Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 532.546.013.2

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Л. А. Галин

(Москва)

Дано решение задачи о неустановившемся движении тяжелой жидкости в вертикальной плоскости со свободной поверхностью в пористой среде, которое соответствует, в частности, случаю фильтрации грунтовых вод. С такими задачами приходится встречаться в вопросах ирригации и мелиорации. Чтобы применять для решения этой достаточно трудной задачи численные или приближенные методы, нужно быть убежденным в его существовании. Рассматривается случай, когда область, занятая тяжелой жидкостью в начальный момент времени, конечна. Ранее автором была исследована задача с несколькими другими предположениями, когда область, занятая тяжелой жидкостью, полубесконечна [1].

Пусть область L, занятая тяжелой жидкостью, отображается на единичный круг в плоскости ζ посредством функции $z(\zeta, t)$. Здесь время t входит как параметр.

В начальный момент времени имеем

$$z(\zeta, 0) = z_0(\zeta) \tag{1}$$

При этом отображении дрене в области L будет соответствовать начало координат в плоскости ζ.

Функция $z(\zeta, t)$, которая зависит от комплексной переменной ζ и от времени t, должна удовлетворять некоторому граничному условию для последующих моментов времени.

Потенциал скоростей для движения тяжелой жидкости

$$\varphi = -k\left(\frac{p}{\rho g} + y\right) \tag{2}$$

Здесь p — давление, k — коэффициент фильтрации, ρ — плотность, g — ускорение силы тяжести.

При этом составляющие скорости

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

При определении скорости перемещения границы эти величины должны быть разделены на коэффициент пористости m.

Будем полагать, что давление на контуре области L равно p_1, т. е.

$$p_L = p_1 \tag{3}$$

Это будет иметь место тогда, когда в область, занятую пористой средой, в которой первоначально не было жидкости, вводится тяжелая жидкость. Если дрена отсутствует, то область, занятая жидкостью, будет с постоянной скоростью перемещаться вниз. Это следует из того, что при этом давление постоянно во всей области и равно p_1.

Поэтому из (2) следует

$$v_x = 0, \quad v_y = k$$

Будем полагать, что давление на контуре дрены скважины, которая имеет форму круга, равно p_2, причем $p_2 < p_1$.

Следовательно

$$p \, |_{z=\delta} = p_2 \tag{4}$$

Здесь δ — радиус скважины.

Граничное условие на контуре области L, которому должна удовлетворять функция $z(\zeta, t)$, установлена в работе автора [2].

Приведем вывод этого условия, более подробный, чем в [2], где он изложен весьма кратко.

Из (2) имеем для потенциала скорости

$$\varphi = -\frac{k}{\rho g} p - ky$$

Отсюда

$$p = -\frac{\rho g}{k} \varphi - \rho g y$$

Введем в рассмотрение переменную ζ. Так как в единичном круге в области ζ давление постоянно на внешнем ($|\zeta| = 1$) и внутреннем ($|\zeta| = \delta_1$) контурах, то выражение для p будет представлять собой логарифмическую функцию от ζ. Здесь δ_1 — радиус дрены в плоскости ζ.

Отсюда следует, что на контуре единичного круга

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\rho g}{k} \frac{\partial y}{\partial n} - \rho g \frac{\partial y}{\partial n} = A \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^{-1}_{\zeta = e^{i\vartheta}}, \quad A = \frac{p_2 - p_1}{\lg \delta_1} \tag{5}$$

На основании (5) следует

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -k \frac{\partial y}{\partial n} - \frac{kA}{\rho g} \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^{-1}_{\zeta = e^{i\vartheta}} \tag{6}$$

Определим теперь $\partial y / \partial n$. Имеем

$$\frac{\partial y}{\partial n} = \sin \left[\arg \left(\zeta \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)_{\zeta = e^{i\vartheta}} \right] = \operatorname{Im} \left[\zeta \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right]_{\zeta = e^{i\vartheta}} \cdot \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^{-1}_{\zeta = e^{i\vartheta}}$$

Так как

$$\operatorname{Im} \left[\zeta \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right] = \operatorname{Re} \left[i\zeta \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right]$$

