

## ПОЛЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПЛОСКИХ СКОПЛЕНИЙ ДИСЛОКАЦИЙ В АНИЗОТРОПНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В. А. Соловьев

(Москва)

В рамках плоской задачи теории упругости определяются напряжения в каждой точке бесконечной упругоанизотропной среды, имеющей дефекты, эффективно описываемые скоплениями дислокаций (сами скопления, трещины, деформационные двойники, тонкие кристаллы мартенситного типа). Напряжения выражаются через плотности дислокаций в скоплениях для произвольной реализации дефектов с учетом их суммарного вектора Бюргерса. Исследуется взаимодействие источника типа линейной силы — дислокации с указанными дефектами (с учетом сил изображения). Приводится выражение для напряжений около скоплений, описываемых дискретно.

Теоретическому изучению полей напряжений дефектов типа скоплений посвящен ряд работ (например, [1-7]). В некоторых из них [4-7] обращалось внимание на подобие вида напряжений и распределения дислокаций в скоплении. Тем не менее не было получено общего выражения для поля напряжений в упругоанизотропной и даже изотропной среде со скоплениями, хотя имеется (правда, справедливое лишь в частных случаях) решение для щелеподобной трещины [1].

В данной работе при помощи более простого, чем в работе [1], метода получены более точные результаты, применимые ко всем дефектам типа плоских скоплений дислокаций для произвольной реализации дефектов. В отличие от выражений [1], справедливых лишь вблизи запертых концов трещин с нулевым вектором Бюргерса и неточно учитывающих взаимодействие с другими дефектами, полученные выражения дают напряжения во всей среде с дефектами типа скоплений во внешних полях, которые можно описать линейными комбинациями дробно-рациональных функций.

Отметим, что влияние анизотропии на распределение дислокаций и на напряжения, несущественное в ряде случаев [1, 2], может играть важную роль при описании таких процессов, как возбуждение дефектов по определенным системам развития в поле других, поворот и ветвление трещин, распределение примеси и выделений фаз около дефектов, образование около них зоны релаксации и т. д.

1. Поле напряжений в точке  $(x, y)$  около дислокации, параллельной  $Oz$  и пересекающей плоскость  $xy$  в точке  $(\xi, 0)$ , имеет вид

$$(1.1) \quad \sigma_{kj}^{(d)}(\xi; x, y) = \sum_{v=1}^6 \frac{Q_{kj}^{(v)}}{\xi_v - \xi}, \quad \xi_v = x + p_v y$$

Здесь комплексные константы  $Q_{kj}^{(v)}$  и  $p_v$  ( $\text{Im } p_v \neq 0$  [8]) зависят от направления дислокации и ее вектора Бюргерса и упругих свойств среды (метод их вычисления изложен в [1], в гл. 13 книги [8] и в приложении).

Распределение  $\rho(x)$  дислокаций в скоплении на участке  $\Delta_1 \leq x \leq \Delta_2$  плоскости  $xy$  определяется через внешние напряжения обращением сингулярного интегрального уравнения

$$(1.2) \quad \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \frac{\rho(\xi) d\xi}{\xi - x} = A^{-1} \sigma_{kj} n_k b_j, \quad A = \sum_{v=1}^6 Q_{kj}^{(v)} n_k b_j$$

Здесь  $A$  — константа взаимодействия дислокаций с вектором Бюргерса  $\mathbf{b}$  в скоплении на плоскости с нормалью  $\mathbf{n}$  (в данном случае вектор  $\mathbf{n}$  направлен вдоль  $Oy$ ).

Решение уравнения (1.2), согласно [9], таково:

$$(1.3) \quad \rho(x) = -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{R(x)} \left[ C + \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \frac{\sigma(\xi) d\xi}{\sqrt{R(\xi)} (\xi - x)} \right]$$

В этом выражении  $R(x)$  — дробно-рациональная функция, в числителе которой стоит произведение тех из величин  $x - \Delta_m$  ( $m = 1, 2$ ), где  $\Delta_m$  — свободные концы скопления, а в знаменателе — произведение тех  $x - \Delta_n$ , где  $\Delta_n$  — закрытые концы;  $C$  — константа, отличная от нуля лишь для закрытых с двух сторон скоплений. Во всех случаях выполняется условие

$$(1.4) \quad \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \rho(\xi) d\xi = N$$

определяющее константу  $C$  или положение конца дефекта ( $N$  — суммарное число дислокаций в дефекте). Если оба конца свободны, требуется выполнение дополнительного условия

$$(1.5) \quad \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \frac{\sigma'(\xi) d\xi}{\sqrt{R(\xi)}} = 0$$

доопределяющего положение концов дефекта. Анизотропия входит в выписанные выражения лишь через константу  $A$ .

Если на концах дефектов действуют силы сцепления или имеется зона пластической релаксации, их часто считают закрепленными, но занимающими такое положение, чтобы коэффициент при корневой особенности не превышал заданного числа (см. конец п. 3).

