

Равенства (6) и (7) являются следствием приближения одного полинома разложения (1), которое дает ту или иную точность для различных моделей молекулярного взаимодействия (для максвелловских молекул это выражение точное). Уместно отметить, что приложения метода полупространственных разложений, предложенного в [5], а затем развитого в кинетической теории газов в работе [6], не выходят за рамки приближения одного полинома (в более высоких приближениях метод сильно усложняется, и автору неизвестны публикации таких работ). Поэтому при решении граничных задач методом работы [6] несоблюдение равенств (6), (7) следует считать превышением точности (см. в связи с этим работы [2, 3], а также [7, 8]).

Таким образом, значения некоторых моментов интеграла столкновений Больцмана (в линеаризованной форме) могут быть установлены без прямого, довольно громоздкого расчета. Эти значения оказываются точными для максвелловских молекул. Для других моделей их точность ограничивается рамками приближения одного полинома в разложении по методу Чепмена — Энскога. Следует подчеркнуть, что применяемые в многочисленных публикациях более точные значения моментов в ряде случаев могут приводить (и приводят) к предсказанию реально не существующих эффектов, являющихся, как правило, следствием простого превышения точности теории. Изложенная в данной работе схема удовлетворяет обязательному физическому требованию [2]: при решении граничных задач кинетической теории обеспечивается правильный предельный переход в объем газа вдали от стенок.

Поступила 28 II 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Uhlenbeck G. E., Wang Chang C. S. Transport phenomena in very dilute gases. Univ. Michigan, 1949.
2. Баканов С. П., Дерягин Б. В. К вопросу о состоянии газа, движущегося вблизи твердой поверхности. Докл. АН СССР, 1961, т. 139, № 1.
3. Баканов С. П., Маркеев Б. М. К вопросу о состоянии газа, движущегося вблизи поверхности. Ж. техн. физ., 1974, т. 44, вып. 10.
4. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
5. Kourganoff V., Busbridge W. Basic methods in transfer problems. Oxford, Clarendon Press, 1952.
6. Gross E. P., Jackson E. A., Ziering S. Boundary problems in kinetic theory of gases. Ann. Phys., 1957, vol. 1, No. 2.
7. Ziering S. Flow of a gas near a solid surface. Flow of a gas near a solid surface. AIAA Journal, 1963, vol. 1, No. 3.
8. Cercignani C. Shear flow for gas molecules interacting with an arbitrary central force. Nuovo Cimento, 1963, vol. 27, No. 5.

УДК 629.7.015.3 : 533.6.13.42

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

С. М. Белоцерковский

(Москва)

Излагаются основные положения, на которых базируется расчетная система для определения аэродинамических характеристик летательного аппарата на ЦВМ. Дается описание и обоснование схематизации аппарата с помощью системы плоских базовых элементов. Общая линейная нестационарная задача аэродинамики и гидродинамики сводится к совокупности канонических ϵ -задач, формально решаемых независимо.

Устанавливается ряд общих свойств линейных характеристик (нагрузок, нормальных сил, моментов). Выводятся интегральные соотношения типа свертки, которые дают явные выражения этих характеристик через соответствующие переходные функции и законы изменения кинематических параметров во времени ε_j (τ). Доказывается ряд общих теорем, в том числе даются обобщения теоремы обратимости [и ее следствий]. Устанавливаются [точные выражения для переходных функций в начальный момент времени.

1. Общая линейная нестационарная задача. Рассмотрим неустановившееся движение и деформации летательного аппарата в неспокойной сплошной среде. Свяжем с ним стандартную декартову систему координат, направив Ox вперед по оси аппарата, Oz — вправо по размаху крыла (фигура). Пусть U_0 — средняя скорость подвижного начала O , W , W^* , W_Δ , W_δ — векторы скоростей: возмущенной аппаратом, переносной, порывов среды и деформаций поверхности тела. Обозначим вектор абсолютной угловой скорости Ω , t — время ($t=0$ — начало нестационарных процессов). Введем безразмерные величины (b — характерный линейный размер)

$$\xi = \frac{x}{b}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \zeta = \frac{z}{b}, \quad \tau = \frac{u_0 t}{b}$$

$$\omega_{x, y, z}(\tau) = \frac{b\Omega_{x, y, z}}{U_0}$$

$$w_{x, y, z\Delta}(\xi, \eta, \zeta, \tau) = \frac{W_{x, y, z\Delta}}{U_0}$$

Пусть uU_0 — переменная часть скорости начала O , α и β — углы атаки и скольжения. Тогда для любой точки на поверхности летательного аппарата имеем выражения для проекций переносной скорости

