Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 532.593

О СОСТАВНЫХ УСТАНОВИВШИХСЯ КАПИЛЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛНАХ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Я. И. Секерж-Зенькович

(Москва)

Рассматривается задача о плоских установившихся капиллярно-гравитационных волнах конечной амплитуды на поверхности потока идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины. Предполагается, что волны вызваны давлением, периодически распределенным вдоль свободной поверхности, и что они, в отличие от вынужденных, не пропадают при переходе давления в постоянное, а преобразуются в свободные. Эти волны названы составными; они, как и свободные, существуют при специальных значениях скорости потока.

Задача рассматривается в строгой постановке и сводится к решению системы четырех нелинейных уравнений относительно двух функций и двух констант. Одно из этих уравнений интегральное, а остальные трансцендентные. При этом давление на поверхности задается в форме бесконечного тригонометрического ряда, коэффициенты которого пропорциональны целым, на две единицы большим их номеров, степеням некоторого безразмерного малого параметра.

Устанавливается теорема существования и единственности решения. Указывается метод ее доказательства. Дается построение решения в любом приближении в форме рядов по степеням указанного выше малого параметра. До конца рассчитаны первые три приближения. Дано приближенное уравнение профиля волны.

Составные капиллярно-гравитационные волны в случае жидкости бесконечной глубины рассмотрены в работе автора [1].

1. Постановка задачи и вывод основных уравнений. Рассмотрим плоскопараллельное установившееся движение идеальной несжимаемой тяжелой жидкости конечной постоянной глубины h, ограниченной сверху свободной поверхностью, на которой давление $p_0 = p_0' + p_0(x)$, здесь $p_0' = \text{const}$, а $p_0(x)$ — заданная периодическая функция от горизонтальной координаты x. Предположим, что поток обладает на горизонтальном дне постоянной заданной средней скоростью c, направленной слева направо. При наличии слагаемого $p_0(x)$ имеют место вынужденные волны при любых значениях скорости c. Если же $p_0(x)$ отсутствует, то имеют место свободные волны при некоторых специальных значениях c. Здесь предполагается, что давление на свободной поверхности имеет оба слагаемых. Тогда свободная поверхность принимает форму неподвижной периодической волны в координатах, связанных с прогрессивной волной, имеющей скорость $-c$. Ищутся волны, которые не пропадают, а переходят в свободные при $p_0(x) \equiv 0$ и специальных значениях скорости c. Такие волны, как указано выше, названы составными.

Пусть искомая составная волны и давление $p_0(x)$ обладают симметрией относительно вертикали гребня. Совместим ось y прямоугольной системы координат xy с осью симметрии и направим ее вертикально вверх. За начало координат O примем точку пересечения оси y со свободной поверхностью, а ось x направим вправо.

Плоскость течения xy примем за плоскость комплексного переменного $z = x + iy$. Пусть φ — потенциал скоростей, ψ — функция тока, $w = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал скоростей, U, V — проекции вектора скорости $\mathbf{q}$ на оси координат. Тогда имеем

$$dw / dz = -U + iV, \quad U = -\partial\varphi / \partial x, \quad V = -\partial\varphi / \partial y$$

Для вывода основных уравнений задачи сначала отобразим конформно область, занятую одной волной и представляющую собой вертикальный прямоугольник, ограниченный сверху волнообразной кривой, на прямоугольник $0 \leqslant \varphi \leqslant c\lambda$, $0 \leqslant \psi \leqslant \psi_0$ в плоскости w (здесь $\psi = \psi_0 = ch$ — расход потока в единицу времени), а затем этот прямоугольник — на внутренность кругового кольца с центром в начале координат вспомогательной комплексной плоскости $u = u_1 + iu_2$. При этом предполагается, что длина волны λ совпадает с периодом функции $p_0(x)$. Как известно, последнее отображение дается формулой

$$w = \frac{\lambda c}{2\pi i} \ln u \tag{1.1}$$

При этом отрезок $0 \leqslant \varphi \leqslant c\lambda$, отвечающий свободной поверхности, перейдет в окружность внешнего круга радиуса единицы, а отрезок, соответствующий дну, перейдет в окружность внутреннего круга радиуса $r_0 = \exp(-2\pi\psi_0 / \varphi_0) = \exp(-2\pi h / \lambda)$, меньшего единицы. Кольцо будет иметь разрез вдоль отрезка $(r_0, 1)$. При решении предполагается, что h и λ, а следовательно, и r_0 заданы.