Легко проводится обобщение [9] формул (1.2) — (1.4) и т. д. на случай, когда в скоплении имеются участки с нулевой плотностью дислокаций (т. е. на случай нескольких скоплений в одной плоскости). Тогда в выражениях (1.2), (1.3) надо заменить интеграл на сумму  $s$  интегралов по участкам  $[\Delta_{k1}, \Delta_{k2}]$  ( $k = 1, 2, \dots, s$ ) с ненулевой функцией  $\rho(x)$ ; далее,  $R = R_1(x)R_2(x) \dots R_s(x)$ , где  $R_k(x)$  определяется, как ранее для  $k$ -го участка; вместо константы  $C$  надо подставить  $C_0 + C_1x + \dots + C_{q-1}x^{q-1}$ ; условие (1.4) заменяется на  $s$  условий (1.6), а условия (1.5) — на условия (1.7)

$$(1.6) \quad \int_{\Delta_{k1}}^{\Delta_{k2}} \rho(\xi) d\xi = N_k$$

$$(1.7) \quad \sum_{k=1}^s \int_{\Delta_{k1}}^{\Delta_{k2}} \frac{\xi^m \sigma(\xi) d\xi}{\sqrt{R(\xi)}} = 0$$

$$m = 0, 1, \dots, -q - 1$$

( $q$  равно разности  $s$  и числа свободных концов).

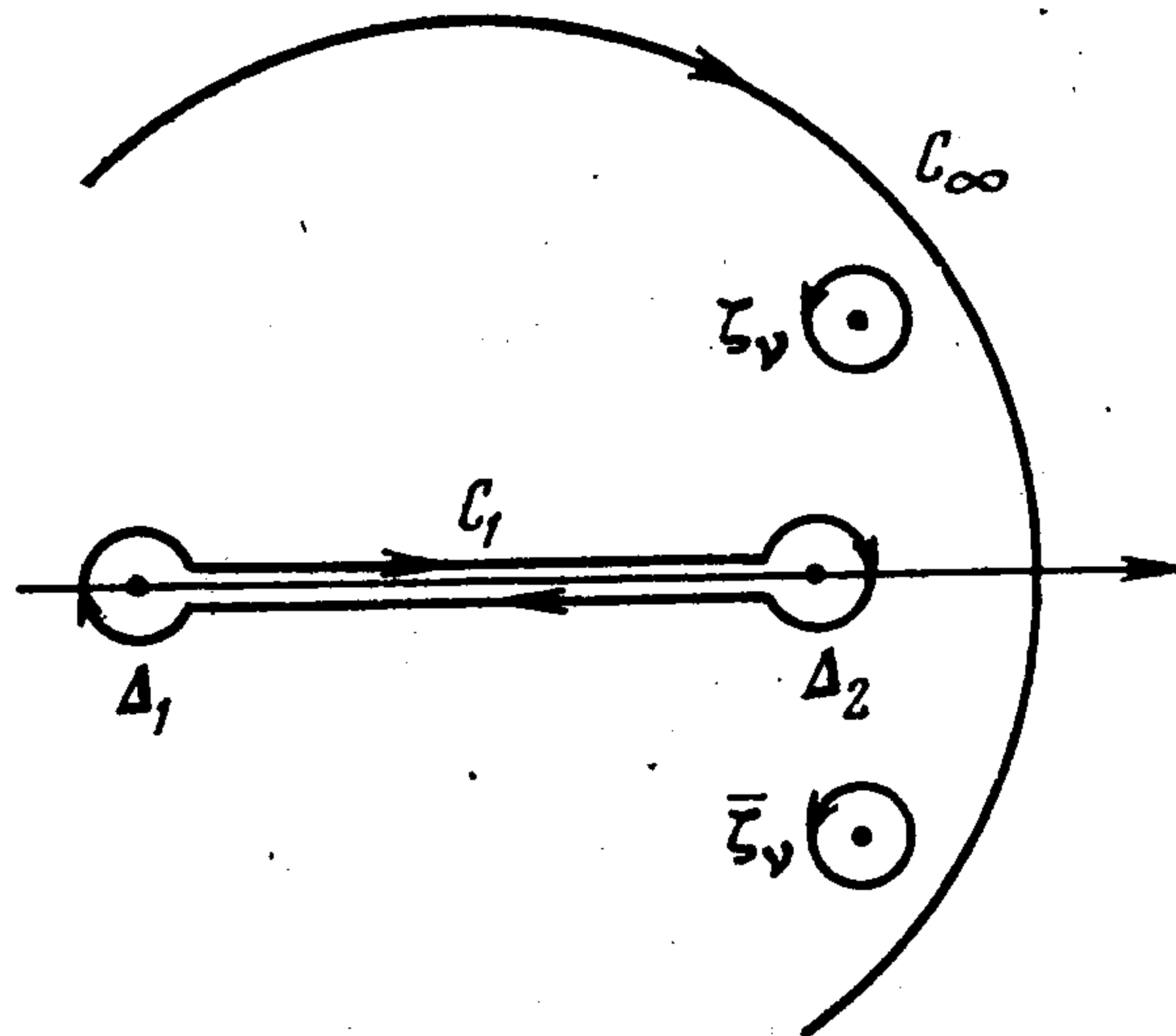
Поле напряжений возле скопления дается интегралом

$$\sigma_{kj}(x, y) = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \rho(\xi) \sigma_{kj}^{(d)}(\xi; x, y) d\xi$$

Преобразуем эту формулу при помощи аналитического продолжения функции  $\rho(x)$  с верхнего берега  $[\Delta_1, \Delta_2]$  на всю комплексную плоскость

$$(1.8) \quad \rho(\zeta) = \frac{1}{\pi i} [\Phi(\zeta) - \sigma(\zeta)], \quad \Phi(\zeta) = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \frac{\rho(\xi) d\xi}{\xi - \zeta}$$

Здесь  $\Phi(\zeta)$  — аналитическая вне разреза  $[\Delta_1, \Delta_2]$  в случае интегрируемости  $\rho(x)$  функция комплексного переменного  $\zeta$ , а  $\sigma(\zeta)$  — аналитическое продолжение  $\sigma(x)$ , являющееся мероморфным, если только  $\sigma(x)$ , определяемое формулой (1.2), — рацио-