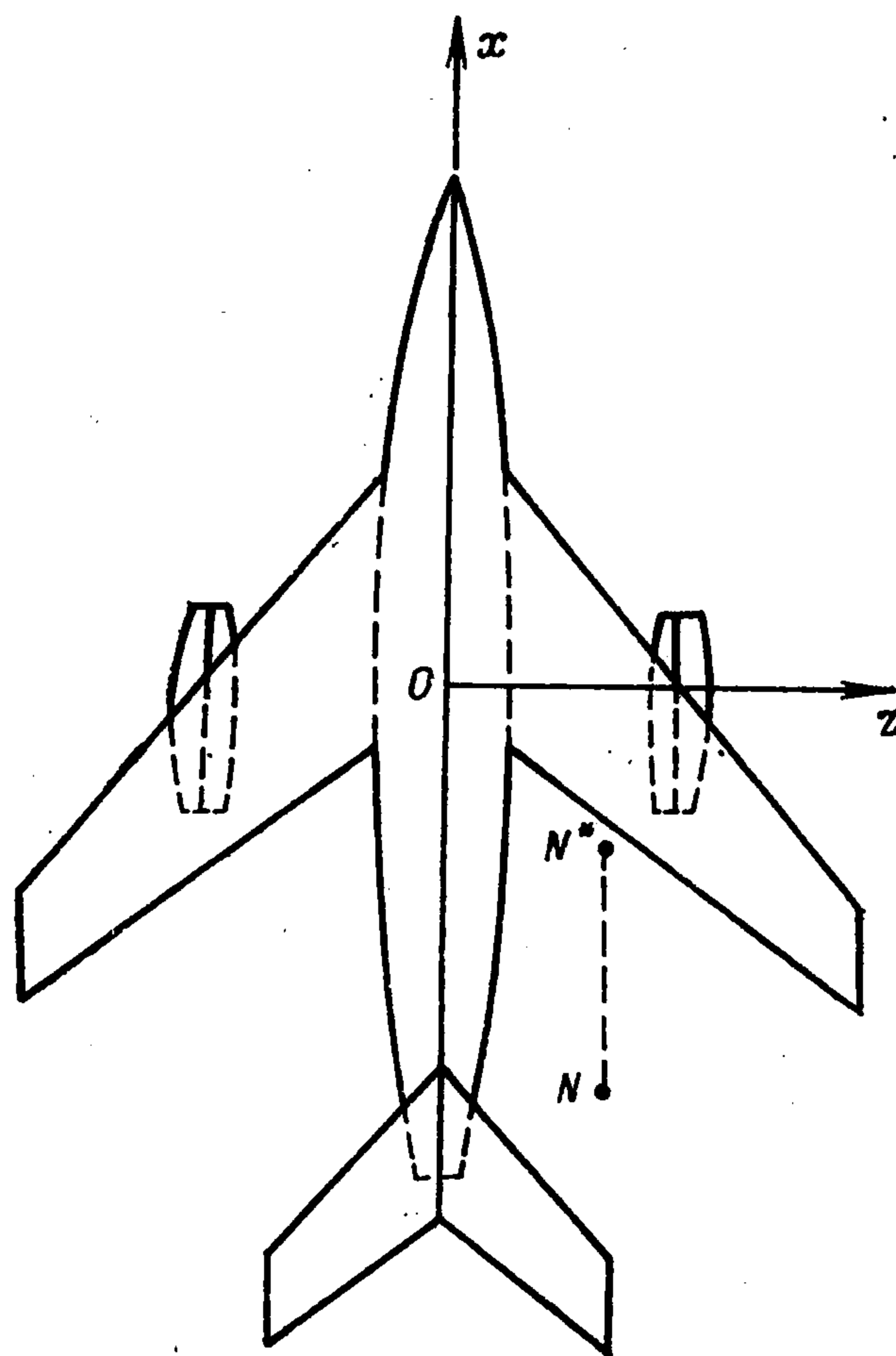
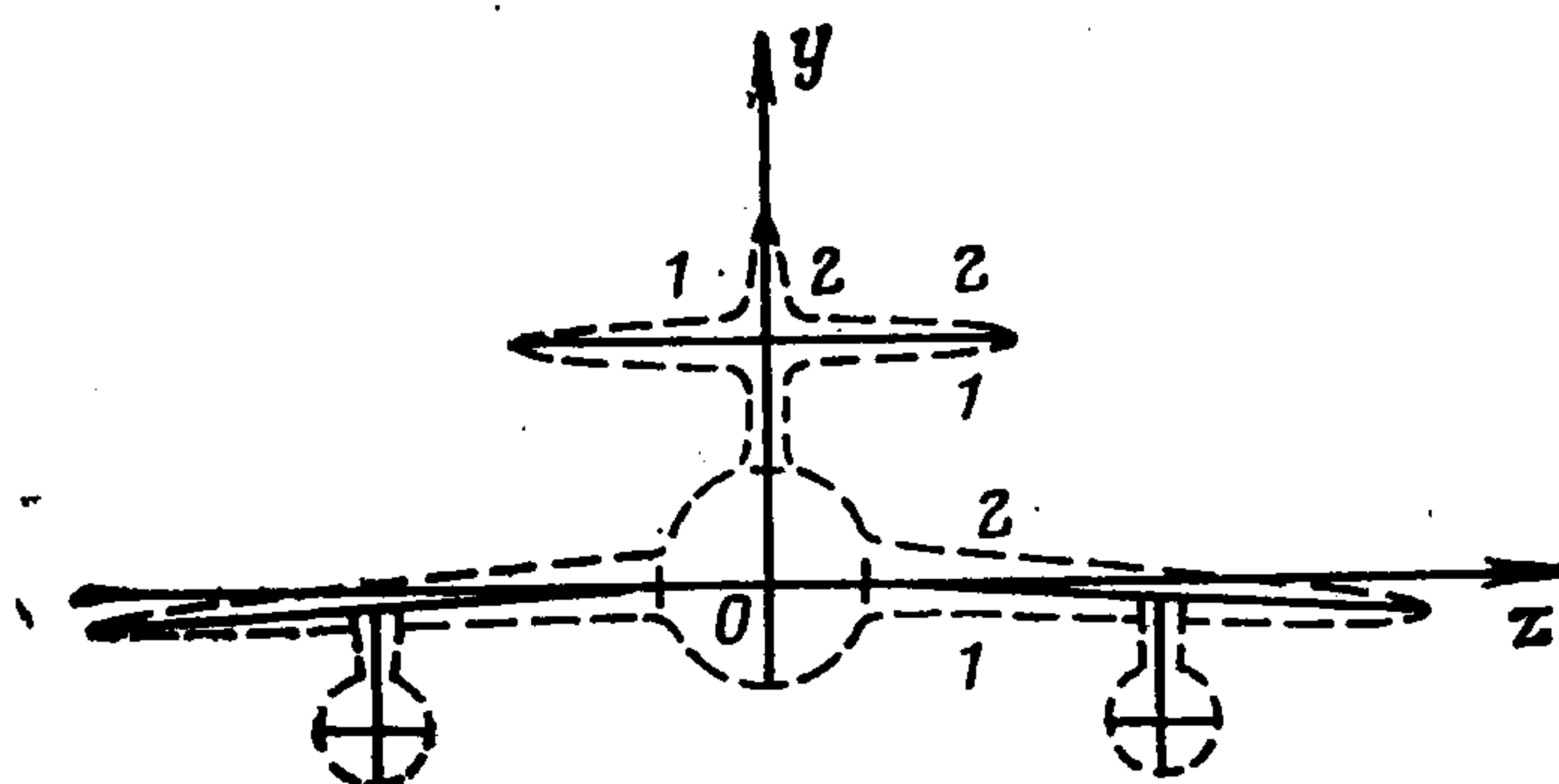
$$\begin{aligned} \frac{W_{x^*}}{U_0} &= (1+u) \cos \alpha \cos \beta + \omega_y \zeta - \omega_z \eta, & \frac{W_{y^*}}{U_0} &= -(1+u) \sin \alpha \cos \beta - \\ &- \omega_x \zeta + \omega_z \xi, & \frac{W_{z^*}}{U_0} &= (1+u) \sin \beta - \omega_x \eta - \omega_y \xi \end{aligned}$$

