Решение задачи, согласно (1.7), имеет вид

$$u_r = \frac{P}{2\pi^2 RG} H_1(x, \theta, 0), \quad u_\theta = \frac{P}{2\pi^2 RG} H_3(x, \theta, 0)$$

Здесь, согласно (1.12)

$$\frac{2}{\pi} H_1(x, \theta, 0) = 1 + x^2 - S + \frac{1-S}{2S}[1 - x^2 + 4(1+x^2)(1-\nu)] -$$

$$- \frac{x(1-x^2)(x-\cos\theta)}{S^3} - \cos\theta \ln\frac{S + x - \cos\theta}{1-\cos\theta} +$$

$$+ \operatorname{Re}\frac{C_1 + C_2 x^2}{a}\left[1 - F_1\left(-a, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1-a; xe^{i\theta}, xe^{-i\theta}\right)\right]$$

$$\frac{2}{\pi\sin\theta} H_3(x, \theta, 0) = \frac{x(1-x^2)}{S^3} + \frac{(1 - 2\sin^2\theta)x - (1-S)\cos\theta}{S\sin^2\theta} +$$

$$+ \ln\frac{S + x - \cos\theta}{1-\cos\theta} - x\operatorname{Re}\frac{C_3 + C_4 x^2}{1-a} F_1\left(1-a, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2-a, xe^{i\theta}, xe^{-i\theta}\right)$$

$$S = \sqrt{x^2 - 2x\cos\theta + 1}$$

4. Полученное решение задачи о действии сосредоточенной силы является функцией Грина краевой неосесимметричной задачи для упругого пространства с шаровой полостью.

Если к поверхности $r = R$ полости приложена произвольная нормальная нагрузка $\sigma = \sigma(\theta, \varphi)$, то решение имеет вид

$$u_r = J_1, \quad u_\theta = J_3$$

$$J_k = \frac{R}{4\pi^2 G}\int_0^{2\pi} d\beta \int_0^{\pi} \sigma(\alpha, \beta) H_k\left(\frac{R}{r}, \theta^\circ, 0\right) \sin\alpha\, d\alpha$$

$$\theta^\circ = \arccos[\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha\cos(\varphi - \beta)]$$

Таким образом, получено замкнутое решение задачи о деформировании упругого пространства с шаровой полостью произвольной неосесимметричной нормальной нагрузкой, приложенной к поверхности полости.

Поступила 5 VI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бондарева В. Ф.* О действии осесимметричной нормальной нагрузки на упругий шар. ПММ, 1969, т. 39, вып. 6.
2. *Бондарева В. Ф.* Контактная задача для весомого полушария. Тр. метрологических институтов СССР. ВНИИ физико-технических и радиотехнических измерений, 1974, вып. 119 (179).
3. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. М.— Л., Гостехиздат, 1955.
4. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.
5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М., «Наука», 1973.

УДК 539.3

ОБ УРАВНЕНИЯХ МАГНИТОУПРУГИХ ТОНКИХ ПЛАСТИН

С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян
(Ереван)

В работах [1,2] на основе решений, получаемых методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений магнитоупругости, сформулированы гипотезы относительно характера изменения электромагнитного поля и упругих перемещений по толщине пластинки. На основании этих гипотез получены двумерные уравнения магнитоупругости, в которые входят неизвестные граничные значения компонент индуцированного электромагнитного поля. Поэтому полученные уравнения необходимо рассматривать совместно с уравнениями Максвелла для среды, окружающей пластинку при общих граничных условиях на поверхности раздела двух сред. Сказанное означает, что задача магнитоупругости, тем не менее, остается трехмерной.

В данной работе на основе указанных гипотез магнитоупругости тонких тел [1,2] делается попытка сведения трехмерной задачи магнитоупругости к двумерной, что существенно облегчает исследование вопросов магнитоупругости тонких тел.

1. Пусть изотропная пластинка постоянной толщины $2h$, изготовленная из материала с конечной электропроводностью, находится во внешнем стационарном магнитном поле с заданным вектором магнитной индукции $\mathbf{B}_0 = (B_{0x}, B_{0y}, B_{0z})$. Задача решается в предположении, что для среды, окружающей пластинку, справедливы уравнения Максвелла для вакуума. Принимается также, что влиянием токов смещения на характеристики упругих колебаний можно пренебречь.