то получаем окончательно

$$\frac{\partial y}{\partial n} = \operatorname{Re} \left[-\zeta \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right]_{\zeta = e^{i\vartheta}} \cdot \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^{-1}_{\zeta = e^{i\vartheta}} \tag{7}$$

Подставив (7) в (8), получим после преобразований выражение для скорости движения жидкости по нормали к контуру L в соответствующих точках единичного круга

$$\frac{\partial y}{\partial n} = -k \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^{-1}_{\zeta = e^{i\vartheta}} \cdot \left[\frac{A}{\rho g} - \operatorname{Re} \left(i\zeta \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)_{\zeta = e^{i\vartheta}} \right] \tag{8}$$

Перемещение точки на контуре области L в течение времени dt будет

(9) $$\varepsilon_1 = \frac{1}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dt$$

Здесь m — коэффициент пористости среды.

В таком случае перемещение по нормали к контуру области L, а также в точках контура единичного круга будет

(10) $$\varepsilon = -\frac{k}{m} \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^{-2}_{\zeta=e^{i\vartheta}} \cdot \left[\frac{p_2 - p_1}{\rho g \lg \delta_1} - \operatorname{Re}\left(i\zeta \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=e^{i\vartheta}} \right] dt$$

Здесь использовано выражение для A и формула (8). Через промежуток времени dt получим в области переменной ζ контур, который близок к единичному кругу.

Известно, что функция, отображающая в данном случае область, близкую к кругу, на круг, имеет вид

(11) $$\zeta_1(\zeta) = \zeta - \zeta \underset{\gamma}{S} \left\{ \left[-\frac{k(p_2-p_1)}{\rho g \lg \delta_1} + \frac{k}{m} \operatorname{Re}\left(i\zeta \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=e^{i\vartheta}} \right] dt \right\}$$

Здесь для сокращения записи введен символ Шварца $\underset{\gamma}{S}$, обозначающий аналитическую функцию, принимающую на контуре единичного круга значение, содержащееся в фигурных скобках.

Можно записать

(12) $$z(\zeta, t+dt) = z\left[\zeta - \zeta \underset{\gamma}{S} \left\{ \left[-\frac{k(\rho_2-\rho_1)}{\rho g \lg \delta_1} + \frac{k}{m} \left(i\zeta \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=e^{i\vartheta}} \right] dt \right\} \right]$$

Отсюда

(13) $$\operatorname{Re}\left\{ \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) \frac{1}{\zeta} \right\}_{\zeta=e^{i\vartheta}} =$$
$$= \left[-\frac{k(p_2-p_1)}{\rho g\, m \lg \delta_1} + \frac{k}{m} \operatorname{Re}\left(i\zeta \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=e^{i\vartheta}} \right] \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|^{-2}_{\zeta=e^{i\vartheta}}$$

Из этого выражения после преобразования получим окончательно

(14) $$\operatorname{Re}\left\{ \frac{\partial \bar{z}}{\partial t} \zeta \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{k}{m} i\zeta \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right\}_{\zeta=e^{i\vartheta}} = -\frac{k}{\rho g m} \frac{p_2 - p_1}{(\lg \delta - \lg |\partial z / \partial \zeta|_{\zeta=0})}$$

Здесь принято во внимание, что $\lg \delta_1 = \lg \delta - \lg |\partial z / \partial \zeta|_{\zeta=0}$.
Другим путем это условие выведено в работе [3].

В дальнейшем введем обозначения

$$\frac{k}{m} = \lambda, \qquad \frac{k(p_2-p_1)}{\rho g m} = \mu$$

Будем полагать, что в начальный момент времени область, занятая тяжелой жидкостью, отображается на единичный круг посредством функции

(15) $$z(\zeta, 0) = z_0(\zeta) = a_1^*\zeta + a_2^*\zeta^2 + a_3^*\zeta^3 + \ldots$$

Число слагаемых в правой части может быть конечным. В этом случае функция в начальный момент времени будет полиномом конечной степени.

В последующие моменты времени будем искать функцию в виде

(16) $$z(\zeta, t) = a_1(t)\zeta + a_2(t)\zeta^2 + a_3(t)\zeta^3 + \ldots$$

При этом функции $a_1(t)$, $a_2(t)$ ... и их начальные значения вещественны, область в начальный момент времени будет симметричной и эта симметрия сохранится в последующие моменты времени.

