

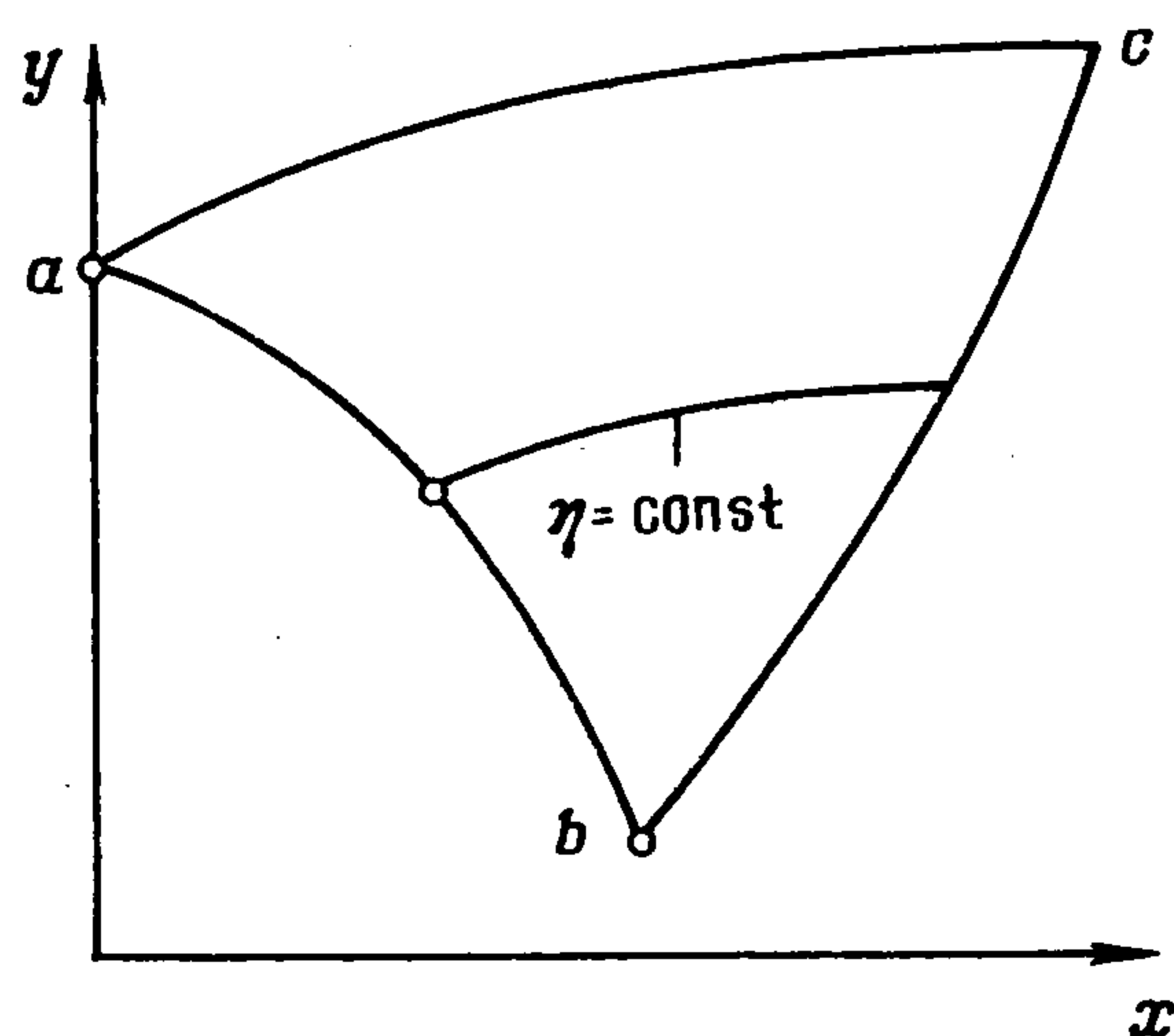
## УСЛОВИЕ ЛЕЖАНДРА В ОПТИМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ СВЕРХЗВУКОВОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

А. В. Федоров

(Ленинград)

Получено необходимое условие Лежандра в задачах об оптимальном (в смысле минимума волнового сопротивления) сверхзвуковом обтекании тел. Исследование проводится в плоском и осесимметричном случаях; предполагается, что наложены изопериметрические ограничения общего вида. Рассмотрены безударные течения и течения с присоединенными ударными волнами. В частном случае, когда задача допускает переход к контрольному контуру, на основе предлагаемого в работе общего метода выведено необходимое условие второго порядка, ранее полученное Ю. Д. Шмыглевским [1], а затем Гудерлеем и др. [2].

1. Постановка задачи. Рассматривается сверхзвуковое обтекание плоских и осесимметричных тел, безударное (фиг. 1) и с присоединенными ударными волнами (фиг. 2). На фиг. 1  $ab$  — контур искомого тела,  $ac$  и



Фиг. 1

$bc$  — характеристики соответственно первого и второго семейств. Течение левее  $ac$  считается заданным, входной поток в случае безударного течения, вообще говоря, вихревой. На фиг. 2  $ab$  — контур тела,  $ac$  — присоединенная ударная волна,  $bc$  — характеристика второго семейства,  $d$  — точка излома контура;  $dm$  и  $dn$  — характеристики первого семейства, ограничивающие волну разрежения  $dmcnd$ . Набегающий поток в схеме фиг. 2 считается равномерным и параллельным оси

$x$ . Предполагается, что внутри области  $abc$  течение сверхзвуковое и ударных волн нет.

Пусть  $u$  и  $v$  — проекции скорости на оси  $x$  и  $y$ ,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $\psi$  — функция тока, причем  $d\psi = y^{\nu} \rho (u dy - v dx)$ , где  $\nu = 0$  и  $\nu = 1$  соответственно в плоском и осесимметричном случаях. Значение  $\psi$  на теле принято равным единице.

Стационарное неизэнтропическое течение газа внутри области  $abc$  описывается уравнениями

$$(1.1) \quad L_1 = \frac{\partial y^{\nu} p}{\partial \psi} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad L_2 = \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{u}{v} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{y^{\nu} \rho v} = 0$$