Движения летательного аппарата, деформации его поверхности, скорости порывов среды считаются известными. Требуется найти возмущенные значения параметров газа, в первую очередь аэродинамические нагрузки. Обычно их можно определять, считая среду идеальной. На поверхности тела имеет место условие непротекания. Если n — единичный вектор внешней нормали к поверхности тела, то это требование имеет вид

$$(1.1) \quad W_n / U_0 = W_n^* / U_0 + W_{\delta n} / U_0 - W_{\Delta n} / U_0$$

Кроме того, должны выполняться условия на бесконечности, поверхностях разрыва, свободной пелене, границах раздела и гипотеза Чаплыгина — Жуковского.

Далее изучается общая нестационарная линейная задача, в которой возмущения, вызванные телом, считаются малыми по сравнению с невозмущенными значениями па-



раметров среды. Обтекание аппарата удобно строить с помощью газодинамических особенностей, удовлетворяющих уравнению неразрывности вне тела и располагаемых на базовых плоскостях. Последние выбираются таким образом, чтобы соответствующая часть поверхности аппарата была близка к ним. На фигуре приведен основной вариант схематизации летательного аппарата. Базовые плоские элементы, которые можно брать параллельными оси Ox , изображены сплошными линиями. Возможны и модификации данной схемы. Например, для изучения деталей течения вблизи стыка крыло — фюзеляж здесь нужно вводить дополнительные базовые плоскости. Уравнение плоского базового элемента i запишем в виде

$$a_i + \eta \cos (ny)_0^i + \zeta \cos (nz)_0^i = 0$$

По условию линеаризации имеем из (1.1) на поверхности тела

$$|W_n^*/U_0| \ll 1, \quad |W_{\delta n}/U_0| \ll 1, \quad |W_{\Delta n}/U_0| \ll 1$$

откуда получаем наиболее важный случай

$$|\cos (nx)| \ll 1, \quad \left| \frac{W_{y,z}^*}{U_0} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{W_{x,y,z\delta}}{U_0} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{W_{x,y,z\Delta}}{U_0} \right| \ll 1$$

Пусть 1 и 2 — разные стороны каждого базового элемента, причем положительная нормаль n_0^i идет от стороны 1 к 2. Уравнения частей аппарата i и деформации их (включая отклонения рулевых поверхностей) запишем в виде

$$(1.2) \quad \frac{(\Delta n_0^i)_{1,2}}{b} = \sum_v \delta_v^i(\tau) f_{\delta_v^i, 1,2}^i(\xi, \eta, \zeta)$$