Отображение этого кольца плоскости u на область одной волны плоскость z определяется из соотношения

$$\frac{dz}{du} = -\frac{\lambda}{2\pi i} \frac{e^{i\omega(u)}}{u}, \quad \omega(u) = \Phi + i\tau \tag{1.2}$$

В силу (1.1) и (1.2) находим $dw / dz = -ce^{\tau - i\Phi}$. Отсюда следует, что всюду в потоке функция Φ равна углу, образуемому вектором скорости $\mathbf{q}$ с осью x, а

$$q = |\mathbf{q}| = ce^{\tau} \tag{1.3}$$

Функция $\omega(u)$ как голоморфная представляется рядом Лорана внутри рассматриваемого кольца плоскости u. Коэффициенты этого ряда, как можно показать, должны быть действительными в силу симметрии волны и давления $p_0(x)$; при этом можно удовлетворить и граничному условию непротекания на дне.

Из (1.2) находим при $u = e^{i\theta}$ (θ — угол радиус-вектора с осью u_1) дифференциальное соотношение; отделяя в нем действительные и мнимые части и интегрируя, получаем параметрическое уравнение профиля волны

$$x = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_0^\theta e^{-\tau(\eta)} \cos\Phi(\eta)\, d\eta, \quad y = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_0^\theta e^{-\tau(\eta)} \sin\Phi(\eta)\, d\eta \tag{1.4}$$

$$\tau(\eta) = \tau(1, \eta), \quad \Phi(\eta) = \Phi(1, \eta)$$

Из (1.4) вытекает, что при решении задачи, кроме $\Phi(\theta)$, необходимо найти и $\tau(\theta)$. Из разложения функции $\omega(u)$ вытекает, что эти функции можно представить следующими тригонометрическими рядами:

$$(1.5)\qquad -\tau(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta, \quad \Phi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta$$

Разложения (1.5) удовлетворяют условию симметрии волны относительно вертикали ее гребня. Из разложения в ряд Лорана функции $\omega(u)$, удовлетворяющей условию обтекания дна, получаются соотношения

$$(1.6)\qquad A_n = \frac{\nu_n''}{n} B_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

где значения ν_n'' определяются формулами (1.18). Таким образом, зная B_n можно по (1.6) найти все A_n, кроме A_0.

Переходя к граничному условию на поверхности, берем для нее интеграл Бернулли

$$(1.7)\qquad p / \rho = C - gy - {}^1/_2 q^2$$

где C — константа, g — ускорение силы тяжести, ρ — плотность. На свободной поверхности разность давлений уравновешивается нормальной составляющей сил поверхностного натяжения. Для этих сил по закону Лапласа имеем

$$(1.8)\qquad p - p_0 = \pm \mu / R$$

Здесь p — давление со стороны жидкости, $p_0 = p_0' + p_0(x)$ — давление со стороны свободной поверхности, μ — капиллярная постоянная, R — радиус кривизны в точках поверхности. Из (1.8), выражая кривизну через $d\Phi / d\theta$, получаем

$$(1.9)\qquad p - p_0 = \frac{2\pi\mu}{\lambda c} q \frac{d\Phi}{d\theta}$$

Подставив p из (1.9) в (1.7) и учтя (1.3), находим

$$(1.10)\qquad \frac{d\Phi}{d\theta} = \nu \left[\delta e^{-\tau} - e^{\tau} - \frac{2\pi}{\lambda} \varkappa y e^{-\tau} - p_0^*(x) e^{-\tau}\right]$$

$$(1.11)\qquad \nu = \frac{\lambda c^2 \rho}{4\pi\mu}, \quad \delta = \frac{2(C\rho - p_0')}{\rho c^2}, \quad \varkappa = \frac{g\lambda}{\pi c^2}, \quad p_0^*(x) = \frac{2p_0(x)}{\rho c^2}$$

