УДК 539.3

О ЗАМКНУТОМ РЕШЕНИИ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВА С ШАРОВОЙ ПОЛОСТЬЮ

В. А. Карпенко

(Ростов-на-Дону)

Методом, изложенным в работах [1, 2], получено в квадратурах решение задачи о деформировании изотропного упругого пространства с шаровой полостью произвольными нормальными нагрузками, приложенными к поверхности полости. Соответствующая осесимметричная задача решена при произвольных нормальных нагрузках и касательных нагрузках, действующих в меридиональной плоскости. В качестве примера приведено решение задачи для осесимметричной нагрузки, равномерно распределенной на бесконечно тонком кольце, и для случая действия сосредоточенной нормальной силы.

1. Исследование будем вести в сферической системе координат $r\ \theta\ \varphi$.

Рассмотрим сначала осесимметричную задачу о деформировании изотропного упругого пространства $r \geqslant R$ с шаровой полостью произвольными нормальными $\sigma(\theta)$ и касательными $\tau(\theta)$ нагрузками, приложенными на сфере $r = R$.

Известно [3], что задача о равновесии осесимметрично нагруженного тела вращения распадается на две самостоятельные задачи: задачу кручения относительно оси симметрии и задачу о деформировании в меридиональной плоскости. Ограничимся рассмотрением второй задачи.

Заданные на сфере $r = R$ внешние нагрузки представим [3] в форме рядов ($P_n(x)$ — полиномы Лежандра)

$$\sigma(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n P_n(\cos\theta), \qquad \tau(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta} \tag{1.1}$$

$$\sigma_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} \sigma(\theta) P_n(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta \tag{1.2}$$

$$\tau_n = \frac{2n+1}{2n(n+1)}\int_0^{\pi} \tau(\theta)\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\sin\theta\, d\theta$$

Граничные условия на сфере $r = R$ имеют вид

$$\sigma_r = -\sigma(\theta), \quad \tau_{r\theta} = -\tau(\theta), \quad \tau_{r\varphi} = 0 \tag{1.3}$$

Обращающееся в нуль на бесконечности решение уравнений равновесия в перемещениях можно представить в виде [3]

$$u_r = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{A_n}{r^n}n(n+3-4\nu) - \frac{B_n}{r^{n+1}}(n+1)\right]P_n(\cos\theta) \tag{1.4}$$

$$u_\theta = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{A_n}{r^n}(-n+4-4\nu) + \frac{B_n}{r^{n+2}}\right]\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}$$

Подставляя в граничные условия (1.3) напряжения σ_r и $\tau_{r\theta}$, определенные по перемещениям u_r и u_θ, и учитывая (1.1), для постоянных A_n и B_n ($n = 1, 2, \ldots$) получим систему двух линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\sigma_n}{2G} = A_n\frac{n(n^2+3n-2\nu)}{R^{n+1}} - B_n\frac{(n+1)(n+2)}{R^{n+3}} \tag{1.5}$$

$$\frac{\tau_n}{2G} = A_n\frac{n^2-2+2\nu}{R^{n+1}} + B_n\frac{n+2}{R^{n+3}}$$

Здесь G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона. Определитель этой системы отличен от нуля при всех значениях $n = 1, 2, \ldots$

Решение системы (1.5) имеет следующий вид:

$$A_n = \frac{\sigma_n + (n+1)\tau_n}{4G\Delta} R^{n+1}, \qquad \Delta = n^2 + (1-2\nu)n + 1 - \nu \tag{1.6}$$

$$B_n = \frac{\sigma_n(n^2 - 2 + 2\nu) + \tau_n n(n^2 + 3n - 2\nu)}{4G\Delta(n+2)} R^{n+3}$$

Подставляя в (1.4) найденные значения коэффициентов A_n и B_n и учитывая соотношения (1.2), получим

$$u_r = I_{12}, \quad u_\theta = I_{34} \tag{1.7}$$

$$I_{sk} = \frac{R}{2\pi G}\int_0^\pi [\sigma(\alpha) H_s + \tau(\alpha) H_k] \sin\alpha \, d\alpha$$