Толщина частей аппарата характеризуется суммой деформаций на разных сторонах от базовой плоскости, а кривизна — полуразностью. Введем функции толщины и кривизны аппарата

$$f_{\delta_v^i}^{*i} = f_{\delta_v^i, 1}^i + f_{\delta_v^i, 2}^i, \quad 2f_{\delta_v^i}^i = f_{\delta_v^i, 2}^i - f_{\delta_v^i, 1}^i$$

Безразмерные скорости порыва запишем в аналогичной форме

$$(1.3) \quad w_{x,y,z\Delta} = \sum_k \Delta_{x,y,z}^k(\tau) w_{x,y,z\Delta}^k(\xi, \eta, \zeta)$$

В линейных задачах поле скоростей, возмущенное телом, можно считать потенциальным. С принятой точностью скачки будут совпадать с линиями Маха, положения которых относительно тела неизменны. Вихревой след, сбегаящий с поверхности летательного аппарата, можно располагать в плоскостях соответствующих базовых элементов. Граничные условия при этом сносятся на ближайшую сторону базовой плоскости. Все это позволяет общую задачу свести к ряду частных, канонических, решаемых независимо одна от другой.

Обозначим через $\epsilon_j, j = 1, 2, 3, \dots$ совокупность основных безразмерных кинематических параметров, характеризующих движение и деформации тела и порывы среды. Пусть ϵ_j^* — их характерные значения, тогда безразмерный потенциал и аэродинамическую нагрузку на элементе i можно представить в виде

$$(1.4) \quad \varphi(\xi, \eta, \zeta, \tau) = \sum_j \epsilon_j^* \varphi_{\epsilon_j}(\xi, \eta, \zeta, \tau), \quad \Delta p^i = p_1^i - p_2^i$$

$$\Delta p^i(\xi, \eta, \zeta, \tau) = \sum_j \epsilon_j^* \Delta p_{\epsilon_j}^i(\xi, \eta, \zeta, \tau), \quad \Delta p_{\epsilon_j}^i = p_{\epsilon_j, 1}^i - p_{\epsilon_j, 2}^i$$

Здесь φ_{ϵ_j} и $\Delta p_{\epsilon_j}^i$ — решения частной задачи, в которой все кинематические параметры, кроме ϵ_j , равны нулю. Каждая функция φ_{ϵ_j} удовлетворяет тому же уравнению

вне тела, что и φ (a_0 — скорость звука в невозмущенном газе)

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \varphi_{\varepsilon_j}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{\varepsilon_j}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{\varepsilon_j}}{\partial \zeta^2} + 2M \frac{\partial^2 \varphi_{\varepsilon_j}}{\partial \xi \partial \tau} - M^2 \frac{\partial^2 \varphi_{\varepsilon_j}}{\partial \tau^2} = 0, \quad M = \frac{U_0}{a_0}$$

Условия на вихревой пелене удобнее всего записать в виде [1]

$$\Delta \varphi_{\varepsilon_j}(\xi, \eta, \zeta, \tau) = \Delta \varphi_{\varepsilon_j}(\xi^*, \eta, \zeta, \tau^*), \quad \Delta \varphi_{\varepsilon_j} = \varphi_{\varepsilon_j 1} - \varphi_{\varepsilon_j 2}, \quad \tau^* = \tau - (\xi^* - \xi)$$

Оно связывает разность потенциалов на противоположных сторонах вихревой пелены в двух точках: сразу за базовой плоскостью $N^*(\xi^*, \eta, \zeta)$ и в любой точке $N(\xi, \eta, \zeta)$ вниз по течению, имеющей те же значения η и ξ (фигура).

Чтобы обеспечить условие Чаплыгина — Жуковского на задних кромках базовых плоскостей, нужно потребовать непрерывность в их окрестности скоростей $\partial \varphi_{\varepsilon_j} / \partial \xi$, $\partial \varphi_{\varepsilon_j} / \partial \eta$, $\partial \varphi_{\varepsilon_j} / \partial \zeta$. При $M > 1$ и дозвуковых задних кромках достаточно, чтобы были непрерывны сами функции φ_{ε_j} [1].

Безразмерные нагрузки определяются с помощью интеграла Коши — Лагранжа, который в линеаризованном виде записывается

$$\Delta p_{\varepsilon_j}^i = 2 (\partial \Delta \varphi_{\varepsilon_j} / \partial \xi - \partial \Delta \varphi_{\varepsilon_j} / \partial \tau)_i$$

Условия на бесконечности сводятся к требованию обращения в нуль возмущенных телом скоростей и давлений, а также функций φ_{ε_j} далеко перед телом (при $M > 1$ — вне области влияния).