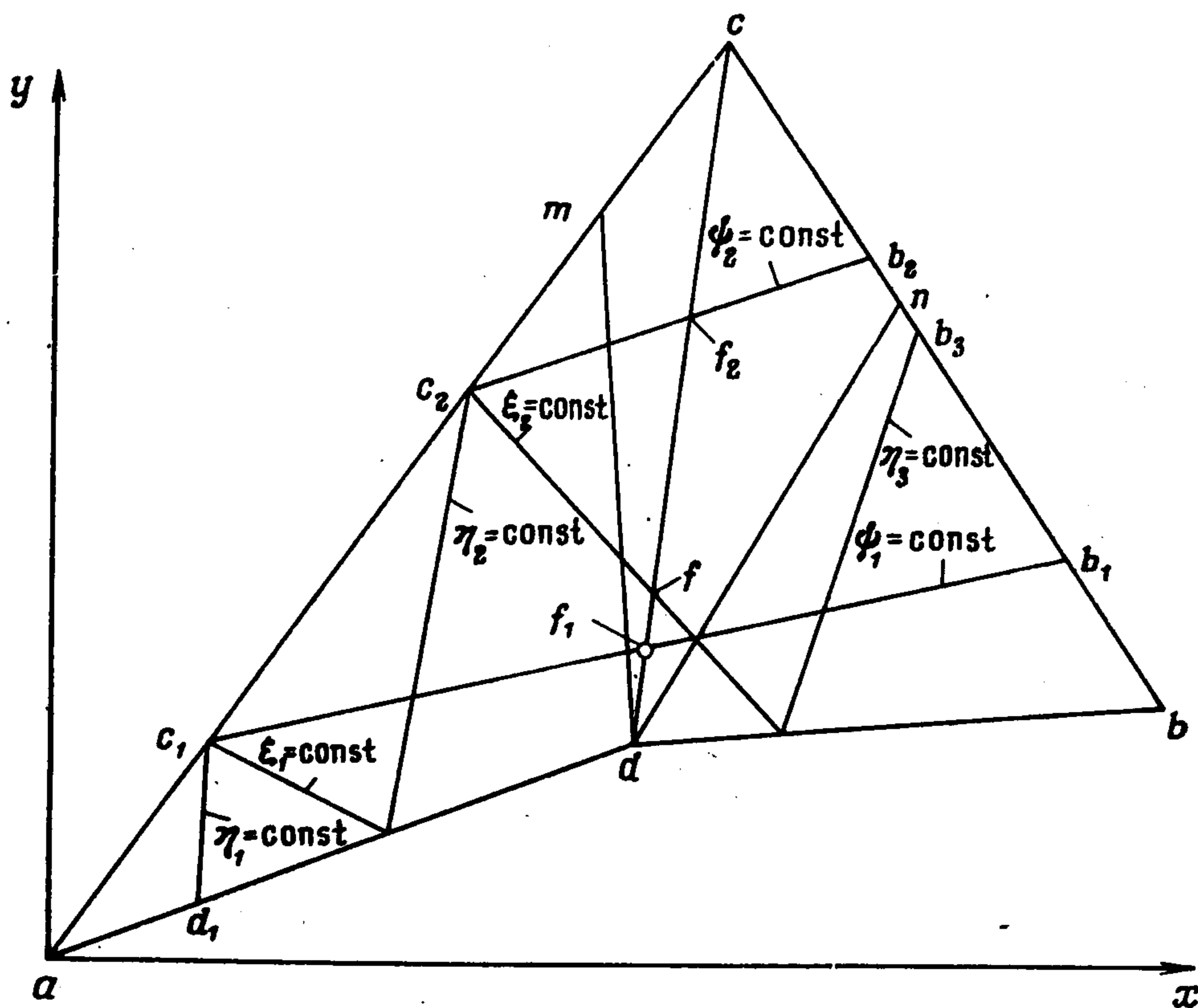
Давление и плотность представлены в виде  $p = p(u, v, \psi)$ ,  $\rho = \rho(u, v, \psi)$  посредством соотношений

$$\frac{w^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}, \quad \frac{p}{\rho^{\kappa}} = \varphi^{\kappa - 1}(\psi) \quad (w^2 = u^2 + v^2)$$

Здесь  $\kappa$  — показатель адиабаты,  $\varphi(\psi)$  — энтропийная функция.  
Волновое сопротивление выражается функционалом

$$(1.2) \quad \chi = \int_{ab} y^\kappa p(x(y), y) dy$$

Положение точки  $a$ , а в случае безударного обтекания и наклон  $x_a'$  контура  $ab$  в ней считаются фиксированными; одна из координат точки  $b$  ( $x_b$  или  $y_b$ ) может быть произвольной.



Фиг. 2

Изопериметрическое условие, наложенное на контур тела, имеет вид

$$(1.3) \quad r = \int_{ab} f(x(y), x'(y), y) dy$$

где  $x(y)$  — функция, описывающая контур тела, а  $x'$  — ее производная по  $y$ .

Вдоль контура  $ab$  выполняется условие непротекания

$$(1.4) \quad vx'(y) - u = 0$$

Ставится следующая оптимальная задача: найти функцию  $x(y)$ , реализующую минимум функционала (1.2), при выполнении уравнений (1.1) в области  $abc$  и условий (1.3), (1.4) вдоль контура  $ab$ .

Известно, что при безударном обтекании условиям стационарности можно удовлетворить гладким оптимальным контуром. Иначе обстоит дело для течений с присоединенными ударными волнами. В этом случае оптимальный контур содержит, вообще говоря, бесконечное число изломов, сгущающихся к передней точке тела [3]. При выводе необходимого условия Лежандра достаточно рассмотреть контур с одним изломом (фиг. 2.)

2. Безударные течения. Введем множители Лагранжа  $\gamma_0(y)$ ,  $\gamma$ ,  $h_i(\psi, y)$  и составим функционал Лагранжа

$$I = \int_{ab} [y^\nu p + \gamma_0(y)(vx' - u) + \gamma f] dy + \iint_S (h_1 L_1 + h_2 L_2) d\psi dy$$

Управлением будем считать функцию  $x'(y)$ . Чтобы в допустимом режиме схема течения не изменилась, величина  $|\delta x'|$  должна выбираться достаточно малой.

Сопряженная система для  $h_i$  имеет следующий вид [4]:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} y^\nu \rho u h_{1\psi} + h_{1y} - \frac{1}{v} h_{2\psi} - \frac{u}{y^\nu \rho v a^2} h_{2y} &= 0 \\ y^\nu \rho v h_{1\psi} + \frac{u}{v^2} h_{2\psi} - \frac{v^2 - a^2}{y^\nu \rho v^2 a^2} h_{2y} &= 0 \end{aligned}$$

Здесь  $a^2 = \kappa p / \rho$  — квадрат скорости звука.

К системе (2.1) присоединяются естественные граничные условия на контуре тела  $ab$

$$(2.2) \quad h_1 = -1, \quad h_2 = \gamma_0 v = \gamma \int_{y_b}^y \left( f_x - \frac{d}{dy} f_{x'} \right) dy + \gamma^*$$

и на характеристике  $bc$

$$(2.3) \quad h_2 - h_1 y^\nu \rho v^2 \operatorname{tg} \alpha = 0 \quad (\alpha = \arcsin a / w)$$

Здесь  $\alpha$  — угол Маха,  $\gamma^*$  — константа интегрирования. Имеем

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \delta I = \int_{ab} [y^\nu \delta p + \gamma_0 (\delta v \delta x' + v \delta x' + x' \delta v - \delta u) + \gamma \delta f] dy + \\ + \oint_{abca} \left( y^\nu h_1 \delta p + h_2 \delta \frac{u}{v} \right) dy + \left( h_1 \delta u - h_2 \delta \frac{1}{y^\nu \rho v} \right) d\psi - \\ - \iint_S \left( y^\nu h_{1\psi} \delta p - h_{1y} \delta u + h_{2\psi} \delta \frac{u}{v} + h_{2y} \delta \frac{1}{y^\nu \rho v} \right) d\psi dy \end{aligned}$$

Часть контурного интеграла (2.4), относящаяся к характеристике  $ac$ , обращается в нуль, так как входной поток задан и  $\delta x'_a = 0$ . Вдоль характеристики  $bc$  и контура  $ab$  выполняются соотношения

$$(2.5) \quad \frac{dy}{d\psi} = \frac{\sin(\alpha - \theta)}{y^\nu \rho w \sin \alpha} \quad (\text{на } bc), \quad d\psi = 0 \quad (\text{на } ab)$$

Здесь  $\theta = \operatorname{arctg}(v/u)$  — наклон вектора скорости к оси  $x$ .