Здесь

$$\frac{4}{\pi} H_1 = x^2 + S_{12}^{(A)} P_n(\cos\theta) P_n(\cos\alpha) \tag{1.8}$$

$$\frac{4}{\pi} H_2 = S_{12}^{(B)} P_n(\cos\theta) \frac{dP_n(\cos\alpha)}{d\alpha}$$

$$\frac{4}{\pi} H_3 = S_{34}^{(A)} \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta} P_n(\cos\alpha)$$

$$\frac{4}{\pi} H_4 = S_{34}^{(B)} \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta} \frac{dP_n(\cos\alpha)}{d\alpha}$$

$$S_{jk}^{(A)} = \sum_{n=1}^{\infty} (A_{jk} x^n + A_{kn} x^{n+2}), \qquad x = \frac{R}{r}$$

$$S_{jk}^{(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} (B_{jk} x^n + B_{kn} x^{n+2})$$

$$A_{1n} = \frac{n(2n+1)(n+3-4\nu)}{\Delta}, \qquad A_{2n} = -\frac{(2n+1)(n+1)(n^2-2+2\nu)}{(n+2)\Delta} \tag{1.9}$$

$$B_{1n} = \frac{(2n+1)(n+3-4\nu)}{\Delta}, \qquad B_{2n} = -\frac{(2n+1)(n^2+3n-2\nu)}{(n+2)\Delta}$$

$$A_{3n} = -\frac{(2n+1)(n-4+4\nu)}{\Delta}, \qquad A_{4n} = \frac{(2n+1)(n^2-2+2\nu)}{(n+2)\Delta}$$

$$B_{3n} = -\frac{(2n+1)(n-4+4\nu)}{n\Delta}, \qquad B_{4n} = \frac{(2n+1)(n^2+3n-2\nu)}{(n+1)(n+2)\Delta}$$

Коэффициенты A_{in} и B_{in} ($i = 1, 2, 3, 4$) можно представить в следующем виде (a и $\bar{a}$ — комплексно-сопряженные корни уравнения $\Delta = 0$):

$$A_{1n} = (2n+1) + 4(1-\nu) + \frac{C_1}{n-a} + \frac{\bar{C}_1}{n-\bar{a}} \tag{1.10}$$

$$A_{2n} = -(2n+1) + 4(1-\nu) - \frac{2}{n+2} + \frac{C_2}{n-a} + \frac{\bar{C}_2}{n-\bar{a}}$$

$$B_{1n} = 2 + \frac{D_1}{n-a} + \frac{\bar{D}_1}{n-\bar{a}}, \qquad B_{2n} = -2 - \frac{2}{n+2} + \frac{D_2}{n-a} + \frac{\bar{D}_2}{n-\bar{a}}$$

$$A_{3n} = -2 + \frac{C_3}{n-a} + \frac{\bar{C}_3}{n-\bar{a}}, \qquad A_{4n} = 2 - \frac{2}{n+2} + \frac{C_4}{n-a} + \frac{C_4}{n-\bar{a}}$$

$$B_{3n} = \frac{4}{n} + \frac{D_3}{n-a} + \frac{\bar{D}_3}{n-\bar{a}}$$

$$B_{4n} = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{D_4}{n-a} + \frac{\bar{D}_4}{n-\bar{a}}$$

$$a = -\frac{1-2\nu}{2} + i\frac{\sqrt{3-4\nu^2}}{2}$$

Величины C_i и D_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ зависят только от коэффициента Пуассона

$$C_1 = -2 + 6\nu - 4\nu^2 + i\,\frac{3 + \nu - 12\nu^2 + 8\nu^3}{\sqrt{3 - 4\nu^2}}$$

$$C_2 = 1 + 2\nu - 4\nu^2 + i\,\frac{2 - 5\nu - 4\nu^2 + 8\nu^3}{\sqrt{3 - 4\nu^2}}$$

$$D_1 = \frac{1}{2}\left(5 - 4\nu + i\,\frac{3 - 10\nu + 8\nu^2}{\sqrt{3 - 4\nu^2}}\right)$$

$$D_2 = C_2 - C_1 - D_1, \qquad C_3 = -3C_4, \qquad C_4 = \frac{C_2 - C_1}{2}$$

$$D_3 = -3D_4, \qquad D_4 = 1 + i\,\frac{2(1-\nu)}{\sqrt{3 - 4\nu^2}}$$

Преобразуем выражения (1.8) для функций H_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, используя соотношение (следующее из теоремы сложения сферических функций)

$$P_n(\cos\theta)\,P_n(\cos\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} P_n(\lambda)\,d\psi$$

Получаем

$$\lambda = \cos(\theta + \alpha) + 2\sin\theta\sin\alpha\sin^2\psi$$

$$H_1 = \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} S_{12}^{(A)} P_n(\lambda)\,d\psi \qquad H_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^{\pi/2} S_{12}^{(B)} P_n(\lambda)\,d\psi \tag{1.11}$$

$$H_3 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\int_0^{\pi/2} S_{34}^{(A)} P_n(\lambda)\,d\psi \qquad H_4 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta\,\partial\alpha}\int_0^{\pi/2} S_{34}^{(B)} P_n(\lambda)\,d\psi$$

Ряды в (1.11) можно просуммировать, если учесть (1.10) и воспользоваться формулами [1,4]