Граничные условия в любой точке (ξ, η, ζ) , принадлежащей базовому элементу, можно представить в виде

$$(1.5) \quad \frac{\partial \varphi_{\varepsilon_j}}{\partial n_0^i} = \frac{\varepsilon_j(\tau)}{\varepsilon_j^*} F_{\varepsilon_j}^i(\xi, \eta, \zeta), \quad \frac{\partial \varphi_{\varepsilon_j}}{\partial n_0^i} = \frac{\partial \varphi_{\varepsilon_j}}{\partial \eta} \cos^2(ny)_0^i + \frac{\partial \varphi_{\varepsilon_j}}{\partial \zeta} \cos(nz)_0^i$$

Здесь $F_{\varepsilon_j}^i(\xi, \eta, \zeta)$ — известные функции, выражающиеся через геометрические параметры аппарата и заданные функции, входящие в (1.2) и (1.3)

$$F_u^i = 0, \quad F_\alpha^i = \cos(ny)_0^i, \quad F_\beta^i = \cos(nz)_0^i, \quad F_{\omega_x}^i = \eta \cos(nz)_0^i - \zeta \cos(ny)_0^i, \quad F_{\omega_y}^i = -\xi \cos(nz)_0^i$$

$$F_{\omega_z}^i = \xi \cos(ny)_0^i, \quad F_{\Delta_x}^i = 0, \quad F_{\Delta_y}^i = -w_{y\Delta}^k \cos(ny)_0^i, \quad F_{\Delta_z}^i = -w_{z\Delta}^k \cos(nz)_0^i \dots$$

В граничное условие (1.1) входят скорости деформаций, поэтому совокупность основных кинематических параметров ε_j включает в себя и производные по τ $\delta_{\nu}^i(\tau)$

$$\varepsilon_j(\tau) \in \{\alpha(\tau), \beta(\tau), \omega_{x,y,z}(\tau), \Delta_y^k(\tau), \Delta_z^k(\tau), \delta_{\nu}^i(\tau), \delta_{\nu}^i(\tau)\}$$

Условия линеаризации задачи имеют вид

$$|\cos(n\alpha)| \ll 1, \quad |\varepsilon_j(\tau)| \ll 1, \quad |u(\tau)| \ll 1$$

2. Интегральные представления. Рассмотрим более частную каноническую задачу для так называемой переходной функции потенциала $[\varphi_{\varepsilon_j}(\xi, \eta, \zeta, \tau)]$. Условия определения ее от указанных выше отличаются только иной зависимостью граничного условия от времени

$$(2.1) \quad \frac{\partial [\varphi_{\varepsilon_j}]}{\partial n_0^i} = 1(\tau) F_{\varepsilon_j}^i(\xi, \eta, \zeta), \quad 1(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0 \\ 1, & \tau \geq 0 \end{cases}$$

Введем в рассмотрение нестационарную часть переходной функции, выделив предельное значение при $\tau \rightarrow \infty$. Для аэродинамической нагрузки, например, положим

$$(2.2) \quad I_{p_i}^{\varepsilon_j}(\xi, \eta, \zeta, \tau) = [\Delta p_{\varepsilon_j}^i(\xi, \eta, \zeta, \tau)] - \Delta p_i^{\varepsilon_j}(\xi, \eta, \zeta)$$

где $\Delta p_i^{\varepsilon_j}(\xi, \eta, \zeta)$ — стационарная аэродинамическая производная.

С помощью интеграла Дюамеля аналогично тому, как это было сделано для крыла [1], нетрудно получить общее интегральное соотношение для нагрузки. Пусть кинематический параметр $\varepsilon_j(\tau) = 0$ при $\tau < 0$, при $\tau = 0$ скачком принимает значение $\varepsilon_j(0)$, а далее изменяется непрерывно, тогда

$$(2.3) \quad \Delta p_{\varepsilon_j}^i(\xi, \eta, \zeta, \tau) = \Delta p_i^{\varepsilon_j}(\xi, \eta, \zeta) \varepsilon_j(\tau) + I_{p_i}^{\varepsilon_j}(\xi, \eta, \zeta, \tau) \varepsilon_j(0) + \\ + \mu \Delta^* p_i^{\varepsilon_j}(\xi, \eta, \zeta) \varepsilon_j'(\tau) + \int_0^\tau \varepsilon_j'(\tau - \tau_1) I_{p_i}^{\varepsilon_j}(\xi, \eta, \zeta, \tau_1) d\tau_1, \quad \mu = \begin{cases} 0, & M > 0 \\ 1, & M = 0 \end{cases}$$

Первое слагаемое в правой части (2.3) дает математическое выражение гипотезы стационарности. Второй член представляет собою поправку, вызванную нестационарностью обтекания. Интеграл в правой части (2.3) вместе с предпоследним членом дает явное выражение влияния нестационарности обтекания при непрерывном изменении кинематического параметра. В сжимаемой среде ($M > 0$), когда скорость распространения возмущений конечна, третье слагаемое равно нулю. В несжимаемой жидкости ($M = 0$) скорость звука равна бесконечности, и изменение $\varepsilon_j(\tau)$ сопровождается возникновением импульсов типа дельта-функции. Третий член появился в результате выделения указанной особенности в подынтегральном выражении. Величина нагрузки $\Delta^* p_{\varepsilon_j}$ получается из решения ε_j -задачи при бесциркуляционном обтекании летательного аппарата.