Упругие и электромагнитные свойства материала пластинки характеризуются модулем упругости E, коэффициентом Пуассона ν, плотностью ρ, электропроводностью σ, магнитной проницаемостью μ, диэлектрической проницаемостью ε.

Прямоугольная система координат x, y, z выбрана так, что координатная плоскость xy совпадает со срединной плоскостью пластинки.

Гипотеза магнитоупругости тонких тел, предложенная в работах [1,2], записывается в форме

$$u_x = u - z\frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_y = v - z\frac{\partial w}{\partial y}, \quad u_z = w(x, y, t) \tag{1.1}$$

$$e_x = \varphi(x, y, t), \ e_y = \psi(x, y, t), \ h_z = f(x, y, t)$$

Здесь $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$, $w = w(x, y, t)$ — искомые тангенциальные и нормальное перемещения точек срединной поверхности пластинки, (u_x, u_y, u_z) — перемещения произвольной точки пластинки, φ, ψ — искомые тангенциальные компоненты индуцированного электрического поля, f — искомая нормальная компонента индуцированного магнитного поля в пластинке. Остальные компоненты h_x, h_y индуцированного магнитного поля и e_z индуцированного электрического поля выражаются посредством шести искомых функций u, v, w, φ, ψ, f [2].

Система уравнений, полученная на основе соотношений (1.1), для определения искомых функций u, v, w, φ, ψ, f приведена в [1, 2].

К этой системе дифференциальных уравнений необходимо присоединить условия закрепления краев пластинки и условия непрерывности компонент электромагнитного поля e_x, e_y и h_z на поверхности и торцах пластинки. В частности, последние условия для прямолинейного края $x=\text{const}$ имеют вид [2]

$$\varepsilon\varphi = e_x^{(e)}\big|_{z=0}, \quad \psi = \left[e_y^{(e)} + \frac{\mu-1}{\mu} B_{0z}^{(e)} \frac{\partial u}{\partial t}\right]_{z=0} \tag{1.2}$$

$$f = \left[h_z^{(e)} - \frac{\mu-1}{\mu} B_{0x}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x}\right]_{z=0}$$

где $h_z^{(e)}$, $e_x^{(e)}$, $e_y^{(e)}$ — соответствующие компоненты электромагнитного поля во внешней области.

2. Для полного определения перемещений и электромагнитного поля в пластинке необходимо иметь значения компонент индуцированного электромагнитного поля на поверхности, ограничивающей пластинку. Поэтому приведенные в [1, 2] уравнения для определения u, v, w, φ, ψ, f необходимо рассматривать совместно с уравнениями Максвелла для внешней среды

$$\operatorname{rot}\mathbf{h}^{(e)} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{h}^{(e)} = 0 \tag{2.1}$$

при следующих условиях на поверхности пластинки $z = \pm h$ [2]:

$$h_z^{(e)} = \mu f(x, y, t) - (\mu-1) B_{0x}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x} - (\mu-1) B_{0y}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial y} \tag{2.2}$$

$$h_x^{(e)} = h_x - \frac{\mu-1}{\mu} B_{0z}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad h_y^{(e)} = h_y - \frac{\mu-1}{\mu} B_{0z}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial y}$$

Тогда задача определения компонент магнитного поля в среде, окружающей пластинку, приводится к решению уравнений (2.1) с условиями (2.2) и условиями на боковой поверхности пластинки вида (1.2), а также условиями затухания возмущений на бесконечности.

Задача определения $\mathbf{h}^{(e)}$ магнитного поля решается сравнительно просто, если величина $h_z^{(e)}$ задана на плоскостях $z = \pm h$ вне пластинки. Это имеет место, например, когда пластинка по всему контуру контактирует с идеально проводящей диафрагмой, движение которой задано. Тогда [3]

$$\mu h_z = \mathrm{rot}_z\,(\mathbf{u}_0 \times \mathbf{B}_0), \quad (x,\ y) \in \Omega, \quad |z| \leqslant h$$

где $\mathbf{u}_0\,(u_{0x},\ u_{0y},\ u_{0z})$ — заданный вектор перемещений точек диафрагмы, Ω — область плоскости $z = 0$, ограниченной контуром пластинки. Отсюда, в частности, для неподвижной диафрагмы ($\mathbf{u}_0 = 0$) получим $h_z = 0$ в областях $(x, y) \overline{\in} \Omega$, $|z| \leqslant h$.