При этом, очевидно, имеем условие

$$\left|\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=0} = a_1(t)$$

Таким образом, правая часть условия (14) будет

$$\mu/(\lg \delta - \lg a_1(t))$$

С учетом этого условия равенство (14) преобретает вид

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial \bar z}{\partial t}\zeta\frac{\partial z}{\partial \zeta} - i\lambda\zeta\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right]_{\zeta=e^{i\vartheta}} = \frac{\mu}{\lg \delta - \lg a_1(t)} \tag{17}$$

Подставим теперь ряд (16) в выражение (17). Рассмотрим случай, когда число членов конечно и для определенности равно четырем. Будем в дальнейшем употреблять функции времени без аргумента. Получим

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial \bar z}{\partial t}\zeta\frac{\partial z}{\partial \zeta} - i\lambda\zeta\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right]_{\zeta=e^{i\vartheta}} = \frac{\mu}{\lg \delta - \lg a_1(t)} = \operatorname{Re}\left\{\left[a_1'\frac{1}{\zeta} + a_2'\frac{1}{\zeta^2} + \right.\right.$$
$$\left. + a_3'\frac{1}{\zeta^3} + a_4'\frac{1}{\zeta^4}\right][a_1\zeta + 2a_2\zeta^2 + 3a_3\zeta^3 + 4a_4\zeta^4] + \lambda a_1\zeta +$$
$$\left. + 2\lambda a_2\zeta^2 + 3\lambda a_3\zeta^3 + 4\lambda a_4\zeta^4\right\}_{\zeta=e^{i\vartheta}} \tag{18}$$

Произведя умножение в (18), получим ряд, в котором будут содержаться степени ζ^{-3}, ζ^{-2}, ζ^{-1}, ζ^0, ζ^1, ζ^2, ζ^3, ζ^4, умноженные на некоторые коэффициенты, в которые входят функции a_n и a_m'.

Имея в виду, что

$$\operatorname{Re}[\zeta^n]_{\zeta=e^{i\vartheta}} = \operatorname{Re}[\zeta^{-n}]_{\zeta=e^{i\vartheta}} = \cos n\nu$$

получим на основании (18) следующее выражение:

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial \bar z}{\partial \zeta}\zeta\frac{\partial z}{\partial \zeta} - i\lambda\zeta\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right]_{\zeta=e^{i\vartheta}} - \frac{\mu}{\lg \delta_1 - \lg a} = [a_1'a_4 + 4a_1a_4' + 3\lambda a_3] \times$$
$$\times \cos 3\nu + [a_1a_3' + 2a_2a_4' + 3a_1'a_3 + 4a_2'a_4 + 2\lambda a_2]\cos 2\nu +$$
$$+ [a_1a_2' + 2a_2a_3' + 3a_3a_4' + 2a_1'a_2 + 3a_2'a_3 + 4a_3'a_4 + \lambda a_1] \times$$
$$\times \cos\nu + [a_1a_1' + 2a_3a_2' + 3a_3a_3' + 4a_4a_4'] + 4a_4\cos 4\nu \tag{19}$$

Положим коэффициенты при $\cos 3\nu$, $\cos 2\nu$, $\cos \nu$ равными нулю. В таком случае получим следующую систему четырех уравнений и начальных условий для четырех функций:

$$a_1a_1' + 4a_1'a_4 + 3\lambda a_3 = 0, \quad a_1a_3' + 2a_2a_4' +$$
$$+ 3a_1'a_3 + 4a_2'a_4' + 2\lambda a_2 = 0$$
$$a_1'a_2' + 2a_2a_3' + 3a_3a_4' + 2a_1'a_2' + 3a_2'a_3 + 4a_3'a_4 + \lambda a_1 = 0$$
$$a_1a_1' + 2a_2a_2' + 3a_3a_3' + 4a_4a_4' = \frac{\mu}{\lg \delta - \lg a_1}$$
$$t = 0,\ a_1(t) = a_1^*, \quad a_2(t) = a_2^*, \quad a_3(t) = a_3^*,\ a_4(t) = a_4^* \tag{20}$$