Интегральные представления, аналогичные (2.3), справедливы и для других линейных аэродинамических характеристик. Формулы (2.3) вместе с (1.4) дают явные выражения указанных характеристик от всей предыстории обтекания (от законов изменения кинематических параметров во времени). Для приложений в динамике полета, аэроавтоупругости и т. д. важно, что при определении функций $\Delta p_i^{\varepsilon_j}$, $\Delta^* p_i^{\varepsilon_j}$, $I_{p_i}^{\varepsilon_j}$ и подобных им не нужно знать законы $\varepsilon_j(\tau)$ [2,3].

Пусть кинематические параметры меняются по гармоническому закону $\varepsilon_j(\tau) = \varepsilon_j^* \cos(p_j^* \tau + \theta_j)$. Тогда нагрузки и другие линейные характеристики выражаются через аэродинамические производные, не зависящие от времени

$$\Delta p_i(\xi, \eta, \zeta, \tau) = \sum_j \{ \Delta p_i^{\varepsilon_j}(\xi, \eta, \zeta, p_j^*) \varepsilon_j(\tau) + \Delta p_i^{\varepsilon_j'}(\xi, \eta, \zeta, p_j^*) \varepsilon_j'(\tau) \}$$

Интегральные представления в данном случае преобразуются к виду

$$(2.4) \quad \Delta p_i^{\varepsilon_j}(\xi, \eta, \zeta, p_j^*) = \Delta p_i^{\varepsilon_j}(\xi, \eta, \zeta) + p_j^* \int_0^{\tau_j^*} I_{p_i}^{\varepsilon_j}(\xi, \eta, \zeta, \tau) \sin p_j^* \tau d\tau \\ \Delta p_i^{\varepsilon_j'}(\xi, \eta, \zeta, p_j^*) = \mu \Delta^* p_i^{\varepsilon_j'}(\xi, \eta, \zeta) + \int_0^{\tau_j^*} I_{p_i}^{\varepsilon_j'}(\xi, \eta, \zeta, \tau) \cos p_j^* \tau d\tau \\ I_{p_i}^{\varepsilon_j}(\xi, \eta, \zeta, \tau) = 0, \quad \tau > \tau_j^*$$

При дозвуковых скоростях, когда переходный процесс носит асимптотический характер, $\tau_j^* = \infty$.

Приведенные соотношения позволяют строго замкнуть линейные уравнения динамики полета и аэроавтоупругости [2,3] и существенно сократить объем расчетных и экспериментальных исследований по аэродинамике [1].

3. Точные решения. Рассмотрим ступенчатое изменение граничного условия по времени (2.1). В начальный момент переходного процесса ($\tau > 0$, $\tau \rightarrow 0$) возмущения в сжимаемой среде не успевают распространиться, и каждый элемент поверхности летательного аппарата создает их независимо от других. Таким образом, все предположения, на которых основана поршневая теория, выполняются строго, и она дает точные значения для переходных функций при $\tau \rightarrow 0$ [1].

Пусть $w_i(\xi, \eta, \zeta)$ — скорость, которую газ импульсивно приобретает при $\tau = 0$ в любой точке (ξ, η, ζ) базовой плоскости i . Тогда соответствующее возмущенное давление вычисляется по формуле [1]

$$[p_i'(\xi, \eta, \zeta, 0)] = \pm q_\infty \frac{2}{M} \frac{w_i(\xi, \eta, \zeta)}{U_0}, \quad q_\infty = \frac{\rho_\infty U_0^2}{2}$$

Знак берется в зависимости от того, имеет место течение сжатия (плюс) или разрежения (минус). При выбранном направлении нормали можем написать

$$[p_i'(\xi, \eta, \zeta, 0)]_{1,2} = \mp q_\infty \frac{2}{M} \frac{\partial \Phi}{\partial n_0^i}$$

откуда с учетом (1.4) и (1.5)

$$[\Delta p_{\epsilon_j}^i(\xi, \eta, \zeta, 0)] = -\frac{4}{M} F_{\epsilon_j}^i(\xi, \eta, \zeta)$$

Интегрируя эти выражения, нетрудно найти и начальные значения переходных функций для суммарных характеристик.

Легко видеть, что второе предельное значение переходной функции (при $\tau \rightarrow \infty$) совпадает со стационарным значением соответствующей аэродинамической производной

$$[\Delta p_{\epsilon_j}^i(\xi, \eta, \zeta, \infty)] = \Delta p_{\epsilon_j}^{\epsilon_j^i}(\xi, \eta, \zeta), \quad \Delta p_{\epsilon_j}^{\epsilon_j^i}(\xi, \eta, \zeta) = \Delta p_{\epsilon_j}^{\epsilon_j^i}(\xi, \eta, \zeta, p_j^*) \Big|_{p_j^* \rightarrow 0}$$

4. Общие теоремы. При систематическом применении численных методов общие теоремы помогают создать разумную систему расчетов и являются важным средством контроля за правильностью вычислений и точностью получаемых результатов. Ниже приводится ряд теорем, наиболее существенных с указанной точки зрения.