Фиг. 1

нальная функция. Так как значения  $\Phi(\zeta)$  у берегов разреза удовлетворяют соотношениям Сохотского — Племеля, имеем в точках непрерывности  $\rho(x)$

$$\rho(x + i0) = \rho(x) = \overline{\rho(x - i0)}$$

Поэтому напряжения можно записать в виде суммы контурных интегралов (контур интегрирования изображен на фиг. 1)

$$\sigma_{kj}(x, y) = \sum_{v=1}^6 \frac{1}{2} Q_{kj}^{(v)} \oint \frac{\rho(\zeta) d\zeta}{\zeta_v - \zeta}$$

Подынтегральное выражение имеет вне контура лишь следующие особенности: полюс в точке  $\zeta_v = x + p_v y$  (которая не лежит на  $[\Delta_1, \Delta_2]$  ввиду  $\text{Im } p_v \neq 0$ ), особенности функции  $\sigma(\zeta)$  и, возможно, полюс на бесконечности. Поэтому искомое поле напряжений около скопления дается выражением

$$(1.9) \quad \sigma_{kj}(x, y) = \sum_{v=1}^6 Q_{kj}^{(v)} \left\{ -\pi i \rho(x + p_v y) + \sum_{(\sigma)} \text{Res} \left[ \frac{\sigma(\zeta)}{\zeta - x - p_v y} \right] \right\}$$

в котором второе суммирование берется по особенностям  $\sigma(\zeta)$  и бесконечно удаленной точке.

Условие возможности вычисления вычетов  $\sigma(\zeta)$  налагает ограничение на вид допустимой нагрузки. Наличие постоянного слагаемого на бесконечности у напряжений приводит к полюсу там  $\sigma(\zeta)/\zeta$  и появлению в правой части (1.9) разности  $\rho(\zeta_v) - \rho(\infty)$ . В случае нескольких скоплений в одной плоскости формула (1.9) остается в силе с учетом обсуждавшейся ранее модификации  $\rho(x)$ .

Подчеркнем необходимость выбора той ветви функции  $\rho(\zeta)$ , которая является продолжением  $\rho(x)$  с верхнего берега разреза  $[\Delta_1, \Delta_2]$ . Ряд выражений для  $\rho$  определяется функцией  $\sqrt{(\Delta_2 - \zeta)(\zeta - \Delta_1)}$ ; нужная ветвь этой функции на бесконечности стремится к  $-i\zeta$ .

Приведем выражения для  $\rho$  и  $\sigma_{kj}$  в наиболее часто встречающихся случаях. Для скопления  $N$  дислокаций, закрепленных в точках  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ , в поле  $\sigma_0 - \alpha x$  имеем

$$(1.10) \quad \rho(x) = \frac{8N + 4\sigma_0(2x - \Delta_1 - \Delta_2) - \alpha[8x^2 - 4x(\Delta_1 + \Delta_2) - (\Delta_2 - \Delta_1)^2]}{8\pi \sqrt{(\Delta_2 - x)(x - \Delta_1)}}$$

$$\sigma_{kj}(x, y) = \sum_{v=1}^6 Q_{kj}^{(v)} \{-\pi i \rho(\zeta_v) + \sigma_0 - \alpha \zeta_v\}$$

Из этих выражений, накладывая условия ограниченности  $\rho(x)$  на свободных концах и условие (1.5), получаем формулы для скопления, поджатого постоянным напряжением к стопору в  $\Delta_2$  ( $\alpha = 0$ ,  $\Delta_2 - \Delta_1 = 2N/\sigma_0$ )

$$(1.11) \quad \rho(x) = \frac{\sigma_0}{\pi} \sqrt{\frac{x - \Delta_1}{\Delta_2 - x}}$$

$$\sigma_{kj}(x, y) = \sum_{v=1}^6 Q_{kj}^{(v)} \{-\rho(\zeta_v) + \sigma_0\}$$

а также для свободного скопления в квадратичной потенциальной яме ( $\sigma_0 = 0$ ,  $\Delta_2 = -\Delta_1 = \Delta = \sqrt{2N/\alpha}$ )

$$(1.12) \quad \rho(x) = \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{\Delta^2 - x^2}, \quad \sigma_{kj}(x, y) = \sum_{v=1}^6 Q_{kj}^{(v)} (-i\alpha \sqrt{\Delta^2 - \zeta_v^2} - \alpha \zeta_v)$$

Некоторые другие примеры обсуждаются в п. 3.

Выражение (1.9) применимо для произвольных скоплений дислокаций, в частности двойникующих [10] или дислокаций превращения [11, 12], и, таким образом, им опреде-

ляются напряжения около тонких двойников или кристалликов мартенсита (существенно только, чтобы кристаллик был достаточно тонким и можно было пренебречь отличием упругой деформации кристаллика и матрицы в возникающем поле напряжений по сравнению с собственной деформацией превращения; при этом в рассмотрение входят лишь упругие модули матрицы).

2. Шелеподобная (вытянутая вдоль  $Oz$ ) трещина описывается [2,6] системой трех семейств дислокаций: 1) раскалывающих — с вектором Бюргера, перпендикулярным плоскости трещины (его удобно выбрать единичным  $b^{(2)} = n$ ); 2) винтовых сдвиговых (с вектором Бюргера, параллельным фронту трещины  $b^{(3)} = \tau$ ) и 3) краевых сдвиговых (вектор Бюргера в плоскости трещины и перпендикулярен фронту  $b^{(1)} = m$ ). В этом случае

$$(2.1) \quad \sigma_{kj}(x, y) = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\nu=1}^6 Q_{kj}^{(\alpha\nu)} \left\{ -\pi i \rho^{(\alpha)}(\xi_\nu) + \sum_{(\sigma)} \text{Res} \left[ \frac{\sigma^{(\alpha)}(\xi)}{\xi - \xi_\nu} \right] \right\}$$

суммирование по  $\alpha$  — по трем семействам дислокаций трещины).