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n(\lambda) = \frac{1}{s(x,\lambda)}, \qquad s(x,\lambda) = \sqrt{x^2 - 2x\lambda + 1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n P_n(\lambda) = x\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{s(x,\lambda)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} P_n(\lambda) = \frac{1}{x}\int_0^x dx \sum_{n=1}^{\infty} x^n P_n(\lambda) = \int_0^1 \frac{1}{y}\left[\frac{1}{s(xy,\lambda)} - 1\right] dy$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n-a} P_n(\lambda) = x^a\int_0^x dx \sum_{n=0}^{\infty} x^{n-a-1} P_n(\lambda) = \int_0^1 \frac{y^{-(1+a)}}{s(xy,\lambda)}\,dy, \qquad \operatorname{Re} a < 0$$

Последний интеграл с точностью до множителя $-1/a$ совпадает с гипергеометрической функцией двух переменных $F_1(-a, {}^1/_2, {}^1/_2, 1-a;\ xe^{i\arccos\lambda}, xe^{-i\arccos\lambda})$, что следует из ее интегрального представления [5].

Учитывая еще, что [4]

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{s(x,\lambda)} = \frac{K(k)}{h}, \qquad h^2 = x^2 - 2x\cos(\theta + \alpha) + 1$$

$$k^2h^2 = 4x\sin\theta\sin\alpha$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, окончательно получаем

$$H_1 = -\frac{5-4\nu}{4}\pi - \frac{1-2\nu}{2}\pi x^2 + 2(1-\nu)(1+x^2)\frac{K(k)}{h} + \tag{1.12}$$

$$+\frac{1-x^2}{2}\left[\frac{K(k)}{h} + 2x\frac{\partial}{\partial x}\frac{K(k)}{h}\right] + \operatorname{Re}\int_0^1 \left(\frac{C_1+C_2x^2}{y^{1+a}} - x^2y\right)\left[\frac{K(k_1)}{h_1} - \frac{\pi}{2}\right]dy$$

$$H_2 = (1-x^2)\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{K(k)}{h} + \operatorname{Re}\int_0^1\left(\frac{D_1+D_2x^2}{y^{1+a}} - x^2y\right)\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{K(k_1)}{h_1}dy$$

$$H_3 = (x^2-1)\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{K(k)}{h} + \operatorname{Re}\int_0^1\left(\frac{C_3+C_4x^2}{y^{1+a}} - x^2y\right)\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{K(k_1)}{h_1}dy$$

$$H_4 = \operatorname{Re}\int_0^1\left[\frac{D_3+D_4x^2}{y^{1+a}} + \frac{2}{y} + x^2(1-y)\right]\frac{\partial^2}{\partial\theta\,\partial\alpha}\frac{K(k_1)}{h_1}dy$$

$$h_1^2 = x^2y^2 - 2xy\cos(\theta+\alpha) + 1, \quad k^2h^2 = 4xy\sin\theta\sin\alpha$$

Таким образом, решение (1.7) первой краевой осесимметричной задачи теории упругости для пространства с шаровой полостью представлено в квадратурах.

Используя свойства полных эллиптических интегралов первого и второго рода и их производных [4], можно показать, что функции $H_i(x, \theta, \alpha)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ непрерывны при $r > R$ $(0 < x < 1)$. На сфере $r = R$ они имеют разрывы при $\alpha = \theta$.

При $\alpha \to \theta$ имеют место следующие представления:

$$H_{1,4}(1, \theta, \alpha)\sin\alpha = -2(1-\nu)\ln|\theta-\alpha| + Q_{1,4}(\theta, \alpha)$$

$$H_{2,3}(1, \theta, \alpha)\, 2\sin\alpha = (1-2\nu)\pi\operatorname{sgn}(\alpha-\theta) + Q_{2,3}(\theta, \alpha)$$

Функции $Q_i(\theta, \alpha)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ ограничены и непрерывны при $0 < \theta, \theta < \pi$.

Отметим следующие свойства функций H_i:

$$H_{1,4}(x, \theta, \pi-\alpha) = H_{1,4}(x, \pi-\theta, \alpha), \quad H_{2,3}(x, \theta, \pi-\alpha) = -H_{2,3}(x, \pi-\theta, \alpha)$$

2. В качестве примера рассмотрим задачу о деформировании упругого пространства $r \geqslant R$ с шаровой полостью нормальной силой P и касательной силой Q, равномерно распределенными на бесконечно тонком кольце $r = R, \theta = \theta_0$. Нагрузку, распределенную по линии, следует, конечно, рассматривать как предельное значение соответствующей поверхностной нагрузки.