Теоремы 1—4 доказываются с помощью интегральных представлений (2.3) и (2.4).

Теорема об импульсе. Импульс нестационарной части переходной функции любой линейной характеристики за все время переходного процесса в сжимаемой среде равен соответствующей аэродинамической производной с точкой при $p_j^* \rightarrow 0$. В несжимаемой жидкости он равен разности указанных производных при циркуляционном и безциркуляционном обтекании.

Применительно к нагрузкам имеем [1,4]

$$(4.1) \quad \int_0^{\tau_j^*} I_{p_i}^{\epsilon_j^i}(\xi, \eta, \zeta, \tau) d\tau = p_i^{\epsilon_j^i}(\xi, \eta, \zeta, 0) - \mu \Delta^* p_i^{\epsilon_j^i}(\xi, \eta, \zeta)$$

$$I_{p_i}^{\epsilon_j^i}(\xi, \eta, \zeta, \tau) = 0, \quad \tau > \tau_j^*$$

Замечание. Строго говоря, теорема доказывается в предположении конечности импульса. Для крыльев бесконечного размаха при дозвуковых скоростях интегралы (4.1) обычно получаются расходящимися. Так, в несжимаемой среде, когда существуют точные решения для тонкого профиля, нестационарная часть переходной функции при больших τ убывает как $1/\tau$. Но во всех этих случаях и аэродинамические производные с точкой (2.4) при $p_j^* \rightarrow 0$ обращаются в бесконечность. Поэтому и здесь выполняется равенство (4.1).

Теорема об аэродинамической производной без точки. Аэродинамические производные по ϵ_j при весьма больших значениях p_j^* стремятся к значениям соответствующих переходных функций в начальный момент переходного процесса, причем в несжимаемой жидкости берется непрерывная часть переходной функции.

Для аэродинамической нагрузки можем написать

$$\Delta p_{\epsilon_j}^{\epsilon_j^i}(\xi, \eta, \zeta, \infty) = [\Delta p_{\epsilon_j}^i(\xi, \eta, \zeta, 0)]$$

Теорема об аэродинамической производной с точкой. Аэродинамические производные по ϵ_j при весьма больших значениях p^* стремятся к значениям соответствующих

бесциркуляционных производных. В сжимаемой среде указанные предельные значения равны нулю.

Применительно к аэродинамическим нагрузкам теорема имеет вид

$$\Delta p_i^{\varepsilon_j}(\xi, \eta, \zeta, \infty) = \mu \Delta^* p_i^{\varepsilon_j}(\xi, \eta, \zeta)$$

Теорема о среднем значении. Пусть кинематический параметр изменяется во времени по периодическому закону с периодом τ_T . Тогда среднеинтегральное значение за период τ_T любой линейной нестационарной характеристики равно произведению стационарной производной на среднеинтегральное значение кинематического параметра за период.

При непрерывном изменении $\varepsilon_j(\tau)$ теорема для аэродинамической нагрузки записывается в виде

$$\frac{1}{\tau_T} \int_0^{\tau_T} \Delta p_{\varepsilon_j}^i(\xi, \eta, \zeta, \tau) d\tau = \Delta p_i^{\varepsilon_j}(\xi, \eta, \zeta) \frac{1}{\tau_T} \int_0^{\tau_T} \varepsilon_j(\tau) d\tau$$

Теорема легко обобщается и на случай, когда функция $\varepsilon_j(\tau)$ за период имеет конечное число разрывов первого рода.

Теорема обратимости. Она устанавливает интегральную связь между граничными условиями и соответствующими им аэродинамическими нагрузками на летательном аппарате при прямом и обратном относительно скорости U_0 движения. Предложенная схематизация летательного аппарата и связанная с нею постановка задачи, изложенные в п. I, позволяют, рассуждая как и в [1], обобщить теорему обратимости и на данный случай.

Обозначим через $\varphi^*(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ ту часть потенциала скоростей, нормальные скорости которой изменяются при переходе через базовые плоскости непрерывно. Тогда при произвольных зависимостях $\varepsilon_j(\tau)$ имеем

$$(4.2) \quad \sum_i \iint_{\sigma_i} \Delta p_{i+} \frac{\partial \varphi_{-}^*}{\partial n_{0i}} d\sigma_i = \sum_i \iint_{\sigma_i} \Delta p_{i-} \frac{\partial \varphi_{+}^*}{\partial n_{0i}} d\sigma_i$$

где σ_i — безразмерная площадь базового элемента i , и индекс плюс относится к прямому, а минус — к обратному движениям.