Плотности дислокаций  $\rho^{(\alpha)}(x)$  на различных, вообще говоря, участках  $[\Delta_1^{(\alpha)}, \Delta_2^{(\alpha)}]$  даются решением следующей системы уравнений:

$$(2.2) \quad \sum_{\beta=1}^3 A^{(\alpha\beta)} \int_{\Delta_1^{(\beta)}}^{\Delta_2^{(\beta)}} \frac{\rho^{(\beta)}(\xi) d\xi}{\xi - x} = \tau^{(\alpha)}(x) \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

где

$$(2.3) \quad A^{(\alpha\beta)} = \sum_{\nu=1}^6 Q_{kj}^{(\beta\nu)} n_k b_j^{(\alpha)}$$

$$(2.4) \quad \tau^{(\alpha)} = \sigma_{kj} n_k b_j^{(\alpha)}$$

Положение концов интервалов находится из условий (1.4), (1.5) для каждого из семейств дислокаций. Скопления сдвиговых дислокаций могут выходить за пределы скопления раскалывающих, тогда они становятся скоплениями реальных дислокаций. В (2.2) предположено, что эти скопления лежат в плоскости трещины. Матрица  $A^{(\alpha\beta)}$  — неособая и имеет обратную  $(A^{-1})^{(\alpha\beta)}$ . Поэтому в случае закрепленных концов  $\Delta_1^{(\alpha)} = \Delta_1, \Delta_2^{(\alpha)} = \Delta_2$  решение (2.2) имеет вид

$$(2.5) \quad \rho^{(\alpha)}(x) = -\frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{(\Delta_2 - x)(x - \Delta_1)}} \times \\ \times \left\{ C^{(\alpha)} + \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \frac{\sigma^{(\alpha)}(\xi) \sqrt{(\Delta_2 - \xi)(\xi - \Delta_1)} d\xi}{\xi - x} \right\} \\ \sigma^{(\alpha)}(x) = \sum_{\beta=1}^3 (A^{-1})^{(\alpha\beta)} \tau^{(\beta)}(\xi)$$

( $\alpha = 1, 2, 3$ ;  $C^{(\alpha)}$  определяются из трех условий (1.4)).

В этом случае при  $C^{(\alpha)} = 0$  (что отвечает нулевому вектору Бюргера трещины) и при учете в правой части (2.1) лишь первого члена записанные выражения аналогичны формулам (102), (103) работы [1].

3. Рассмотрим важную задачу о взаимодействии скопления и линейного источника (являющегося одновременно дислокацией и линейной силой). Поле напряжений источника, проходящего через  $(x_0, y_0)$ , таково:

$$(3.1) \quad \sigma_{kj}^{(s)}(x, y) = \sum_{\nu=1}^6 \frac{U_{kj}^{(\nu)}}{\xi_\nu - \xi_{0\nu}}$$

Здесь  $\zeta_{0\nu} = x_0 + p_\nu y_0$ . Конкретное выражение для  $U_{kj}^{(\nu)}$  дает формула (П.8) приложения, полученная в работах [13, 14].

Плотность дислокаций в скоплении с закрепленными концами  $(-\Delta, 0)$ ,  $(\Delta, 0)$  определяется выражением

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta^2 - x^2}} \left\{ C - \frac{n_k b_j}{2\pi^2 A} \oint_{C_2} \sigma_{kj}^{(s)}(\zeta, 0) \frac{\sqrt{\Delta^2 - \zeta^2}}{\zeta - x} d\zeta \right\}$$

Интегрирование идет по контуру  $C_2$ , изображенному на фиг. 2. Интегралы легко вычисляются, и с использованием (1.4) получаем