Здесь x и y как функции θ определяются формулами (1.4). Выделив в правой части (1.10) слагаемые, линейные относительно Φ и τ, с учетом выражения для y получаем

$$(1.12)\qquad \frac{d\Phi}{d\theta} = \nu \Big\{\delta - 1 + (\delta + 1)\tau + \varkappa \int_0^\theta \Phi(\eta)\, d\eta - S(\theta)(1 - \tau) + F[\tau, \Phi, S, \delta]\Big\}$$

$$F[\tau, \Phi, S, \delta] = \delta(e^{-\tau} - 1 + \tau) - (e^{\tau} - 1 - \tau) + \varkappa e^{-\tau} \int_0^\theta [e^{-\tau(\eta)} \sin\Phi(\eta) - \Phi(\eta)]\, d\eta - \varkappa \int_0^\theta \Phi(\eta)\, d\eta + \varkappa e^{-\tau} \int_0^\theta \Phi(\eta)\, d\eta - S(\theta)(e^{-\tau} - 1 + \tau)$$

Здесь предполагается, что с точностью до константы, включенной в p_0'

$$(1.13)\qquad p_0^*(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{n+2}a_n\cos\frac{2\pi n}{\lambda}x,\qquad S(\theta)=p_0^*[x(\theta)]$$

где ε — малый положительный безразмерный параметр, d_n — заданные действительные числа, причем ряд $\Sigma\varepsilon^n d_n$ сходится в круге $\varepsilon_0>0$. Для получения $S(\theta)$ следует в (1.13) подставить значения $x(\theta)/\lambda$, найденные из уравнения

$$(1.14)\qquad \frac{x(\theta)}{\lambda}=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\theta}e^{-\tau(\eta)}\cos\Phi(\eta)\,d\eta$$

которое вытекает из (1.4).

Уточним выражения для параметров. В случае свободной волны $S(\theta)\equiv 0$ и, как можно показать, надо положить $c^2=c_*^2(1-\varepsilon^2)$. При этом c_*^2 выражается по следующей известной [2] формуле для свободной линейной капиллярно-гравитационной волны длины λ:

$$(1.15)\qquad c_*^2=\left(\frac{2\pi\mu}{\lambda\rho}+\frac{g\lambda}{2\pi}\right)\operatorname{th}\left(2\pi\frac{h}{\lambda}\right)$$

Учитывая значение c, из (1.11) имеем

$$(1.16)\qquad \nu=\frac{\lambda\rho}{4\pi\mu}c_*^2(1-\varepsilon^2)=\nu^{(0)}(1-\varepsilon^2),\qquad \nu^{(0)}=\frac{\lambda\rho c_*^2}{4\pi\mu}$$

$$\varkappa=\frac{g\lambda}{\pi c_*^2(1-\varepsilon^2)}=\varkappa_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{2n}\right),\qquad \varkappa_0=\frac{g\lambda}{\pi c_*^2}$$

После подстановки этих значений в (1.12) получаем

$$(1.17)\qquad \frac{d\Phi}{d\theta}=\nu^{(0)}\left\{\delta-1+(\delta+1)\tau+\varkappa_0\int_0^{\theta}\Phi(\eta)\,d\eta+\right.$$

$$\left.+\varkappa_0\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{2n}\int_0^{\theta}\Phi(\eta)\,d\eta-S(\theta)(1-\tau)+F[\tau,\Phi,S,\delta]\right\}-\nu^{(0)}\varepsilon^2\{\ldots\}$$

Здесь опущенное выражение во второй фигурной скобке должно быть таким же, как и в первой.

Соотношение (1.17) устанавливает на окружности $|u|=1$ кольцевой области плоскости u связь между функциями $\Phi(\theta)$ и $\tau(\theta)$. Из теории аналитических функций известно, что на той же окружности справедливы следующие соотношения, вытекающие из формул Вилля [3] для кольца и обобщающие соотношения Дини для круга:

$$(1.18)\qquad -\tau(\theta)-A_0=\int_0^{2\pi}K(\eta,\theta)\frac{d\Phi}{d\eta}\,d\eta,\qquad K(\eta,\theta)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\eta\cos n\theta}{\nu_n'}$$

$$\Phi(\theta)=\int_0^{2\pi}K_0(\eta,\theta)\frac{d\tau}{d\eta}\,d\eta,\qquad K_0(\eta,\theta)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\eta\sin n\theta}{\nu_n''}$$

$$\nu_n' = n\frac{1-r_0^{2n}}{1+r_0^{2n}} = n\,\mathrm{th}\left(2\pi n\frac{h}{\lambda}\right), \quad \nu_n'' = \frac{1+r_0^{2n}}{1-r_0^{2n}} =$$

$$= n\,\mathrm{cth}\left(2\pi n\frac{h}{\lambda}\right), \quad \nu_n'\nu_n'' = n^2$$