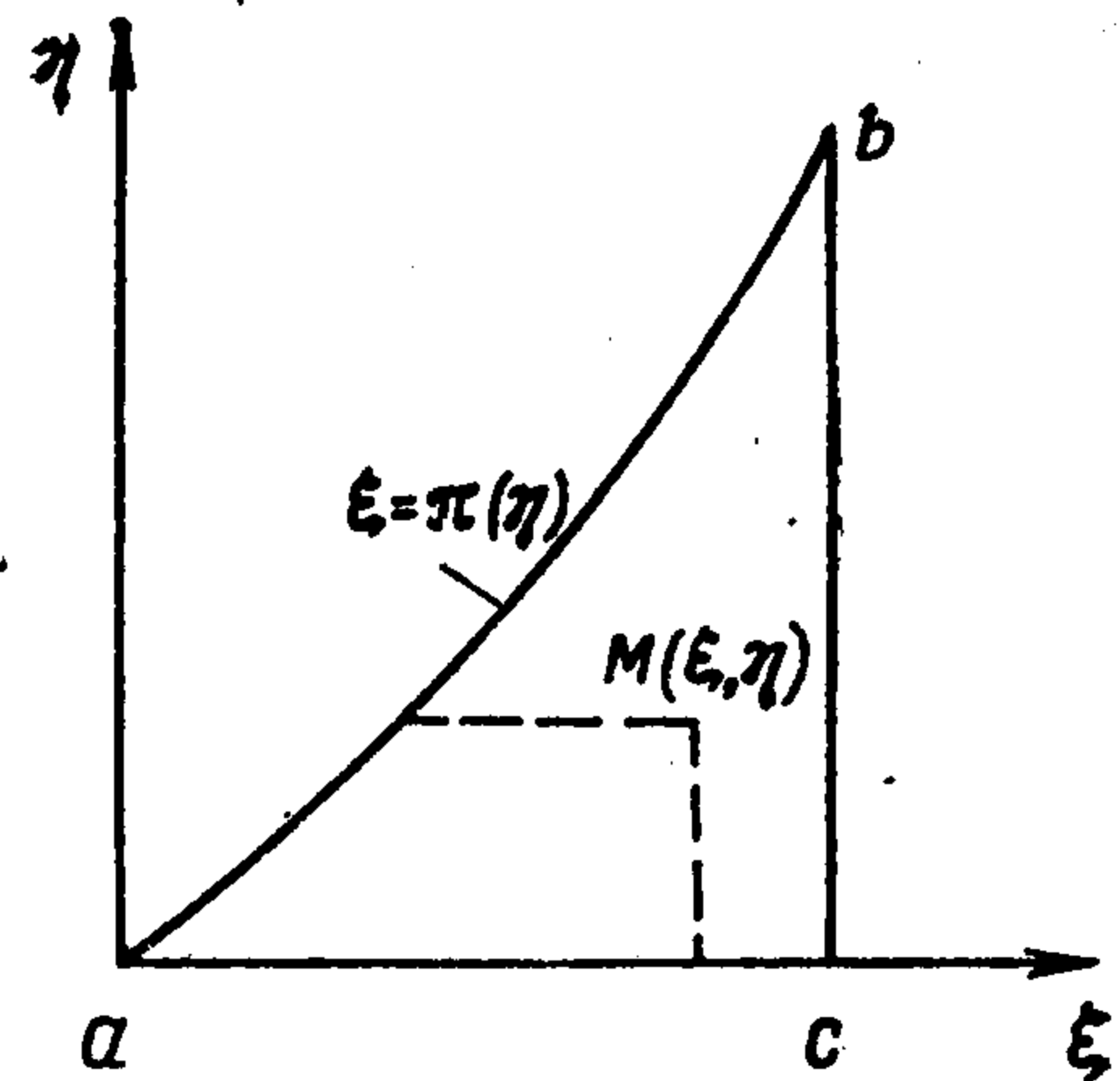
Приращения  $\delta p$ ,  $\delta \rho$ ,  $\delta(1/\rho v)$ ,  $\delta(u/v)$ ,  $\delta f$ , входящие в (2.4), представляются в виде рядов по степеням величин  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta x$ ,  $\delta x'$  (приращение  $\delta f \equiv 0$ , так как в области влияния  $abc$  ( $S$ ) ударные волны отсутствуют). Выполнив это, удержим в выражении (2.4) линейные и квадратичные слагаемые; воспользовавшись условиями стационарности и равенствами (2.5), после преобразований получим

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \delta I = \int_{ab} \gamma \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x'} \delta x \delta x' + \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \delta x'^2 \right) dy + \\ + \int_{bc} (a_{11} \delta u^2 + a_{12} \delta u \delta v + a_{22} \delta v^2) d\psi + \iint_S (A_{11} \delta u^2 + A_{12} \delta u \delta v + \\ + A_{22} \delta v^2) d\psi dy \end{aligned}$$

Аналитические формулы для  $a_{ij}$  и  $A_{ij}$  приведены в п. 3 после формулы (3.1).

Приращение управления  $\delta x'$  выбирается следующим образом: предполагается, что функция  $\delta x'(y)$  отлична от нуля лишь на интервале  $[y^0, y^0 + \varepsilon]$  длины  $\varepsilon$ , и  $\varepsilon$  считается малым параметром задачи. Величину  $\delta x'$  на этом интервале будем характеризовать другим малым параметром  $\varepsilon_1$ . Легко видеть, что приращение  $\delta x$  не превышает по порядку величины  $\varepsilon\varepsilon_1$ .

Чтобы рассчитать возмущенное движение, вызванное изменением наклона контура, необходимо рассмотреть систему уравнений в вариациях, которая получается в результате линеаризации уравнений движения относительно невозмущенного потока. Анализ этой системы, дополненной линеаризованными граничными условиями, показывает, что вне характеристической полосы с основанием  $\varepsilon$  возмущения параметров потока имеют порядок  $\varepsilon\varepsilon_1$ , а в самой полоске — порядок  $\varepsilon_1$ .



Фиг. 3

Введем характеристические переменные  $\xi, \eta$  и будем считать их независимыми переменными задачи. Уравнение в вариациях для функции тока имеет вид

$$(2.7) \quad \delta\psi_{\xi\eta} = b_1(\xi, \eta)\delta\psi + b_2(\xi, \eta)\delta\psi_\xi + b_3(\xi, \eta)\delta\psi_\eta$$

$$b_2 = \frac{1}{2b_0}(\Theta_1\xi_x + \Theta_2\xi_y), \quad b_3 = \frac{1}{2b_0}(\Theta_1\eta_x + \Theta_2\eta_y)$$

$$b_0 = \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right)\xi_x\eta_x - \frac{uv}{a^2}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)\xi_y\eta_y$$

$$\Theta_1 = \frac{2(1-\kappa)}{\kappa} \frac{\varphi'}{\varphi} \psi_x + \frac{2\psi_x\psi_{yy}}{y^{2\nu}\rho^2 a^2} - \frac{a_0\psi_x}{y^{2\nu}(w^2 - a^2)}$$

$$\Theta_2 = \frac{1}{y^\nu} + \frac{2(1-\kappa)}{\kappa} \frac{\varphi'}{\varphi} \psi_y + \frac{2\psi_y\psi_{xx}}{\kappa\rho^2 a^2} - \frac{a_0\psi_y}{y^{2\nu}(w^2 - a^2)}$$

$$a_0 = (1 + \kappa) \left[ y^{2\nu} \frac{\varphi'}{\varphi} \frac{a^2}{\kappa} + \frac{\psi_{xx}\psi_y^2 + \psi_{yy}\psi_x^2}{y^{2\nu}\rho^2 a^2} \right]$$

Конкретный вид функции  $b_1$  для дальнейшего изложения значения не имеет.