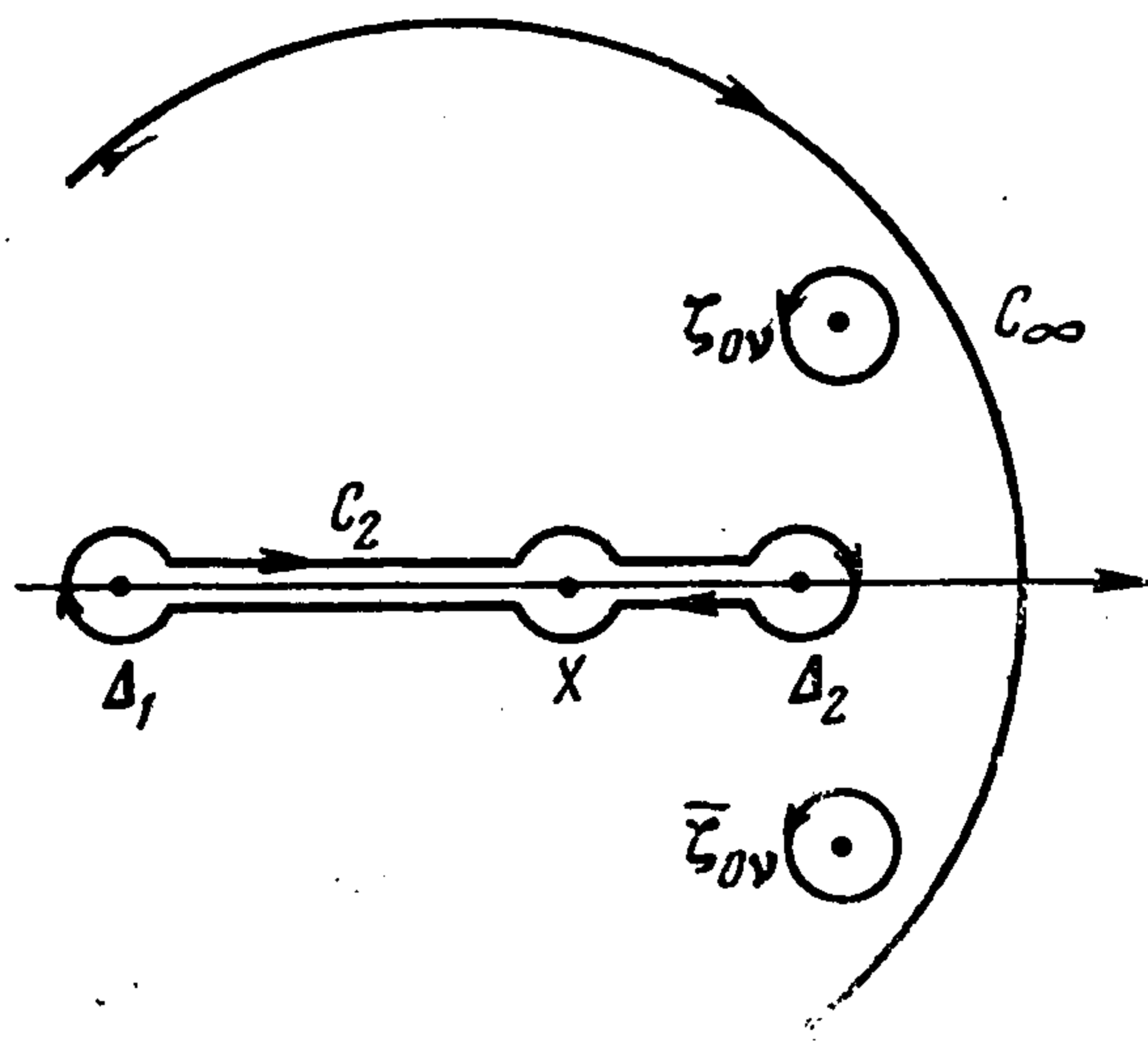
$$(3.2) \quad \rho(x) = \frac{NA + A_{12}}{\pi A \sqrt{\Delta^2 - x^2}} + \frac{1}{\pi i A} \sum_{\nu=1}^6 \frac{\omega_\nu \sqrt{\Delta^2 - \zeta_{0\nu}^2}}{(\zeta_{0\nu} - x) \sqrt{\Delta^2 - x^2}}$$

$$(3.3) \quad \omega_\nu = U_{kj}^{(\nu)} n_k b_j, \quad A_{12} = \sum_{\nu=1}^6 \omega_\nu$$

Поле напряжений скопления, согласно (1.9), есть в этом случае

$$(3.4) \quad \sigma_{kj}(x, y) = \sum_{\mu=1}^6 Q_{kj}^{(\mu)} \left\{ \frac{-i(NA + A_{12})}{A \sqrt{\Delta^2 - \zeta_\mu^2}} + \right. \\ \left. + \sum_{\nu=1}^6 \frac{\omega_\nu}{A(\zeta_{0\nu} - \zeta_\mu)} \left[ 1 - \frac{\sqrt{\Delta^2 - \zeta_{0\nu}^2}}{\sqrt{\Delta^2 - \zeta_\mu^2}} \right] \right\}$$

Выражения (3.2), (3.4) обобщают результаты работы [15], в которой рассматривалось взаимодействие запертой с двух сторон трещины при  $N_\alpha = 0$  и дислокации.



Фиг. 2

Видны следующие особенности напряжений (3.4): 1°. На больших расстояниях от скопления поле ведет себя, как поле  $N$ -кратной дислокации. 2°. Поле вблизи концов скопления в случае источника, близкого к скоплению, — это поле скопления  $N + A_{12}/A$  дислокаций. 3°. Дислокация испытывает действие сил изображения на скоплении, определяемых вторым членом (3.4) при  $x \rightarrow x_0$ ,  $y \rightarrow y_0$ . Например, при  $|p_\nu y_0| \ll \ll \min \{ (\Delta^2 - x_0^2)/(2x_0), \sqrt{\Delta^2 - x_0^2} \}$  поле изображения

$$(3.5) \quad \sigma_{kj}^{(i)} \approx \sum_{\mu, \nu=1}^6 \frac{[1 - \text{sign}(\text{Im } p_\nu) \text{sign}(\text{Im } p_\mu)] \omega_\nu Q_{kj}^{(\mu)}}{(p_\nu - p_\mu) A y_0}$$

Здесь учтено, что знаки корня с  $\text{Im } p_\nu y > 0$  и  $< 0$  противоположны, поэтому в изображении дают вклад все значения  $p_\nu$  с мнимой частью, противоположной по знаку  $p_\mu$ . 4°. Ненулевые компоненты напряжений при переходе с одной стороны скопления на другую испытывают скачок.