Граничные условия при $r = R$ имеют вид ($\delta(x)$ — дельта-функция Дирака)

$$\sigma_r = -\frac{P\delta(\alpha-\theta_0)}{2\pi R^2\sin\theta_0}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{Q\delta(\alpha-\theta_0)}{2\pi R^2\sin\theta_0}, \quad \tau_{r\varphi} = 0 \tag{2.1}$$

Подставляя значения $\sigma(\alpha) = -\sigma_r$ и $\tau(\alpha) = -\tau_{r\theta}$, заданные соотношениями (2.1), в решение (1.7), получаем

$$u_r = I_{12}^\circ, \quad u_\theta = I_{34}^\circ$$

$$I_{jk}^\circ = \frac{1}{4\pi^2 RG}[PH_j(x, \theta, \theta_0) + QH_k(x, \theta, \theta_0)]$$

Функции H_i $(i=1, 2, 3, 4)$ даются соотношениями (1.12), в которых следует положить $\alpha = \theta_0$. Из (1.7) видно, что функции H_i являются функциями Грина первой краевой осесимметричной задачи теории упругости для пространства с шаровой полостью.

3. Рассмотрим задачу о деформировании упругого пространства $r \geqslant R$ с шаровой полостью нормальной сосредоточенной силой P, приложенной в полюсе $\theta = 0$ сферы $r = R$.

Граничные условия при $r = R$

$$\sigma_r = -\frac{P\delta(\theta)}{\pi R^2\sin\theta}, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{r\varphi} = 0$$

Решение задачи, согласно (1.7), имеет вид

$$u_r = \frac{P}{2\pi^2 RG} H_1(x, \theta, 0), \qquad u_\theta = \frac{P}{2\pi^2 RG} H_3(x, \theta, 0)$$

Здесь, согласно (1.12)

$$\frac{2}{\pi} H_1(x, \theta, 0) = 1 + x^2 - S + \frac{1-S}{2S}[1 - x^2 + 4(1+x^2)(1-\nu)] -$$

$$- \frac{x(1-x^2)(x-\cos\theta)}{S^3} - \cos\theta \ln\frac{S + x - \cos\theta}{1-\cos\theta} +$$

$$+ \operatorname{Re}\frac{C_1 + C_2 x^2}{a}\left[1 - F_1\left(-a, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1-a; xe^{i\theta}, xe^{-i\theta}\right)\right]$$

$$\frac{2}{\pi\sin\theta} H_3(x, \theta, 0) = \frac{x(1-x^2)}{S^3} + \frac{(1 - 2\sin^2\theta)x - (1-S)\cos\theta}{S\sin^2\theta} +$$

$$+ \ln\frac{S + x - \cos\theta}{1 - \cos\theta} - x\operatorname{Re}\frac{C_3 + C_4 x^2}{1-a} F_1\left(1-a, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2-a, xe^{i\theta}, xe^{-i\theta}\right)$$

$$S = \sqrt{x^2 - 2x\cos\theta + 1}$$

4. Полученное решение задачи о действии сосредоточенной силы является функцией Грина краевой неосесимметричной задачи для упругого пространства с шаровой полостью.

Если к поверхности $r = R$ полости приложена произвольная нормальная нагрузка $\sigma = \sigma(\theta, \varphi)$, то решение имеет вид

$$u_r = J_1, \qquad u_\theta = J_3$$

$$J_k = \frac{R}{4\pi^2 G}\int_0^{2\pi} d\beta \int_0^{\pi} \sigma(\alpha, \beta) H_k\left(\frac{R}{r}, \theta^\circ, 0\right)\sin\alpha\, d\alpha$$

$$\theta^\circ = \arccos[\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha\cos(\varphi - \beta)]$$

Таким образом, получено замкнутое решение задачи о деформировании упругого пространства с шаровой полостью произвольной неосесимметричной нормальной нагрузкой, приложенной к поверхности полости.

Поступила 5 VI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бондарева В. Ф.* О действии осесимметричной нормальной нагрузки на упругий шар. ПММ, 1969, т. 39, вып. 6.
2. *Бондарева В. Ф.* Контактная задача для весомого полушария. Тр. метрологических институтов СССР. ВНИИ физико-технических и радиотехнических измерений, 1974, вып. 119 (179).
3. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. М.— Л., Гостехиздат, 1955.
4. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.
5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М., «Наука», 1973.

УДК 539.3

ОБ УРАВНЕНИЯХ МАГНИТОУПРУГИХ ТОНКИХ ПЛАСТИН

С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян

(Ереван)

В работах [1,2] на основе решений, получаемых методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений магнитоупругости, сформулированы гипотезы относительно характера изменения электромагнитного поля и упругих перемещений по толщине пластинки. На основании этих гипотез получены двумерные уравнения