В этом случае введением потенциальной функции Φ посредством

$$\mathbf{h}^{(e)} = \mathrm{grad}\,\Phi \tag{2.3}$$

задача приводится к следующей внешней задаче Неймана для функции Φ:

$$\Delta\Phi = 0 \tag{2.4}$$

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z\to\pm h} = F_{\pm}(x,y,t) = \begin{cases} g_{\pm}(x,\ y,\ t), & (x,\ y) \in \Omega \\ q_{\pm}(x,y,t), & (x,y) \overline{\in} \Omega \end{cases}$$

$$g_{\pm}(x,y,t) = \mu f(x,\ y,\ t) - (\mu - 1)\left[B_{0x}^{(e)}\frac{\partial w}{\partial x} + B_{0y}^{(e)}\frac{\partial w}{\partial y}\right]_{z=\pm h}$$

$$q_{\pm}(x,y,t) = \frac{1}{\mu}\,[\mathrm{rot}_z\,(\mathbf{u}_0 \times \mathbf{B}_0)]_{z=\pm h}$$

Из теории потенциала известно, что решение задачи (2.4) может быть представлено в виде потенциала простого слоя (здесь верхний знак берется для $z > h$, нижний — для $z < -h$)

$$\Phi(x,y,z,t) = \mp\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{F_{\pm}(\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z \mp h)^2]^{1/2}} \tag{2.5}$$

В частном случае, когда форма колебаний пластинки — цилиндрическая поверхность $z = w\,(x,\ t)$ (плоская задача), решение задачи Неймана представляется посредством логарифмического потенциала простого слоя.

Из (2.5) в силу (2.3), (2.4) найдем

$$\frac{h_x^{+} - h_x^{-}}{2} = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x-\xi}{\zeta^3}\,F(\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta \tag{2.6}$$

$$\frac{h_y^{+} - h_y^{-}}{2} = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{y-\eta}{\zeta^3}\,F(\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta$$

$$F = \begin{cases} \mu f(x,y,t) - (\mu-1)\left[c_x^{+}\dfrac{\partial w}{\partial x} + c_y^{-}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right], & (x,y) \in \Omega \\ \dfrac{1}{2\mu}\,\{[\mathrm{rot}_z\,(\mathbf{u}_0 \times \mathbf{B}_0)]_{z=h} + [\mathrm{rot}_z\,(\mathbf{u}_0 \times \mathbf{B}_0)]_{z=-h}\}, & (x,y) \overline{\in} \Omega \end{cases}$$

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2,\quad c_x^{+} = \frac{B_{0x}^{(e)+} + B_{0x}^{(e)-}}{2}, \quad c_y^{-} = \frac{B_{0y}^{(e)+} + B_{0y}^{(e)-}}{2}$$

В (2.6) интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Подставляя (2.6) в систему, приведенную в [1, 2], получим разрешающую систему уравнений относительно искомых функций u, v, w, φ, ψ, f задачи. Таким образом, задача магнитоупругих колебаний пластинки в этом случае приводится к системе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядром Коши.

Приведем упомянутую систему в случае плоской задачи, когда пластинка — полоса шириной $2a$ находится в постоянном внешнем магнитном поле, вектор напряженности которого параллелен оси x (для простоты принимается $\mu = 1$, $u_0 = 0$)

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}=0 \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{4\pi\sigma}{c}\left(\psi+\frac{B_{0x}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)=\frac{1}{\pi h}\int_{-a}^{a}\frac{f(\xi,t)}{x-\xi}d\xi$$

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{2\sigma h}{c}B_{0x}\left(\psi+\frac{B_{0x}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)=0$$

В (2.7) также интеграл понимается в смысле главного значения. В случае бесконечной пластинки область интегрирования будет $(-\infty, \infty)$.

Вернемся к общему случаю, когда значения $h_z^{(e)}$ вдоль всей плоскости xy неизвестны. В этом случае нужно решать значительно более сложную краевую задачу.