С помощью изложенного метода легко получаются выражения и для других реализаций скопления. Например, плотность дислокаций в скоплении со свободными концами, находящемся в квадратичной потенциальной яме в присутствии линейного источника, когда

$$\sigma(x) = -\alpha x + \sum_{\nu=1}^6 \frac{\omega_\nu}{A(x - \zeta_{0\nu})}$$

дается выражением

$$(3.6) \quad \rho(x) = \sqrt{(\Delta_2 - x)(x - \Delta_1)} \left\{ \frac{\alpha}{\pi} + \sum_{v=1}^6 \frac{i\omega_v}{\pi A (x - \zeta_{0v}) \sqrt{(\Delta_2 - \zeta_{0v})(\zeta_{0v} - \Delta_1)}} \right\}$$

Положение концов скопления находится из (1.4), (1.5), имеющих вид

$$(3.7) \quad \frac{\alpha(\Delta_2 - \Delta_1)^2}{8} - \sum_{v=1}^6 \left\{ \frac{\omega_v}{A} \left[ 1 + i \frac{2\zeta_{0v} - \Delta_1 - \Delta_2}{2\sqrt{(\Delta_2 - \zeta_{0v})(\zeta_{0v} - \Delta_1)}} \right] \right\} = N$$

$$(3.8) \quad \frac{(\Delta_2 - \Delta_1)\alpha}{2} - \sum_{v=1}^6 \frac{i\omega_v}{A \sqrt{(\Delta_2 - \zeta_{0v})(\zeta_{0v} - \Delta_1)}} = 0$$

Поле напряжений скопления, согласно (1.9), есть

$$(3.9) \quad \sigma_{kj} = \sum_{v=1}^6 Q_{kj}^{(v)} \alpha [\zeta_v - i \sqrt{(\Delta_2 - \zeta_v)(\zeta_v - \Delta_1)}] + \sum_{\mu, v=1}^6 \frac{\omega_\mu Q_{kj}^{(v)}}{A(\zeta_{0\mu} - \zeta_v)} \times \\ \times \left[ 1 - \frac{\sqrt{(\Delta_2 - \zeta_v)(\zeta_v - \Delta_1)}}{\sqrt{(\Delta_2 - \zeta_{0\mu})(\zeta_{0\mu} - \Delta_1)}} \right]$$

Особая ценность выражений для напряжений около дефектов со свободными концами заключается в том, что они фактически являются функциями Грина для ряда важных задач о форме и напряжениях дефектов типа скоплений. В самом деле, формулы (3.6), (3.9) линейно зависят от внешнего поля, поэтому при наличии распределенных полей, которые можно представить в виде суперпозиции источников, действие поля является суперпозицией воздействий источников. Таким образом, для скопления в поле

$$(3.10) \quad \sigma(x) = \sigma^{(r)}(x) + \sum_{v=1}^6 \iint_{\Omega} \frac{\omega_v(x_0, y_0)}{x - \zeta_{0v}} dx_0 dy_0$$

( $\sigma^{(r)}(x)$  — дробно-рационально,  $\Omega$  — область распределения источников с плотностью  $\omega_v$ ) имеем

$$(3.11) \quad \rho(x) = \sqrt{(\Delta_2 - x)(x - \Delta_1)} \left\{ -\frac{1}{\pi^2} \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \frac{\sigma^{(r)}(\xi) d\xi}{(\xi - x) \sqrt{(\Delta_2 - \xi)(\xi - \Delta_1)}} - \right. \\ \left. - \sum_{v=1}^6 \frac{i}{\pi A} \iint_{\Omega} \frac{\omega_\mu(x_0, y_0) dx_0 dy_0}{(\zeta_{0v} - x) \sqrt{(\Delta_2 - \zeta_{0v})(\zeta_{0v} - \Delta_1)}} \right\}$$

$$(3.12) \quad \sigma_{kj} = \sigma_{kj}^{(r)} + \sum_{\mu, v=1}^6 \frac{Q_{kj}^{(v)}}{A} \iint_{\Omega} \frac{\omega_\mu(x_0, y_0)}{\zeta_{0\mu} - \zeta_v} \left[ 1 - \frac{\sqrt{(\Delta_2 - \zeta_v)(\zeta_v - \Delta_1)}}{\sqrt{(\Delta_2 - \zeta_{0\mu})(\zeta_{0\mu} - \Delta_1)}} \right] dx_0 dy_0$$

Здесь  $\sigma_{kj}^{(r)}$  определяется по  $\sigma^{(r)}$ , согласно (1.9), а положение концов  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  определяется, как и ранее, из условий (1.4), (1.5).

Выписанные выражения предоставляют возможность исследования полей около трещин и других дефектов с учетом сил сцепления берегов, нелинейности среды и наличия зоны релаксации. Связывая силы сцепления с толщиной дефекта, нелинейность с величиной напряжений и задаваясь определенными моделями пластической зоны, с помощью (3.11), (3.12) можно записать нелинейные уравнения, точно (в рамках теории упругости) описывающие систему. Это, однако, выходит за рамки данной работы. Заметим, что для оценок нужно знание лишь некоторых интегральных характеристик, обсуждаемых далее. Заметим также, что в некоторых случаях  $\omega_v(x, y)$  можно находить из эксперимента.

Часто перечисленные эффекты наблюдаются вблизи концов дефектов в достаточно малой области. Рассмотрим, например,  $\rho$  и  $\sigma_{kj}$  вблизи конца  $\Delta_1$  в предположении  $\Delta_2 - \Delta_1 \gg |\zeta_v - \Delta_1| \gg |\zeta_{0v} - \Delta_1|$

$$(3.13) \quad \rho(x) \simeq \frac{M}{\sqrt{x - \Delta_1}}$$

$$(3.14) \quad \sigma_{kj}(x, y) \simeq -\pi i \sum_{v=1}^6 Q_{kj}^{(v)} \frac{M}{\sqrt{\zeta_v - \Delta_1}}$$

$$M = \sum_{v=1}^6 \frac{i}{\pi A} \iint_{\Omega} \frac{\omega_v(x_0, y_0)}{\sqrt{\zeta_{0v} - \Delta_1}} dx_0 dy_0$$

Особенности плотности и напряжений около конца такие же, как у закрепленного дефекта, однако коэффициенты при этих особенностях равны некоторым фиксированным значениям, выражающимся через  $M$ .