Пусть контур  $ab$  в плоскости  $\xi\eta$  изображается кривой  $\xi = \pi(\eta)$  (фиг. 3). По условию функции  $\delta\psi$  обращается в нуль на характеристике  $ac$ . Значение  $\delta\psi$  на контуре  $ab$  найдем из условия

$$\Delta\psi = \delta\psi + \psi_x\delta x = 0$$

Здесь  $\Delta\psi$  — полное приращение  $\psi$  при смещении точек контура параллельно оси  $x$  на малую величину  $\delta x$ . Из последнего равенства получим ( $\eta$  принимается за независимую переменную на  $ab$ )

$$(2.8) \quad \delta\psi[\pi(\eta), \eta] = g(\eta)\delta x(\eta), \quad g(\eta) = -\psi_x(\eta)$$

Дифференцируя выражение для  $\delta\psi$  вдоль  $ab$ , найдем

$$(2.9) \quad d\delta\psi / d\eta = \delta\psi_\eta + \pi'(\eta)\delta\psi_\xi = g'(\eta)\delta x(\eta) + g(\eta)\delta x'(\eta)$$

Здесь и в дальнейшем штрих означает производную по  $\eta$ .

Система интегральных уравнений для функций  $\delta\psi$  и  $\delta\psi_\xi$  на основании равенств (2.7), (2.8) и  $\delta\psi|_{ac} = \delta\psi_\xi|_{ac} = 0$  имеет вид (фиг. 3)

$$\delta\psi(\xi, \eta) = \int_{\pi(\eta)}^{\xi} \delta\psi_\xi d\xi + O(\varepsilon\varepsilon_1)$$

$$\delta\psi_\xi(\xi, \eta) = b_3(\xi, \eta)\delta\psi(\xi, \eta) + \int_0^\eta \left[ b_2\delta\psi_\xi + \left( b_1 - \frac{\partial b_3}{\partial \eta} \right) \delta\psi \right] d\eta$$

Решение этой системы

$$(2.10) \quad \delta\psi = O(\varepsilon\varepsilon_1), \quad \delta\psi_\xi = O(\varepsilon\varepsilon_1)$$

Для характеристики  $\eta = \text{const}$  на основании (2.7), (2.10) имеем

$$\frac{d}{d\xi} \delta\psi_\eta = b_3\delta\psi_\eta + O(\varepsilon\varepsilon_1)$$

Решая это уравнение с учетом граничного условия (2.9), с точностью до величин порядка  $\varepsilon\varepsilon_1$  найдем

$$(2.11) \quad \delta\psi_\eta(\xi, \eta) = g(\eta)\delta x'(\eta) \exp \int_{\pi(\eta)}^{\xi} b_3(\xi, \eta) d\xi \equiv R_1(\xi, \eta)\delta x'(\eta)$$

Выделим теперь главные (порядка  $\varepsilon_1$ ) части в приращениях  $\delta u$  и  $\delta v$ , входящих в формулу (2.6). Имеем

$$(2.12) \quad u = \psi_y / y^\nu \rho, \quad v = -\psi_x / y^\nu \rho, \quad \psi_x = \psi_\xi \xi_x + \psi_\eta \eta_x$$

$$\psi_y = \psi_\xi \xi_y + \psi_\eta \eta_y, \quad \frac{\psi_x^2 + \psi_y^2}{2y^{2\nu} \rho^2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \rho^{\kappa-1} \varphi^{\kappa-1}(\psi) = \frac{1}{2} \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}$$

Если проварьировать эти равенства, исключить из них вариации  $\delta\rho$ ,  $\delta\psi_x$ ,  $\delta\psi_y$ , а затем воспользоваться соотношением (2.11), то с точностью до величин порядка  $\varepsilon\varepsilon_1$  найдем

$$(2.13) \quad \delta u = \left[ \eta_y - \frac{\psi_y}{\rho} \frac{\psi_x \eta_x + \psi_y \eta_y}{y^{2\nu} (\rho w^2 - \kappa \rho)} \right] \frac{R_1 \delta x'}{y^\nu \rho} = k_1(\xi, \eta) \delta x'$$

$$\delta v = \left[ -\eta_x + \frac{\psi_x}{\rho} \frac{\psi_x \eta_x + \psi_y \eta_y}{y^{2\nu} (\rho w^2 - \kappa \rho)} \right] \frac{R_1 \delta x'}{y^\nu \rho} = k_2(\xi, \eta) \delta x'$$

Переходя в (2.6) от переменных  $\psi$ ,  $y$  к переменным  $\xi$ ,  $\eta$  и используя равенства (2.13), представим выражение для  $\delta I$  в виде

$$(2.14) \quad \delta I = \Omega(\eta) \left| \frac{dy(\pi(\eta), \eta)}{d\eta} \right|^{-1} \varepsilon (\delta x')^2 + O(\varepsilon^2 \varepsilon_1^2)$$

$$(2.15) \quad \Omega(\eta) = \gamma \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \frac{dy(\pi(\eta), \eta)}{d\eta} - \left[ (a_{11}k_1^2 + a_{12}k_1k_2 + a_{22}k_2^2) \frac{d\psi(\xi_e, \eta)}{d\eta} \right] +$$

$$+ \int_{\pi(\eta)}^{\xi_e} (A_{11}k_1^2 + A_{12}k_1k_2 + A_{22}k_2^2) |J| d\xi, \quad J = \frac{D(\psi, y)}{D(\xi, \eta)}$$

Здесь интеграл вычисляется вдоль характеристики первого семейства  $\eta = \text{const}$ , а первое и второе слагаемые — в точках пересечения этой характеристики соответственно с контуром  $ab$  и с характеристикой  $bc$ .

Из (2.14) следует необходимое условие минимума  $I$  (условие Лежандра)

$$(2.16) \quad \Omega(\eta) \geq 0$$

Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что приращение управления на отрезке  $\varepsilon$  контура тела порождает приращение скорости газа того же порядка в пределах полоски с основанием  $\varepsilon$ , составленной из характеристик невозмущенного потока. Этот результат является следствием применения линейной теории, что в данном случае возможно из-за малости  $|\delta x'|$ . В общем плане указанное явление обнаруживает аналогию с «варьированием в полоске», применяемом в задачах с управлением в главной части основного дифференциального оператора [5]; различие заключается в том, что в этих задачах управление сосредоточено внутри области, а в рассматриваемом случае — на ее границе. Указанное обстоятельство послужило причиной появления в выражении (2.15) слагаемых, вычисленных на характеристиках.