Линейные относительно τ, Φ и ε слагаемые в фигурных скобках преобразуем, применяя формулы (1.18) и интегрируя по частям. Затем в первой фигурной скобке объединяем слагаемые (с коэффициентами 2 и $-\varkappa_0$) с одинаковой подынтегральной функцией $d\Phi\,/\,d\eta$ и с разными ядрами

$$K(\theta, \eta), \quad K_2(\eta, \theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\eta\cos n\theta}{n^2}$$

В уравнении (1.17) константы $\nu^{(0)}$ и $\varkappa_0$ считаются заданными, так как c_*^2 фиксировано, а δ определяется из условия периодичности $\Phi(\theta + 2\pi) = \Phi(\theta)$. В правую часть уравнения (1.17) входит ε, поэтому его решение и, следовательно, δ будут зависеть от ε. Положим

$$\delta = \delta_0 + \delta'(\varepsilon) \tag{1.19}$$

Из условия периодичности при $\varepsilon \to 0$ найдем, что $\delta_0 = 1$, так как при этом величина $\delta'(\varepsilon)$, а также решение стремятся к нулю.

После всех преобразований и с учетом (1.19) уравнение (1.17) примет окончательный вид (многоточие во второй фигурной скобке заменяет шесть последних слагаемых таких же, как и в первой фигурной скобке)

$$\begin{aligned}\zeta(\theta) = \nu_1 \Bigg\{ &\int_0^{2\pi} K^*(\eta, \theta)\zeta(\eta)\,d\eta + \delta'(\varepsilon) + (2 + \delta'(\varepsilon))A_0 + \\ &+ \delta'(\varepsilon)\int_0^{2\pi} K(\eta, \theta)\zeta(\eta)\,d\eta + \varkappa_0\int_0^{2\pi} K_2(\eta, \theta)\zeta(\eta)\,d\eta + \Psi(\theta, \varepsilon)\Bigg\} - \\ &- \nu_1\varepsilon^2\left\{2\int_0^{2\pi} K(\eta, \theta)\zeta(\eta)\,d\eta - \varkappa_0\int_0^{2\pi} K_2(\eta, \theta)\zeta(\eta)\,d\eta + \ldots\right\}\end{aligned} \tag{1.20}$$

$$\zeta(\theta, \varepsilon) = \frac{d\Phi}{d\theta}, \quad \Psi(\theta, \varepsilon) = \varkappa_0\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{2n}\int_0^{\theta}\Phi(\eta)\,d\eta -$$

$$- S(\theta)\left[1 + A_0 + \int_0^{2\pi} K(\eta, \theta)\zeta(\eta)\,d\eta\right] + F[\tau, \Phi, S, 1 + \delta'(\varepsilon)]$$

$$K^*(\eta, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(\eta)\varphi_n(\theta)}{\nu_n}, \quad \nu_n = \frac{n^2}{2\nu_n'' - \varkappa_0}, \quad \varphi_n(\theta) = \frac{\cos n\theta}{\sqrt{\pi}}$$

Здесь ν_n — собственные значения, $\varphi_n(\theta)$ — собственные функции ядра $K^*(\eta, \theta)$. Кроме того, положено $\nu^{(0)} = \nu_1$; при этом параметр $\varkappa_0$ предполагается выбранным так, чтобы собственное значение ν_1 было простым и положительным [2].

Заметим, что при $\nu^{(0)} = \nu_1$ величина c_*^2 будет иметь требуемое выражение. Действительно, из формул (1.20) для ν_n и (1.16) для $\nu^{(0)}$ и $\varkappa_0$ вытекает соотношение (1.15).

Условие периодичности для функции $\Phi(\theta)$ дает соотношение

$$\delta'(\varepsilon) = -\varkappa_0 \int_0^{2\pi} K_2(\eta, 0)\,\zeta(\eta)\,d\eta - (2+\delta'(\varepsilon))A_0 + \tag{1.21}$$
$$+\varepsilon^2\left[\delta'(\varepsilon) + (2+\delta'(\varepsilon))A_0 + \varkappa_0 \int_0^{2\pi} K_2(\eta, 0)\,\zeta(\eta)\,d\eta\right] -$$
$$-\frac{1-\varepsilon^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Psi(\theta, \varepsilon)\,d\theta$$

Как уже было отмечено, из (1.6) следует, что, определив $d\Phi / d\theta$ и $\Phi(\theta)$, найдем B_n и A_n при $n = 1, 2, \ldots$. Остается еще определить A_0.