Рассмотрим случай плоской задачи, заменяя пластинку разрезом $[-a, a]$ на действительной оси. Пусть движение пластинки происходит в комплексной плоскости $z = x + iy$. Нормальная компонента магнитного поля $h_y^{(e)}$ должна удовлетворять уравнению Лапласа для двух независимых переменных при выполнении условия

$$h_y^{(e)}=\begin{cases} g_+(x,t) & \text{для } y=+0, \ -a\leqslant x\leqslant a \\ g_-(x,t) & \text{для } y=-0, \ -a\leqslant x\leqslant a\end{cases} \tag{2.8}$$

и условиям затухания возмущений на бесконечности.

Задача, таким образом, свелась к следующей: найти аналитическую вне отрезка $(-a, a)$ и равную нулю на бесконечности функцию $W(z)$, мнимая часть которой $h_y^{(e)}$ на верхнем и нижнем берегах этого отрезка принимает заданные значения (2.8).

Решение этой задачи имеет вид [4]

$$h_y^{(e)}=\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{g_+-g_-}{\xi-z}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{z+a}{z-a}}\int_{-a}^{a}\frac{g_++g_-}{\xi-z}\sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}}d\xi\right\}$$

Отсюда найдем $\partial h_y^{(e)}/\partial y$ и, учитывая, что условие $\operatorname{div}\mathbf{h}=0$ верно и на поверхностях пластинки ($y=\pm 0$), определим значения величины $\partial(h_x^+ - h_x^-)/\partial x$. Путем подстановки найденного значения $\partial(h_x^+ - h_x^-)/\partial x$ в систему из [1, 2] получим разрешающую систему задачи относительно искомых функций u, w, ψ, f.

При решении конкретных краевых задач к разрешающим уравнениям необходимо присоединить граничные условия на торцах пластинки для компонент электромагнитного поля и обычные условия закрепления краев пластинки.

3. Для иллюстрации применим изложенный метод к решению задачи колебаний бесконечной пластинки с постоянной конечной электропроводностью при наличии внешнего магнитного поля с вектором напряженности, параллельным оси x.

Решение системы (2.7) будем искать в виде волн, распространяющихся вдоль оси x. Тогда подстановка в (2.7) с учетом того, что областью интегрирования является $(-\infty, \infty)$, приводит к следующему характеристическому уравнению для определения частоты колебаний ω ($k = \pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина полуволны):

$$\omega^2-\omega_0^2-B_{0x}\frac{k(1+kh)}{4\pi\rho}q=0 \tag{3.1}$$

$$\omega_0^2=\frac{Dk^4}{2\rho h},\qquad q=B_{0x}\left[1+\frac{c^2k(1+kh)}{4\pi i\omega\sigma h}\right]^{-1}$$

Здесь w_0 — частота собственных колебаний пластинки в отсутствие магнитного поля.

Найдем величины индуцированных компонентов напряженностей магнитного и электрического полей во всем пространстве в зависимости от прогибов пластинки

$$h_x = z\frac{qk}{h}w, \quad h_z = -ikqw, \quad e_y = -\frac{i\omega}{c}qw \tag{3.2}$$

$$h_x^{(e)} = \pm kqe^{k(h\mp z)}w, \quad h_z^{(e)} = \mp ikqe^{k(h\mp z)}w$$

Здесь верхние знаки берутся при $z \geqslant h$, нижние — при $z \leqslant -h$.

Сравнение значений величин (3.2) с соответствующими значениями тех же величин, полученных в работе [1], показывает, что результаты, найденные в [1], совпадают с (3.2) при $V^2/c^2 \ll 1$ (V — фазовая скорость распространения упругой волны в пластинке, c — скорость света в вакууме). Укажем также, что уравнение (3.1) с точностью величин порядка V^2/c^2 совпадает с соответствующим характеристическим уравнением, полученным в [1], при решении той же задачи с учетом токов смещения.

Поступила 20 I 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки. ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.
2. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К магнитоупругости тонких оболочек и пластин. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
3. *Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* О колебаниях проводящих пластин в магнитном поле. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 2.
4. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1973.

Технический редактор *З. В. Филиппова*

Сдано в набор 24/VII-1975 г. Т-15852 Подписано к печати 25/IX-1975 г. Тираж 2845 экз.
Зак. 2641 Формат бумаги 70×108¹/₁₆ Усл. печ. л. 16,8 + 1 вкл. Бум. л. 6 Уч.-изд. л. 16,4

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10