Если задача допускает переход к контрольному контуру, то условие (2.16) равносильно неравенству, полученному в [1, 2]. В самом деле, положим  $f = x'$ . В этом случае система (2.1) для  $h_i$  имеет решение  $h_1 = -1$ ,  $h_2 = \gamma^*$ , удовлетворяющее граничным условиям [4, 6], и задача допускает переход к контрольному контуру. При этом  $\partial^2 f / \partial x'^2 \equiv 0$  и первое слагаемое в (2.15) исчезает. Интеграл в выражении (2.15) также исчезает, поскольку величины  $A_{ij}$  имеют структуру

$$A_{ij} = \sum_{l=1}^2 \frac{\partial h_l}{\partial \psi} c_l^{ij} + \sum_{l=1}^2 \frac{\partial h_l}{\partial y} d_l^{ij}$$

Таким образом, условие (2.16) в данном частном случае сводится к неравенству

$$a_{11}k_1^2 + a_{12}k_1k_2 + a_{22}k_2^2 \geq 0$$

или, что равносильно

$$\text{tg } \theta \geq - \frac{\sin 2\alpha (1 + \cos 2\alpha)}{\kappa + \cos^2 2\alpha}$$

Это неравенство совпадает с условием, полученным в [1, 2].

Важно отметить, что истинным управлением является наклон  $x'$  контура тела  $ab$ . В частном случае, когда исходную задачу удастся сформулировать на контрольной характеристике  $bc$ , управлением удобно считать специально выбранную газодинамическую функцию, определенную на  $bc$ . В работе [1], например, управлением считается угол Маха  $\alpha$ . Связь между вариациями  $\delta x'$  и  $\delta \alpha$  легко может быть найдена из (2.13) и соотношения  $1 + \kappa = w^2 (\kappa - \cos 2\alpha)$ .

3. Течения с присоединенными ударными волнами. Метод построения необходимого условия Лежандра, развитый в п. 2, может быть применен к задачам об оптимальном обтекании с присоединенными ударными волнами (фиг. 2). Поскольку контур тела содержит излом, уравнения (1.1) в области  $abc$  должны учитываться разрывными множителями Лагранжа

[4]. Будем считать, что характеристика  $cd$  есть линия разрыва множителей Лагранжа и что в области влияния нет других таких линий. Функционал Лагранжа в данном случае имеет вид

$$I = \int_{ad} [y^v p + \gamma_0^{(1)}(vx' - u) + \gamma f] dy + \int_{ab} [y^v p + \gamma_0^{(2)}(vx' - u) + \gamma f] dy + \\ + \sum_{i=1}^2 \iint_{S_i} (h_1^{(i)} L_1 + h_2^{(i)} L_2) d\psi dy$$

Здесь  $S_1$  — область  $abc$ ,  $S_2$  — область  $adc$ .

Условия стационарности  $I$  приведены в [3]. Формула для приращения  $I$  будет содержать в отличие от (2.6) вариации энтропийной функции  $\delta\phi$  ( $\psi$ ), связанные с изменением формы ударной волны  $ac$ . В рассматриваемой задаче все газодинамические величины в точках  $ac$  зависят только от  $\sigma$  — угла наклона ударной волны к оси  $x$ . При этом повсюду в области влияния  $\delta\phi$  ( $\psi$ ) =  $(d\phi / d\sigma)\delta\sigma$  ( $\psi$ ), где производная  $d\phi / d\sigma$  вычисляется в точке пересечения  $ac$  с линией тока  $\psi = \text{const}$ . Вывод формулы для  $\delta I$  в основном аналогичен выводу (2.6) для безударного обтекания. Результат может быть представлен в виде

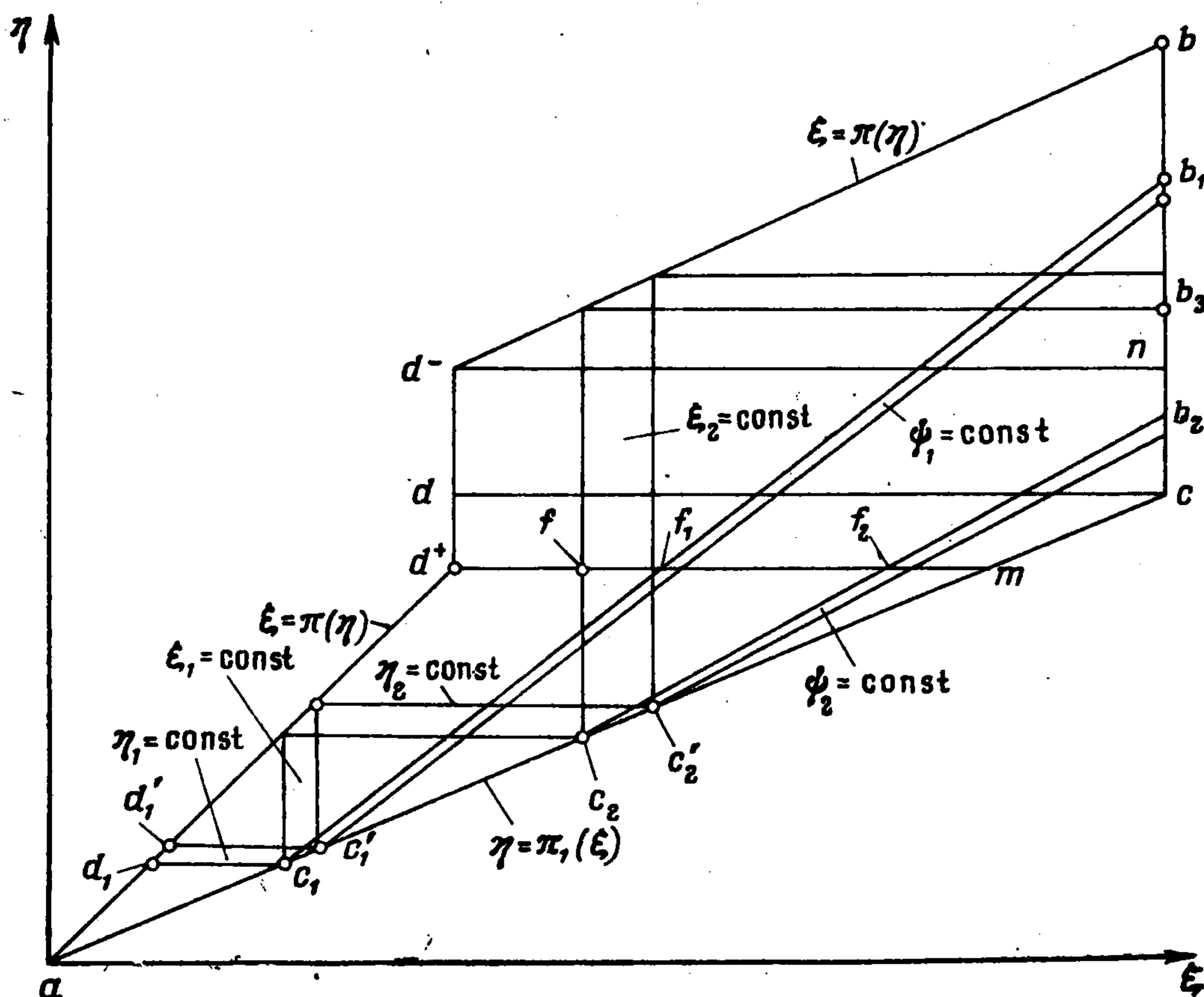
$$(3.1) \quad \delta I = \int_{ab} \gamma \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x'} \delta x \delta x' + \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \delta x'^2 \right) dy + \\ + \int_{ac} \Phi \delta \sigma^2 d\psi + \int_{cb} h_1 (\delta T a \delta T) d\psi + \int_{cd} \Delta h_1 (\delta T b \delta T) d\psi + \\ + \iint_{abc} (\delta T A \delta T) d\psi dy \\ 2\Phi = \frac{1}{y^v w_0} \left( y^v h_1 \frac{d^2 p}{d\sigma^2} + h_2 \frac{d^2}{d\sigma^2} \frac{u}{v} \right) + h_1 \frac{d^2 u}{d\sigma^2} - \frac{h_2}{y^v} \frac{d^2}{d\sigma^2} \left( \frac{1}{\rho v} \right)$$