Полагая в правой части в первой из формул (1.4) $\theta = 2\pi$, в левой должны получить $-\lambda$, так как при этом x уменьшается на λ. Это дает следующее уравнение для определения A_0 ($-\tau(\eta) - A_0$ в силу (1.5) не содержит A_0):

$$\exp(-A_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp[-\tau(\eta) - A_0]\cos\Phi(\eta)\,d\eta \tag{1.22}$$

Таким образом, задача сводится к определению функций $\zeta(\theta, \varepsilon) = d\Phi / d\theta$, $x(\theta, \varepsilon) / \lambda$ и констант $\delta = 1 + \delta'(\varepsilon)$ и $A_0(\varepsilon)$ из системы нелинейных управлений (1.14), (1.20), (1.21) и (1.22). При этом $\tau(\theta, \varepsilon)$, найдется из (1.18), а

$$\Phi(\theta, \varepsilon) = \int_0^{\theta} \zeta(\eta, \varepsilon)\,d\eta \tag{1.23}$$

Если в уравнениях (1.20) и (1.21) исключить $x(\theta, \varepsilon)$ и $A_0(\varepsilon)$ с помощью (1.14) и (1.22), $\tau(\theta, \varepsilon)$ взять из (1.18), а $\Phi(\theta, \varepsilon)$ из (1.23), то система уравнений сведется к двум (1.20) и (1.21). Уравнение (1.20) будет нелинейным интегральным уравнением относительно $\zeta(\theta, \varepsilon)$ с ядром $K^*(\eta, \theta)$ и параметром $\nu^{(0)} = \nu_1$ и трансцендентным относительно $\delta'(\varepsilon)$. Уравнение (1.21) будет нелинейным трансцендентным относительно $\delta'(\varepsilon)$ с линейным функционалом относительно искомой функции. Однако для решения удобнее этого преобразования не делать, а рассматривать систему из четырех уравнений. При этом нелинейным интегральным уравнением будет только уравнение (1.20) относительно $\zeta(\theta, \varepsilon)$, остальные, также и (1.20), следует считать нелинейными трансцендентными уравнениями относительно $x(\theta, \varepsilon) / \lambda$ и констант $\delta'(\varepsilon)$, $A_0(\varepsilon)$ с линейными операторами и функционалами относительно искомых функций.

2. Решение основных уравнений задачи. Решение системы уравнений (1.14), (1.20), (1.21) и (1.22) ищется в форме рядов по степеням параметра ε. Для каждого коэффициента разложения функции $\zeta(\theta, \varepsilon)$ получается линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода с ядром $K^*(\eta, \theta)$ и параметром $\nu^{(0)} = \nu_1$ — первому собственному значению этого ядра. Для первого коэффициента этого разложения получается однородное интегральное уравнение, которое решается по второй теореме Фредгольма. Уравнения для коэффициентов всех последующих приближений будут неоднородными. Они решаются по третьей теореме Фредгольма. Решение каждого такого уравнения выражается в виде суммы из решения однородного уравнения с неопределенным коэффициентом C_{1n} (для n-го приближения) и частного решения неоднородного интегрального уравнения. Коэффициент C_{1n} определяется из условия разрешимости уравнения для $(n+2)$-го приближения. Таким образом, каждый из коэффициентов C_{11}, C_{12} и C_{13} определяется из условия разрешимости уравнения для третьего, четвертого и пятого приближений.

Для коэффициентов разложений остальных искомых величин получается система линейных алгебраических уравнений. Из этой всегда разрешимой системы коэффициенты данного приближения явно выражаются через величины, найденные в предыдущих приближениях.