5. Следствия теоремы обратимости. Равенство (4.2) позволяет получить важные соотношения для суммарных характеристик. Будем применять стандартные связанные системы координат как в прямом, так и обратном движениях, тогда

$$\xi_+ = -\xi_-, \quad \eta_+ = \eta_-, \quad \zeta_+ = -\zeta_-, \quad \cos(ny)_{0+}^i = \cos(ny)_{0-}^i, \quad \cos(nz)_{0+}^i = -\cos(nz)_{0-}^i$$

Введем аэродинамические коэффициенты нормальной и боковой сил и моментов относительно связанных осей (s — характерная площадь)

$$c_{y,z} = \frac{F_{y,z}}{q_\infty s}, \quad m_{x,y,z} = \frac{M_{x,y,z}}{q_\infty s b}$$

На основании формулы (4.2) с учетом (1.4) — (1.6) устанавливаются связи между характеристиками жесткого аппарата в прямом и обратном движении. Пусть кинематические параметры изменяются по произвольному закону, тогда

$$(5.1) \quad c_{y\alpha_+}(\tau) = c_{y\alpha_-}(\tau), \quad c_{z\beta_+}(\tau) = c_{z\beta_-}(\tau)$$

$$m_{x\omega_x^+}(\tau) = m_{x\omega_x^-}(\tau), \quad m_{y\omega_y^+}(\tau) = m_{y\omega_y^-}(\tau), \quad m_{z\omega_z^+}(\tau) = m_{z\omega_z^-}(\tau)$$

Если законы изменения рассматриваемых кинематических параметров в прямом и обратном движениях совпадают $\varepsilon_{j+}(\tau) = \varepsilon_{k-}(\tau)$, то имеют место равенства

$$(5.2) \quad \begin{aligned} m_{x\alpha+}(\tau) &= c_{y\omega_x-}(\tau), \quad m_{x\beta+}(\tau) = c_{z\omega_x-}(\tau), \quad m_{y\alpha+}(\tau) = -c_{y\omega_y-}(\tau) \\ m_{y\beta-}(\tau) &= -c_{z\omega_y-}(\tau), \quad m_{y\omega_x-}(\tau) = -m_{x\omega_y-}(\tau), \quad m_{z\alpha+}(\tau) = c_{y\omega_z-}(\tau) \\ m_{z\beta+}(\tau) &= c_{z\omega_z-}(\tau), \quad m_{z\omega_x+}(\tau) = m_{x\omega_z-}(\tau), \quad c_{z\alpha+}(\tau) = c_{y\beta-}(\tau) \\ m_{z\omega_y+}(\tau) &= -m_{y\omega_z-}(\tau) \end{aligned}$$

У аппарата, симметричного относительно плоскости Oxy , некоторые из рассмотренных коэффициентов обращаются в нуль. Равенства (5.1) и (5.2) останутся в силе, если индексы плюс и минус поменять местами. Поэтому все линейные суммарные коэффициенты жесткого аппарата, движущегося в спокойной среде в прямом направлении, выражаются через характеристики обратного движения при том же числе M . Аналогичные равенства справедливы и для коэффициентов аэродинамических производных.

Теорема обратимости позволяет упростить расчет дополнительных сил и моментов, вызванных изменением кривизны каждой части аппарата i , так как из (4.2) можно получить [1]

$$(5.3) \quad \begin{aligned} c_{y\delta_{v+}}^i &= \iint_{\sigma_i} \Delta p_{\alpha-}^i \left(\frac{\partial f_{\delta_{v+}}^i}{\partial \xi} \right)_+ d\sigma_i, \quad c_{y\delta_{v+}}^i = - \iint_{\sigma_i} \Delta p_{\alpha-}^i f_{\delta_{v+}}^i d\sigma_i \\ &\dots \dots \dots \\ m_{z\delta_{v+}}^i &= \iint_{\sigma_i} \Delta p_{\omega_z-}^i \left(\frac{\partial f_{\delta_{v+}}^i}{\partial \xi} \right)_+ d\sigma_i, \quad m_{z\delta_{v+}}^i = - \iint_{\sigma_i} \Delta p_{\omega_z-}^i f_{\delta_{v+}}^i d\sigma_i \end{aligned}$$

Как видно из (5.3), чтобы найти любую из указанных характеристик, не обязательно каждый раз рассматривать новую задачу аэродинамики. Достаточно решить α , β - и $\omega_{x,y,z}$ -задачи в обратном движении, после чего расчет сводится к вычислению интегралов.

Предложенная схематизация летательного аппарата показала высокую эффективность на практике, позволила сравнительно просто обобщить численные методы, которые вначале были развиты для крыльев [1], оказалась довольно экономной, и ее удалось реализовать в ряде случаев даже на ЦВМ средней производительности. Результаты систематических расчетов, полученные на ее основе, находятся в удовлетворительном соответствии с экспериментальными данными во всем летном диапазоне чисел Маха, пока в эксперименте сохраняются линейные зависимости аэродинамических характеристик от ε_j . Приведенные точные соотношения и теоремы помогли создать надежную систему контроля за результатами численных расчетов на ЦВМ и существенно сократить их объем.

Поступила 18 XI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Г. Крыло в нестационарном потоке газа. М., «Наука», 1971.
2. Белоцерковский С. М. Математическая модель нестационарной линейной аэроупругости. Докл. АН СССР, 1972, т. 207, № 3.
3. Белоцерковский С. М., Кочетков Ю. А., Томшин В. К. Динамика движения тела при учете нестационарного обтекания. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 4.
4. Тимаш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.—Л., Гостехиздат, 1948.