Здесь  $w_0$  — величина скорости набегающего потока,  $\delta T$  — вектор с компонентами  $(\delta u, \delta v, \delta\phi)$ ,  $\Delta h_1 = h_1^{(2)} - h_1^{(1)}$  — разрыв множителя Лагранжа  $h_1$  на  $cd$ ,  $a, b, A$  — симметричные  $3 \times 3$ -матрицы, причем ( $A_1$  и  $A_2$  —  $3 \times 3$ -матрицы вторых производных функций  $p(u, v, \phi)$  и  $\rho(u, v, \phi)$  соответственно)

$$A = \frac{n_3}{2\rho^2 v} A_2 - \frac{n_1}{2} A_1 - C \\ C_{11} = \frac{n_3}{\rho^3 v} (\rho_u)^2, \quad C_{22} = n_2 \frac{u}{v^2} + \frac{n_3}{\rho v} \left[ \frac{1}{v^2} + \rho v \frac{1}{\rho v} + \frac{1}{\rho^2} (\rho_v)^2 \right] \\ C_{33} = \frac{n_3}{\rho^3 v} (\rho_\phi)^2, \quad C_{12} = -\frac{n_2}{v^2} + \frac{n_3}{\rho v} \left( \frac{1}{\rho v} + \rho_u \frac{1}{\rho v} + \frac{2}{\rho^2} \rho_u \rho_v \right) \\ C_{13} = 2 \frac{n_3}{\rho^3 v} \rho_u \rho_\phi, \quad C_{23} = \frac{n_3}{\rho^2 v} \rho_\phi \left( \frac{1}{v} + \frac{2}{\rho} \rho_v \right) \\ n_1 = y^v h_{1\psi}, \quad n_2 = h_{2\psi}, \quad n_3 = h_2 y y^{-v}, \quad \bar{n}_1 = -y^v \zeta \\ \bar{n}_2 = -y^v \rho v^2 \zeta \operatorname{tg} \alpha, \quad \bar{n}_3 = \rho v^2 \operatorname{tg} \alpha \\ \zeta = \frac{\sin(\alpha - \theta)}{y^v \rho v \sin \alpha}, \quad \bar{\zeta} = \frac{\sin(\alpha + \theta)}{y^v \rho v \sin \alpha}$$

Выражения для  $a_{ij}$  получаются из  $A_{ij}$  в результате замены  $n_i$  на  $\bar{n}_i$ , а выражения для  $b_{ij}$  получаются из  $a_{ij}$  заменой  $\zeta$  на  $\bar{\zeta}$ .

В характеристических переменных  $\xi, \eta$  области влияния  $abc$  соответствует область  $ad^+d^-bc$  (фиг. 4); участок  $d^+d^-$  соответствует точке  $d$  в физической плоскости  $xy$  и отвечает предельному положению характеристики  $\xi = \text{const}$  в области  $dmcnd$  (фиг. 2).



Фиг. 4

Рассмотрим участок контура  $ad^+$  (фиг. 4). Предположим, что вариация  $\delta x'(\eta) = O(\varepsilon_1)$  отлична от нуля лишь на интервале  $[\eta_{d_1}, \eta_{d_1^*}]$  длины  $\varepsilon$ , и будем считать  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_1$  малыми параметрами задачи (штрих — производная по  $\eta$ ). Чтобы рассчитать возмущенное движение, вызванное изменением наклона контура, достаточно получить соотношения, связывающие вариации  $\delta\psi, \delta\psi_\xi, \delta\psi_\eta$  с  $\delta x'$ . Найдем вначале связь между указанными вариациями на контуре  $ab$  и ударной волне  $ac$ . На участках  $ad^+$  и  $d^-b$  (фиг. 4) выполняются равенства (2.8), (2.9), а на отрезке  $d^+d^-$  имеют место соотношения

$$(3.2) \quad \delta\psi(\eta) = g_1(\eta) \delta x_d, \quad \delta\psi_\eta = \frac{d}{d\eta} \delta\psi = g_{1\xi}(\eta) \delta x_d$$

Функция  $g_1(\eta)$  может быть найдена в результате расчета течения разрежения в окрестности точки  $d$  как  $\lim [-\psi_x(\eta)]$  при  $\xi \rightarrow \xi_d$ , вычисленный вдоль характеристики  $\eta = \text{const}$ .

В точках ударной волны  $ac$  известны функции

$$u = u(\sigma), \quad v = v(\sigma), \quad \rho = \rho(\sigma), \quad \psi = \psi(y)$$

Имеем

$$\psi_y y^{-\nu} = u(\sigma) \rho(\sigma) \equiv f_1(\sigma), \quad \psi_x y^{-\nu} = -v(\sigma) \rho(\sigma) \equiv f_2(\sigma),$$

$$\psi = \psi(y)$$

Проварьируем эти соотношения полным образом и исключим из них вариации  $\delta\sigma$  и  $\delta x$  ( $\delta x(y)$  — малое смещение точки ударной волны параллельно оси  $x$ ); переходя затем к переменным  $\xi, \eta$ , найдем

$$(3.3) \quad \delta\psi_\xi + a_1\delta\psi_\eta + a_2\delta\psi = 0$$

$$(3.4) \quad \delta\sigma = a_3\delta\psi_\xi + a_4\delta\psi_\eta + a_5\delta\psi$$

$$a_1 = \left( \eta_x \frac{df_1}{d\sigma} + \eta_y \frac{df_2}{d\sigma} \right) \left( \xi_x \frac{df_1}{d\sigma} + \xi_y \frac{df_2}{d\sigma} \right)^{-1}$$

$$a_3 = \xi_y \left( y^v \frac{df_1}{d\sigma} \right)^{-1}, \quad a_4 = \eta_4 \left( y^v \frac{df_1}{d\sigma} \right)^{-1}$$

Конкретный вид функций  $a_2$  и  $a_5$  для дальнейшего не имеет значения.

Анализ уравнения (2.7), дополненного граничными условиями (2.8), (2.9), (3.2), (3.3), показывает, что вариация  $\delta\psi_\eta$  имеет порядок  $\varepsilon_1$  лишь в полосках  $\eta_i = \text{const}$ ,  $i = 1, 2, 3$  (фиг. 4), вариация  $\delta\psi_\xi$  — в полосках  $\xi_i = \text{const}$ ,  $i = 1, 2$ ; вне этих полосок  $\delta\psi_\eta = O(\varepsilon\varepsilon_1)$ ,  $\delta\psi_\xi = O(\varepsilon\varepsilon_1)$ . Вариация  $\delta\psi$  не превышает по порядку величины  $\varepsilon\varepsilon_1$  во всей области влияния.