2.1. Определение первых трех приближений. Приводим определенные в третьем приближении выражения для $\zeta(\theta, \varepsilon)$, $x(\theta, \varepsilon)/\lambda$, $\delta'(\varepsilon)$ и $A_0(\varepsilon)$

$$\zeta(\theta, \varepsilon) = \varepsilon C_{11} \cos\theta + \varepsilon^2 C_{22} \cos 2\theta + \varepsilon^3 (C_{13} \cos\theta + C_{33} \cos 3\theta) \tag{2.1}$$

$$x(\theta, \varepsilon)/\lambda = -\frac{\varepsilon}{2\pi\nu_1'} C_{11} \sin\theta - \frac{\varepsilon^2}{16\pi}\left(\frac{1+\nu_1'^2}{\nu_1'^2} C_{11}^2 + \frac{4}{\nu_2'} C_{22}\right) \times$$
$$\times \sin 2\theta + \varepsilon^3 x_3(\theta)$$

$$\delta'(\varepsilon) = -\varepsilon\varkappa_0 C_{11} - \varepsilon^2\left(\frac{1}{4}\varkappa_0 C_{22} + 2A_{02} - \frac{1}{4}\frac{\varkappa_0}{\nu_1'} C_{11}^2\right) + \varepsilon^3\delta_3$$

$$A_0(\varepsilon) = \varepsilon^2 A_{02} = \varepsilon^2 \frac{1}{4}(1 - 1/\nu_1'^2) C_{11}^2$$

Здесь

$$C_{12} = 0 \quad (\text{см.}\ (2.5)), \quad C_{22} = -\frac{3}{4}\frac{\varkappa_0}{\nu_1'} C_{11}^2 \frac{\nu_1\nu_2}{(\nu_2 - \nu_1)} \tag{2.2}$$
$$C_{33} = C_{33}^* \frac{\nu_1\nu_3}{(\nu_3 - \nu_1)}$$

где C_{33}^* — линейная функция от C_{11}^3 и $C_{11}C_{22}$, $x_3(\theta)$ — линейная функция от $\sin\theta$ и $\sin 3\theta$ с коэффициентами линейными относительно C_{11}^3, $C_{11}C_{22}$ и C_{13} у $\sin\theta$ и относительно C_{11}^3, $C_{11}C_{22}$ и C_{33} у $\sin 3\theta$; δ_3 — линейная функция от C_{11}^3, $C_{11}C_{22}$, C_{11}, C_{13}, и C_{33}; $A_{01} = A_{03} = 0$; коэффициент C_{13} не вычислен, так как пятое приближение, необходимое для его нахождения, не определялось; C_{11} получается из уравнения

$$\beta C_{11}^3 - \frac{2}{\nu_1'} C_{11} - d_1 = 0, \quad \beta = \frac{1}{4\nu_1'^3} + \frac{1-\nu_1'^2}{8\nu_1'^3}(4 + 3\varkappa_0\nu_1') + \tag{2.3}$$
$$+ \frac{9\varkappa_0^2\nu_1\nu_2}{32\nu_1'^2(\nu_2 - \nu_1)}$$

Заметим, что при $d_1 = 0$ уравнение (2.3) обращается в уравнение для определения C_{11} в случае свободной волны.

2.2. Определение дальнейших приближений. Коэффициент C_{12}, как уже отмечено, определяется из условия разрешимости уравнения для $\zeta_4(\theta)$.

Это условие приводит к уравнению

$$C_{12}C_{11}^2\left[\frac{1}{4\nu_1'^3}(10-7\nu_1'^2)-\frac{9}{8}\varkappa_0\frac{\nu_1'^2-1}{\nu_1'^2}+\varkappa_0^2\frac{\nu_1\nu_2(\nu_1'^2+2)}{\nu_1'(\nu_2-\nu_1)}\right]=0 \tag{2.4}$$

Отсюда

$$C_{12}=0 \tag{2.5}$$

так как $C_{11}\neq 0$ и выражение в квадратной скобке, как можно показать, также отлично от нуля.

Методом математической индукции можно показать, что аналогично случаю $n=3$ и единственным образом найдутся $\zeta_n(\theta)$, $x_n(\theta)$ и δ_n и A_{0n} при любом целом положительном $n>3$. При этом уравнение для C_{1n} будет линейным, начиная с $n=2$ и коэффициент при C_{1n} будет такой же, как в (2.4).

3. Определение профиля волны. Профиль волны в параметрической форме $x(\theta,\varepsilon)$ и $y(\theta,\varepsilon)$ определяется из соотношений (1.4), куда следует подставить $\Phi(\theta,\varepsilon)$ и $\tau(\theta,\varepsilon)$. Напомним, что через $\zeta(\theta,\varepsilon)$ функции $\tau(\theta,\varepsilon)$ и $\Phi(\theta,\varepsilon)$ выражаются соответственно формулами (1.18) и (1.23). Исключая из параметрических уравнений θ, получаем уравнение профиля в форме $y=y(x,\varepsilon)$.