Так как трещина описывается тремя системами дислокаций, для нее необходимо введение трех коэффициентов

$$M^{(\alpha)} = \sum_{v=1}^6 \frac{i}{\pi} (A^{-1})^{(\alpha\beta)} \iint_{\Omega} \frac{\omega_v^{(\beta)}(x_0, y_0)}{\sqrt{\zeta_{0v} - \Delta_1}} dx_0 dy_0$$

в трех формулах типа (3.13) для  $\rho^{(\alpha)}$ , а напряжения даются формулой

$$\sigma_{kj}(x, y) \simeq -\pi i \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{v=1}^6 Q_{kj}^{(\alpha v)} \frac{M^{(\alpha)}}{\sqrt{\zeta_v - \Delta_1}}$$

Для определения работы распространения трещины в ее плоскости требуется знание лишь  $\sigma_{mj}n_j$  на этой плоскости, поэтому обычно интересуются лишь  $\sigma_{m2}(x, 0)$ , имеющими особенно простой вид

$$\sigma_{m2}(x, 0) \simeq K_m / \sqrt{\Delta_1 - x}$$

$$K_m = -i \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{v=1}^6 \iint_{\Omega} \frac{b_m^{(\alpha)} \omega_v^{(\alpha)}(x_0, y_0)}{\sqrt{\zeta_{0v} - \Delta_1}} dx_0 dy_0$$

Величины  $K_m$ , в которые формально не входит анизотропия, называются эффективными коэффициентами интенсивности напряжений. Константы  $M^{(\alpha)}$ , определяемые через них следующим образом:

$$M^{(\alpha)} = \sum_{\beta=1}^3 \frac{1}{\pi} (A^{-1})^{(\alpha\beta)} b_m^{(\beta)} K_m$$

более удобны для описания всей розетки напряжений.

4. При нахождении полей нескольких скоплений (по-прежнему параллельных  $Oz$ , но с различными плоскостями развития и дислокациями в них) можно воспользоваться суммой выражений (1.9) или (3.12) по дефектам. Таким образом, напряжения просто находятся, если можно найти плотности дислокаций в дефектах. Особенно просто записываются выражения для системы дефектов, расстояние между которыми много больше их размеров. В этом случае действие соседних скоплений на данное можно заменить в первом приближении действием сосредоточенных  $N_k$ -кратных дислокаций, а в следующих учесть дипольные и другие моменты дефектов.

5. В случае дискретного описания скоплений также оказывается возможной аналитическая запись выражений для напряжений. Действительно, если возможно построение полинома

$$(5.1) \quad f(x, t) = \prod_{\pi=1}^N (x - x_{\pi}(t))$$

корни которого  $x_\pi(t)$  задают положения дислокаций, в момент времени  $t$  имеем

$$\frac{f',x}{f} = \sum_{\pi=1}^N \frac{1}{|x - x_\pi|}$$

(штрих означает производную по  $x$ ). Поэтому для скопления

$$(5.2) \quad \sigma_{kj}(x, y) = \sum_{\nu=1}^6 Q_{kj}^{(\nu)} \frac{f'(x + p_\nu y)}{f(x + p_\nu y)}$$

Соответствующие полиномы найдены для ряда характерных полей напряжений при помощи метода Эшелби, Франка и Набарро как в случае равновесных [16, 17], так и для движущихся с дозвуковыми скоростями [18-20] скоплений. Формула (5.2) дает в обоих случаях выражение для напряжений.

*Приложение. Некоторые формулы шестимерной теории.* Приведем сводку обозначений и некоторых результатов шестимерной теории [1, 13, 14] для дислокаций — линейных сил (линейных источников).

Введем следующие обозначения  $3 \times 3$  матриц:

$$(П.1) \quad (a, b)_{jk} = a_l c_{l j k m} b_m$$

Здесь  $c_{l j k m} = c_{j l k m} = c_{k m l j}$  — матрица упругих модулей;  $a, b$  — векторы, выбираемые из правой тройки ортов  $\{m, n, \tau\}$ , связанной с источником следующим образом (ср. п. 3):  $n$  — одна из нормалей к источнику (в данном случае являющаяся нормалью к скоплению),  $\tau$  параллельно источнику,  $m$  — вторая нормаль к источнику.

Поля напряжений и смещений около линейных источников определяются через собственные векторы и собственные значения следующей задачи на собственные значения в шестимерном пространстве (над полем комплексных чисел):

$$(П.2) \quad (N - p_\nu I) \xi^{(\nu)} = 0$$

где  $I$  — единичный оператор, а  $N$  образуется из матриц (П.1) следующим образом:

$$(П.3) \quad N = - \begin{vmatrix} (n, n)^{-1} (n, m) & (n, n)^{-1} \\ (m, n) (n, n)^{-1} (n, m) & (m, n) (n, n)^{-1} \end{vmatrix}$$

Отсюда собственные значения  $p_\nu$  — решения алгебраического уравнения шестой степени

$$(П.4) \quad \text{Det}(N - pI) = 0$$

а собственные векторы  $\xi^{(\nu)}$  при отсутствии вырождения пропорциональны,

$$(П.5) \quad \xi_j^{(\nu)} = \frac{C^{(\nu)} \{Adj(N - pI)\}_{j1}}{(\partial/\partial p) \text{Det}(N - pI)} \Big|_{p=p_\nu}$$

Здесь  $\{Adj N\}_{jk}$  — алгебраическое дополнение элемента  $N_{jk}$  матрицы  $N$ , а  $C^{(\nu)}$  — произвольные множители.