Аналитические выражения для функций  $\delta\psi_\xi, \delta\psi_\eta$  в пределах полосок легко можно найти на основании равенств (2.7), (2.9) и (3.3). В самом деле, выражение для  $\delta\psi_\eta$  в полоске  $\eta_1 = \text{const}$  (фиг. 4) дается формулой (2.11). Выражение для  $\delta\psi_\xi$  в полоске  $\xi_1 = \text{const}$  определяется как решение задачи  $d/(\delta\psi_\xi/d\eta) = b_2\delta\psi_\xi + O(\varepsilon\varepsilon_1)$ ,  $\delta\psi_\xi|_{c_1} = -[a_1\delta\psi_\eta]_{c_1}$ .

Это означает, что формула (3.3) представляет собой закон отражения возмущения от ударной волны  $ac$ . Закон отражения от контура  $ab$  дается соотношением (2.9). Таким образом, возмущения, приходящие на ударную волну  $ac$  по характеристическим полоскам  $\eta_i = \text{const}$ , отражаются от  $ac$  по полоскам  $\xi_i = \text{const}$  в соответствии с (3.3), а возмущения, приходящие на контур тела  $ab$  по полоскам  $\xi_i = \text{const}$ , отражаются по полоскам  $\eta_i = \text{const}$  в соответствии с (2.9).

Обозначим решения соответствующих интегральных уравнений в полосках  $\eta_i = \text{const}$  через  $\delta\psi_\eta = R_i\delta x' + O(\varepsilon\varepsilon_1)$ , а в полосках  $\xi_i = \text{const}$  — через  $\delta\psi_\xi = P_i\delta x' + O(\varepsilon\varepsilon_1)$ . Вариация  $\delta\sigma$  имеет порядок  $\varepsilon_1$  лишь на отрезках  $c_1c_1'$  и  $c_2c_2'$  ударной волны  $ac$ . На основании (3.4) имеем

$$\delta\sigma = (a_3P_i + a_4R_i)\delta x' + O(\varepsilon\varepsilon_1) = c_i\delta x' + O(\varepsilon\varepsilon_1)$$

$$\delta\varphi(\psi) = \frac{d\varphi}{d\sigma}\delta\sigma \equiv d_i\delta x' + O(\varepsilon\varepsilon_1)$$

Величины  $\delta u$  и  $\delta v$  находятся в результате варьирования соотношений (2.12)

$$\delta u = t_1\delta\psi_\xi + t_2\delta\psi_\eta + t_3\delta\varphi, \quad \delta v = t_4\delta\psi_\xi + t_5\delta\psi_\eta + t_6\delta\varphi$$

$$t_3 = -\frac{\psi_y a^2}{y^v \varphi (\rho w^2 - \kappa p)}, \quad t_6 = \frac{\psi_x a^2}{y^v \varphi (\rho w^2 - \kappa p)}, \quad t_2 = \frac{k_1}{R_1}, \quad t_5 = \frac{k_2}{R_1}$$

(см. (2.13)); выражения для  $t_1$  и  $t_4$  получаются из  $t_2$  и  $t_5$  в результате замены производных  $\eta_x, \eta_y$  на  $\xi_x, \xi_y$ .

Чтобы получить условие Лежандра, необходимо знать поперечные размеры полосок. Пусть  $\Delta\eta_i, \Delta\xi_i, \Delta\psi_i$  — размеры полосок. Имеем ( $\eta =$

$= \pi_1(\xi)$  — уравнение ударной волны  $ac$ )

$$\Delta\eta_1 = \varepsilon \equiv r_1\varepsilon, \quad \Delta\xi_1 = \frac{\varepsilon}{\pi_1'(\xi)|_{c_1}} \equiv l_1\varepsilon, \quad \Delta\psi_1 = \frac{d\psi[\xi, \pi_1(\xi)]}{d\xi} \Big|_{c_1} \times \\ \times l_1\varepsilon \equiv m_1\varepsilon$$

Аналогично найдем  $\Delta\eta_i = r_i\varepsilon$ ,  $\Delta\xi_i = l_i\varepsilon$ ,  $\Delta\psi_i = m_i\varepsilon$ .

Формула (3.1) для  $\delta I$  теперь может быть представлена в виде (см. фиг. 2 и фиг. 4)

$$(3.5) \quad \delta I = \Omega(\eta_{d_1})\varepsilon(\delta x')^2 + O(\varepsilon^2\varepsilon_i^2)$$

$$(3.6) \quad \Omega(\eta_{d_1}) = \left[ \gamma \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \frac{dy}{d\eta} \right]_{d_1} + \sum_{i=1}^2 \Phi|_{c_i} m_i c_i^2 - \sum_{i=1}^2 m_i [(h_1 q_i^3 a q_i^3)|_{b_i} + \\ + (\Delta h_1 q_i^3 b q_i^3)|_{f_i}] + r_3 \left[ h_1 (q_3^1 a q_3^1) \frac{d\psi}{d\eta} \right]_{b_3} - l_2 \left[ \Delta h_1 (q_2^2 b q_2^2) \frac{d\psi}{d\xi} \right]_f + \\ + \sum_{i=1}^3 r_i \int_{\eta_i=\text{const}} [(q_i^1 A q_i^1)|J|] d\xi + \sum_{i=1}^2 l_i \int_{\xi_i=\text{const}} [(q_i^2 A q_i^2)|J|] d\eta + \\ + \sum_{i=1}^2 |m_i| \int_{\psi_i=\text{const}} (q_i^3 A q_i^3) dy \\ q_i^1 = (t_2 R_i, t_5 R_i, 0), \quad q_i^2 = (t_1 P_i, t_4 P_i, 0), \quad q_i^3 = (t_3 d_i, t_6 d_i, d_i)$$

Здесь производная  $dy/d\eta$  в первом слагаемом вычисляется вдоль контура  $ad^+$ , производные  $d\psi/d\eta$  и  $d\psi/d\xi$  в четвертом и пятом слагаемых — вдоль характеристик  $bc$  и  $cd$  соответственно.

Из (3.5) вытекает необходимое условие минимума  $I$  (условие Лежандра)

$$(3.7) \quad \Omega(\eta_{d_1}) \geq 0$$

Входящие в выражение (3.6) для  $\Omega$  слагаемые (не считая первого) могут быть разделены на три группы, происхождение которых связано с распространением возмущений в полосках, идущих вдоль характеристик  $\eta_i = \text{const}$ ,  $\xi_i = \text{const}$  и вдоль линий тока  $\psi_i = \text{const}$ . Первая группа характеризуется наличием множителей  $r_i$ , вторая —  $l_i$ , третья —  $m_i$ . В каждой из этих групп имеются интегральные и внеинтегральные слагаемые. Возникновение интегральных членов обусловлено возмущениями, распространяющимися вдоль соответствующих полосок, возникновение же внеинтегральных членов является следствием пересечений этих полосок с характеристиками  $bc$ ,  $cd$  и ударной волной  $ac$ .