Приводим приближенное с точностью до членов третьего порядка уравнение профиля волны, положив $k=2\pi/\lambda$

$$\begin{aligned} y(x,\varepsilon)=\frac{1}{k}\Big\{&\varepsilon C_{11}(\cos kx-1)+\frac{\varepsilon^2}{4}\left(\frac{1}{\nu_1'}C_{11}-C_{22}\right)(1-\cos 2kx)+\\ &+\frac{\varepsilon^3}{6}\left[6C_{13}+\frac{9}{8}\left(1-\frac{1}{\nu_1'^2}\right)C_{11}^3+\frac{3}{2}\left(\frac{2}{\nu_1'}-\frac{1}{\nu_2'}\right)C_{11}C_{22}\times\right.\\ &\times(\cos kx-1)+\frac{\varepsilon^3}{6}\left[\frac{2}{3}C_{33}+\frac{1}{8}\left(\frac{5}{\nu_1'^2}-\frac{7}{3}\right)C_{11}^3-\left(\frac{1}{\nu_1'}+\frac{1}{2\nu_2'}\right)\times\right.\\ &\times C_{11}C_{22}(\cos 3kx-1)\Big\}\end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь коэффициенты C_{ij} определяются формулами (2.2), (2.3) и (2.5).

Замечание. По условию задачи, согласно п. 1, начало координат помещено в гребне волны. Поэтому при значениях x, близких к нулю, y должно быть отрицательным. Из анализа главного члена в (3.1) следует, что для этого должно быть $C_{11}>0$. Из уравнения (2.3) вытекает, что поэтому надо считать $d_1>0$. Это необходимо учесть при исследовании решений уравнения (2.3).

4. Существование и единственность решения задачи. Методами Ляпунова — Шмидта и их развитием [4] устанавливается следующая теорема.

Теорема. Система уравнений (1.14), (1.20), (1.21) и (1.22) имеет единственное малое относительно ε и непрерывное по θ $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ решение $\zeta(\theta,\varepsilon)$, $x(\theta,\varepsilon)/\lambda$, $A_0(\varepsilon)$ и $\delta'(\varepsilon)$ $(\delta'(\varepsilon)=\delta(\varepsilon)-1)$ и оно является аналитической функцией ε при $|\varepsilon|<\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_0$.

Доказательство этой теоремы проводится аналогично тому, как это выполнено в работе [5].

Из этой теоремы вытекает абсолютная и равномерная сходимость рядов для $\Phi(\theta,\varepsilon)$ и $\tau(\theta,\varepsilon)$. Сходимость рядов по степеням ε для подынтегральных функций в (1.4) вытекает из общих теорем анализа о подстановке ряда в ряд. На основании общих теорем анализа устанавливается сходимость ряда, приближенная сумма которого дается формулой (3.1).

Замечание. При решении задачи $p_0^*(x)$ задавалось в форме (1.13). Это дало возможность построить решение в форме рядов по целым степеням параметра ε. Если считать, что

$$p_0^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n d_n \cos \frac{2\pi n}{\lambda} x$$

то, как можно показать путем исследования уравнения разветвления метода Ляпунова — Шмидта, решение пришлось бы строить в виде рядов по степеням $\varepsilon^{1/2}$.

Поступила 4 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Секерж-Зенькович Я. И.* О составных установившихся капиллярно-гравитационных волнах конечной амплитуды. ПММ, 1975, т. 39, вып. 2.
2. *Секерж-Зенькович Я. И.* Об установившихся капиллярно-гравитационных вынужденных волнах конечной амплитуды на поверхности жидкости конечной глубины. В сб.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М., «Наука», 1972.
3. *Villat H.* Sur l'écoulement des fluides pesant. Ann. scient, École norm. Supér., 1915, t. 32.
4. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Методы Ляпунова и Шмидта в теории нелинейных уравнений и их дальнейшее развитие. Успехи матем. наук, 1962, т. 17, вып. 2 (104).
5. *Секерж-Зенькович Я. И.* Об одном виде установившихся волн конечной амплитуды. ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.