Если соотнести первые три компоненты  $\xi^{(\nu)}$  комплекснозначному трехмерному вектору  $A^{(\nu)}$ , а остальные — вектору  $L^{(\nu)}$ , так что

$$(П.6) \quad \xi^{(\nu)} = \begin{vmatrix} A^{(\nu)} \\ L^{(\nu)} \end{vmatrix}$$

и определить константы  $C^{(\nu)}$  из условий нормировки

$$(П.7) \quad A^{(\nu)} L^{(\mu)} + A^{(\mu)} L^{(\nu)} = \delta_{\mu\nu}$$

то для напряжений в точке  $r$ , обусловленных источником (являющимся дислокацией с вектором Бюргерса  $b$  и одновременно линейной силой мощности  $f$ ), проходящим через

точку  $r_0$ , имеем выражение

$$(П.8) \quad \sigma_{kj}(r_0, r) = \sum_{\nu=1}^6 \frac{\text{sign}(\text{Im } p_\nu) c_{kjst} A_s^{(\nu)} (L_t^{(\nu)} b_l + A_t^{(\nu)} f_l) (m_t + p_\nu n_t)}{2\pi i \{m(r - r_0) + p_\nu n(r - r_0)\}}$$

конкретизирующее формулы (1.1), (3.1).

Вспоминая выражение (2.3) для  $A^{(\alpha\beta)}$ , имеем

$$(П.9) \quad A^{(\alpha\beta)} = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^6 \text{sign}(\text{Im } p_\nu) L_s^{(\nu)} L_t^{(\nu)} b_s^{(\alpha)} b_t^{(\beta)} = 2B_{st} b_s^{(\alpha)} b_t^{(\beta)}$$

где  $B_{st}$  — неособая матрица предлогарифмических коэффициентов в выражении для энергии единичной дислокации. Поэтому ввиду некомпланарности  $b^{(\alpha)}$  матрица  $A^{(\alpha\beta)}$  также неособая.

Автор приносит благодарность В. Л. Инденбому, М. А. Соловьеву, Д. Е. Темкину и А. Г. Хачатуряну за обсуждение работы.

Поступила 18 III 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Stroh A. N. Dislocations and cracks in anisotropic elasticity. *Philos. Mag.*, 1958, vol. 3, No. 30.
2. Barnett D. M., Asaro R. J. The fracture mechanics of slit-like cracks in anisotropic elastic media. *J. Mech. and Phys. Solids*, 1972, vol. 20, No. 6.
3. Chou Y. T., Li J. C. M. Theory of dislocation pile-ups. In: *The mathematical theory of dislocations*. N. Y., Amer. Soc. Mech. Engng, 1969.
4. Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П. О равновесии и распространении трещин в анизотропной среде. *ПММ*, 1961, т. 25, вып. 1.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости, М., «Наука», 1965.
6. Булби Б., Эшелби Дж. Дислокации и теория разрушения. В кн.: *Разрушение*, т. 1. М., «Мир», 1973.
7. Head A. K., Wood W. W. Dislocation group dynamics. *Y. Equilibrium Revisited*. *Philos. Mag.*, 1973, vol. 27, No. 3.
8. Хирт Дж., Лоте И. Теория дислокаций. М., Атомиздат, 1972.
9. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
10. Косевич А. М., Бойко В. С. Дислокационная теория упругого двойникования кристаллов. *Успехи физ. наук*, 1971, т. 104, вып. 2.
11. Christian J. W. *The theory of transformations in metals and alloys*. Oxford a. o., Pergamon Press, 1965.
12. Соловьев В. А. К дислокационной теории мартенситных (бездиффузионных) превращений. *Физика твердого тела*, 1973, т. 15, вып. 6.
13. Barnett D. M., Lothe J. Synthesis of the sextic and the integral formalism for dislocations, Green's functions and surface waves in anisotropic elastic solids. *Physica Norvegica*, 1973, vol. 2, No. 4.
14. Malen K. A unified six-dimensional treatment of elastic Green's functions and dislocations. *Phys. Status Sol.*, 1971, vol. 44B, No. 2.
15. Atkinson C. The interaction between a dislocation and a crack. *Internat. J. Fracture Mech.*, 1966, vol. 2, No. 4.
16. Эшелби Дж., Франк Ф., Набарро Ф. Равновесие линейных рядов дислокаций. В кн.: *Континуальная теория дислокаций*, М., Изд-во иностр. лит., 1963.
17. Хед А. К., Томсон П. Ф. По поводу метода расчета равновесных положений дислокаций, разработанного Эшелби, Франком и Набарро. В кн.: *Континуальная теория дислокации*, М., Изд-во иностр. лит., 1963.
18. Соловьев В. А. О кинетике изменения плоских скоплений дислокаций. *Физ. металлов и металловедение*, 1972, т. 33, вып. 4.
19. Соловьев В. А. Малые колебания плоских скоплений дислокаций. *Физ. металлов и металловедение*, 1972, т. 34, вып. 4.
20. Head A. K. Dislocation group dynamics. I. Similarity solutions of the  $n$ -body problem. *Philos. Mag.*, 1972, vol. 26, No. 1.