r)$.

Поступила 6 I 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Сидоров А. Ф. О течениях газа в окрестности слабого разрыва. Докл. АН СССР, 1966, т. 167, № 1.
2. Сидоров А. Ф. О нестационарных течениях газа, примыкающих к области покоя. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
3. Сидоров А. Ф. О некоторых пространственных течениях газа, примыкающих к области покоя. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
4. Сидоров А. Ф. О разрушении потенциальных течений газа, примыкающих к области покоя. ПММ, 1971, т. 35, вып. 3.
5. Сидоров А. Ф. О решении некоторых краевых задач в теории потенциальных течений газа и распространении слабых ударных волн. Докл. АН СССР, 1972, т. 204, № 4.
6. Сидоров А. Ф. Метод решения некоторых краевых задач для нелинейных уравнений гиперболического типа и распространение слабых ударных волн. ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.
7. Зубов Е. Н., Сидоров А. Ф. О решении одной краевой задачи для неустановившегося пространственного течения газа и распространении слабых сферических ударных волн. В сб.: Численные методы механики сплошной среды, т. 3, № 3. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1972.
8. Гаврилушкин И. Б., Сидоров А. Ф. Об одном классе решений нелинейного уравнения для потенциала скоростей. ПММ, 1974, т. 38, вып. 2.
9. Баутин С. П. Аналитические решения задачи о движении поршня. В сб.: Численные методы механики сплошной среды, т. 4, № 1, Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1973.
10. Сидоров А. Ф. Некоторые точные решения нестационарной двумерной газовой динамики. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.
11. Ермолин Е. В., Рубина Л. И., Сидоров А. Ф. К задаче о двух поршнях. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
12. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений М.—Л., Гостехиздат, 1947.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.