Заметим, что некоторые коэффициенты могут быть нулями. Если будут удовлетворены уравнения (20), то получим следующее равенство:

$$\operatorname{Re}\left[\frac{d\bar z}{\partial t}\zeta\frac{\partial z}{\partial \zeta} - i\lambda\zeta\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right]_{\zeta=e^{i\vartheta}} \frac{\mu}{\lg \delta - \lg a_1} = 4a_4\cos 4\nu \tag{21}$$

Вообще, если ограничиться системой уравнений для n функций, то

$$(22)\qquad \operatorname{Re}\left[\frac{\partial \bar{z}}{\partial t}\,\zeta\,\frac{\partial z}{\partial \zeta} - i\lambda\zeta\,\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right]_{\zeta=e^{i\vartheta}} - \frac{\mu}{\lg\delta - \lg a_1} = na_n \cos n\nu$$

Если контур, который ограничивает область, является гладким, то величина a_n представляет собой коэффициент разложения в ряд Фурье некоторой функции, у которой производная всюду существует, и тогда имеет место следующая оценка:

$$|\,a_n\,| < c\,/\,n^2$$

Следовательно, с увеличением числа уравнений правая часть в уравнении (22) будет удовлетворять неравенству

$$(23)\qquad |\,na_n \cos n\nu\,| < c\,/\,n$$

Таким образом с увеличением n эта величина стремится к нулю и процесс последовательных приближений сходится.

Нетрудно преобразовать систему (20) так, чтобы первые производные от искомых функций были выражены через сами функции.

В таком случае

$$(24)\qquad a_1{}' = \frac{\Delta_1}{\Delta},\quad a_2{}' = \frac{\Delta_2}{\Delta},\quad \ldots,\quad a_n{}' = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

$$t = 0,\quad a_1 = a_1{}^*,\quad a_2 = a^*,\ \ldots,\quad a_n = a_n{}^*$$

Здесь Δ — определитель, полученный из системы уравнений, $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ — соответствующие миноры.

Закон построения матрицы коэффициентов для любого числа уравнений достаточно прост. Для того чтобы показать закон образования этих матриц, приведем ее для случая четырех функций

$$(25)\qquad \begin{Vmatrix} 4a_4 & 0 & 0 & a_1 \\ 3a_3 & 4a_4 & a_1 & 2a_2 \\ 2a_2 & 3a_3 + a_1 & 4a_4 + 2a_2 & 3a_3 \\ a_1 & 2a_2 & 3a_3 & 4a_4 \end{Vmatrix}$$

Элементы матрицы одинаковы вдоль диагоналей. Там, где диагонали пересекаются, они складываются.

Заметим, что в данном случае при фильтрации тяжелой жидкости, так же как и в случае невесомой жидкости, граница области, занятой жидкостью (в рамках модели, использующей классическую теорию фильтрации, где, в частности, не учитываются инерционные силы), не может дойти до дрены, так как область становится неоднолистной.

В случае, если контур доходит до дрены, которой соответствует начало координат в плоскости ζ, будем иметь

$$|\,z(\zeta, t)\,|_{\min} = 0$$

Но на основании известной теории Кёбе для однолистных функций

$$|\,z(\zeta, t)\,|_{\min} > {}^1\!/_4\,|\,a_1(t)\,|$$

Правая часть этого неравенства положительна и не равна нулю. Таким образом, в некоторый момент времени происходит потеря однолистности. Для невесомой жидкости это обстоятельство было проанализировано в работе [2].

Соответствующие вычисления и последовательные формы контуров приведены в [4].

Таким образом, решение нелинейной задачи о фильтрации тяжелой жидкости в том случае, когда используется классическая теория фильтрации, будет достаточно удовлетворительным до некоторого момента времени. Это нужно иметь в виду, в частности, при попытках численного или приближенного решения задачи.

Поступила 6 VIII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галин Л. А.* Некоторые задачи неустановившегося движения грунтовых вод. ПММ, 1951, т. 15, вып. 6.
2. *Галин Л. А.* Неустановившаяся фильтрация со свободной поверхностью. Докл. АН СССР, 1945, т. 47, № 4.
3. *Виноградов Ю. П.* Об одной задаче фильтрации тяжелой жидкости со свободной поверхностью. Уч. зап. Томск. ун-та, 1952, № 17.
4. *Котеленец Н. А.* К расчетам неустановившейся фильтрации при постоянном давлении на границе. Инж. сб., 1952, т. 12.