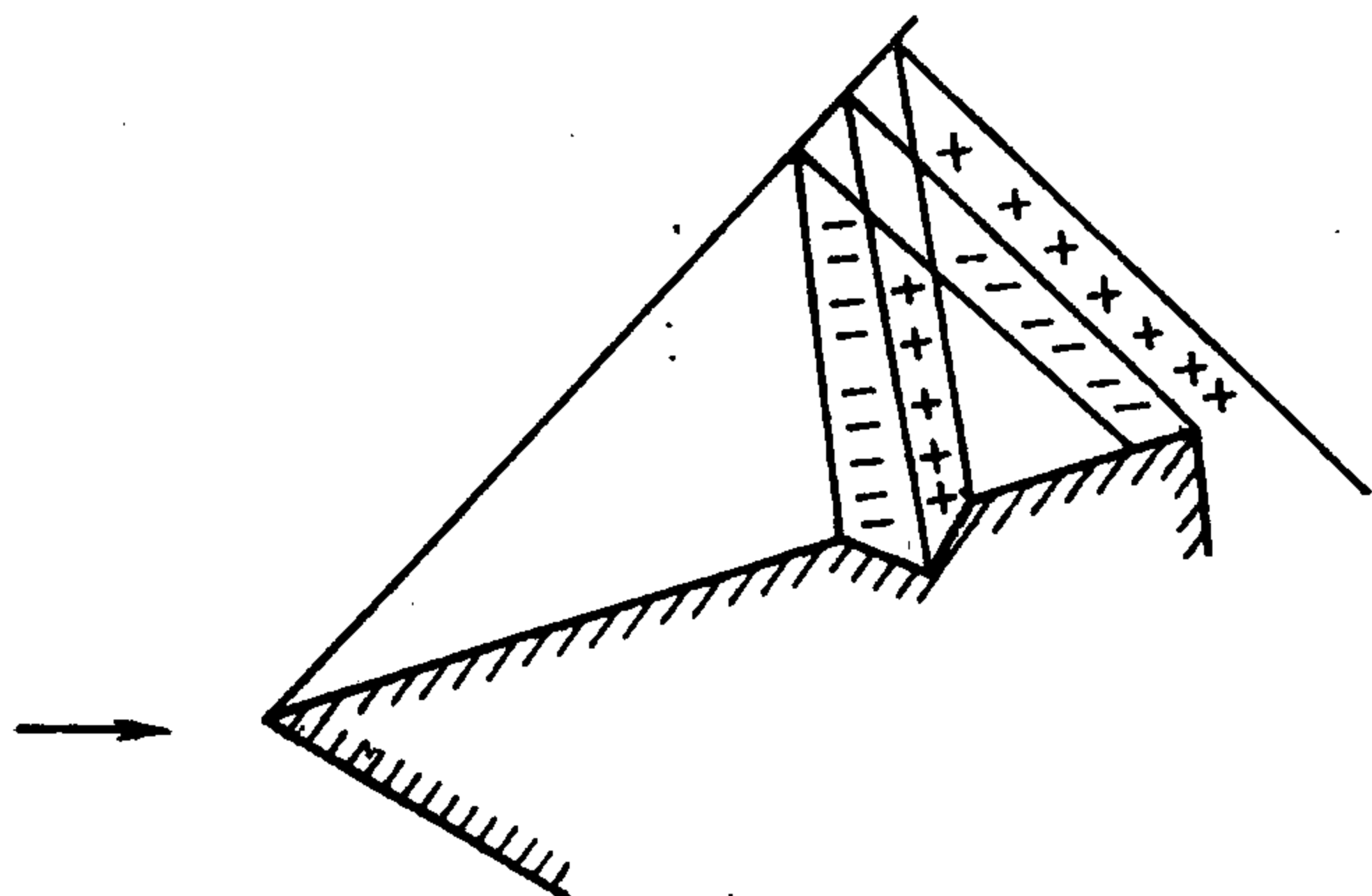
Заметим, что число  $n$  отражений от ударной волны возмущений (для фиг. 2  $n = 2$ ) зависит от положения точки  $d_1$  на участке контура  $ad^+$ . Проведенный анализ легко переносится на случай произвольного  $n$ .

Если начальная точка  $d_1^*$  помещена на участок  $d-b$  контура  $ab$ , то волна возмущения, распространяясь от точки  $d_1$  вдоль характеристики  $\eta = \text{const}$ , достигнет характеристики  $bc$  и выйдет за пределы области влияния  $abc$ . Выражение (3.6) для  $\Omega$  при этом будет содержать интеграл вдоль характеристики  $\eta = \text{const}$  и два внеинтегральных слагаемых, вычисленных в точках пересечения этой характеристики с контуром  $d-b$  и замы-

кающей характеристикой  $bc$ . Этот случай полностью аналогичен рассмотренному в п. 2 случаю безударного обтекания и поэтому неравенство (3.7) для точек контура  $d-b$  совпадает с (2.16).

В точке  $d$  излома контура  $ab$  должны выполняться два предельных неравенства

$$\Omega(\eta_{d+}) \geq 0, \quad \Omega(\eta_{d-}) \geq 0$$



Фиг. 5

Метод варьирования наклона на малом отрезке поверхности тела в случае возникновения присоединенной ударной волны использовался Г. Г. Черным [7] для доказательства того факта, что при заданном отношении толщины тела к его длине клин не является телом минимального волнового сопротивления. С этой целью исходный контур варьировался, как показано на фиг. 5 (значками плюс обозначены области повышения давления, а значками минус — понижения давления). Уменьшение волнового сопротивления объясняется здесь тем, что волна разрежения, отражаясь от ударной волны без изменения знака (при положительном коэффициенте отражения), вызывает понижение давления на правом конце тела, в то время как волна сжатия, отразившись от ударной волны, уже не попадает на поверхность тела. Изложенный прием был использован в работах [8,9], где рассматривалась задача о нахождении оптимальной формы тела при наличии тангенциального разрыва и задача о построении составного сопла.

Рассмотренная выше отрицательная декомпенсация возмущений давления в первом порядке на контуре тела устраняется введением излома контура [3,8,9]. Этот результат получен на основании исследования свойств первой вариации минимизируемого функционала. Вопрос об устранении отрицательной декомпенсации во втором порядке может быть решен с помощью изучения необходимых условий типа Лежандра.

Автор благодарит К. А. Лурье за помощь и постоянное внимание, а также А. Н. Крайко и А. В. Шипилина за ценные советы.

Поступила 24 XII 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шмыглевский Ю. Д. Вариационные задачи для сверхзвуковых тел вращения и сопел. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.
2. Guderley K. G., Tabak D., Breiter M. C., Bhutani O. P. Continuous and discontinuous solutions for optimum thrust nosseles of given length. J. Optimizat. theory and Appl., 1973, vol. 12, No. 6.
3. Шипилин А. В. Оптимальные формы тел с присоединенными ударными волнами. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4.
4. Крайко А. Н. Вариационные задачи газовой динамики неравновесных и равновесных течений. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
5. Лурье К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики. М., «Наука», 1975.
6. Борисов В. М., Шипилин А. В. О соплах максимальной тяги с произвольными изопериметрическими условиями. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
7. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
8. Крайко А. Н., Тилляева Н. И. К построению контура минимального волнового сопротивления в неоднородном сверхзвуковом потоке. ПММ, 1973, т. 37, вып. 3.
9. Крайко А. Н., Тилляева Н. И. Решение вариационной задачи о построении контура составного сопла. ПММ, 1971, т. 35, вып. 4.