Теорема. Произвольную непрерывную вместе со своими производными первого порядка силу

$$Q(q, q^{\cdot}) = Q^*(q) + Q^{**}(q^{\cdot})$$

можно разложить на потенциальную, неконсервативную позиционную, гироскопическую и диссипативную силы.

Из определения (8) неконсервативных позиционных сил и определения (10) гироскопических сил следует, что первые должные зависеть от координат q_k системы, а вторые — от скоростей $q_k^{\cdot}$. Однако общее определение (8) неконсервативных позиционных сил не исключает того, что эти силы могут зависеть также и от скоростей $q_k^{\cdot}$ и времени t. Точно так же гироскопические и диссипативные силы могут зависеть не только от скоростей $q_k^{\cdot}$, но и от координат q_k и времени t. В [4] приведены некоторые теоремы, определяющие характер устойчивости движения системы по структуре сил, удовлетворяющих этим общим определениям.

Поступила 25 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Thomson W., Tail P.* Treatise on natural phylosophy, pt. 1. Cambridge University Press, 1879.
2. *Ziegler H.* Linear elastic stability. A critical analysis of methods. Z. angew. Math. und Phys. Basel — Zürich, F—2, 1953, Bd. 4.
3. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
4. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. Изд. 2. М., «Наука», 1974.

УДК 533.6.011.8

О НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЯХ В КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВ

С. П. Баканов

(Москва)

Предлагается метод вычисления некоторых моментов интеграла столкновений Больцмана, появляющихся при решении граничных задач кинетической теории газов методом разложения по полупространству скоростей, без прямого их расчета [1], позволяющий установить определенные соотношения между ними (в том числе уже полученные ранее [2, 3]).

При решении граничных задач кинетической теории газов методом разложения по полупространству скоростей возникает необходимость вычисления некоторых интегралов — моментов больцмановского интеграла столкновений, причем многие авторы справедливо считают это наиболее трудоемкой частью решаемых таким путем задач. Последовательный метод прямого вычисления указанных моментов был развит в работе [1], что в принципе позволяет решить широкий класс граничных задач в рамках кинетической теории. Однако практическое применение метода [1] требует весьма трудоемких выкладок и не позволяет проконтролировать получаемые результаты (в работе [1] были допущены ошибки при вычислении некоторых моментов) и, что самое главное, в ряде случаев использование точных значений моментов в рамках приближенной теории приводит к эффектам, которые следует отнести за счет превышения точности.

В работах [2, 3] было показано, как можно установить некоторые соотношения между моментами интеграла столкновений из физических соображений, упростив тем самым процедуру решения задачи. В данной работе ряд таких соотношений устанавливается также и математически.

Рассмотрим уравнение Больцмана в форме Чепмена — Энскога [4]

$$f^{(0)}\left[\left(c^2-\frac{5}{2}\right)c_i\frac{\partial T}{\partial r_i}+2\left(c_ic_j-\frac{1}{3}\delta_{ij}c^2\right)\frac{\partial c_{0i}}{\partial r_j}\right]=n^2I(\varphi)$$

Его решение ищется, как известно, в виде

(1) $$\varphi=\frac{1}{n}\left[A_i\frac{\partial\ln T}{\partial r_i}+B_{ij}\frac{\partial c_{0i}}{\partial r_j}\right]$$

Метод последовательных приближений в рамках линейной по производным $\partial T / \partial r_i$ и $\partial c_{0i} / \partial r_j$ теории заключается в учете одного, двух и т. д. членов разложений коэффициентов A_i и B_{ij} по полиномам Сонина — Лагерра. В частности, в приближении одного полинома решение (1) имеет вид (для любой модели взаимодействия молекул)

(2) $$\varphi=-\frac{1}{n}\left[a_1\left(\frac{5}{2}-c^2\right)c_i\frac{\partial T}{\partial r_i}+b_1\left(c_ic_j-\frac{1}{3}\delta_{ij}c^2\right)\frac{\partial c_{0i}}{\partial r_j}\right]$$

причем коэффициенты a_1 и b_1 связаны соотношением

(3) $$-4a_1=3b_1$$

В приложениях задаются моделью молекулярного взаимодействия, что позволяет вычислить величины a_1 и b_1. Так, для твердых шариков $b_1={}^5/_4\sqrt{\pi}\lambda$, где λ — длина свободного пробега молекул; для максвелловских молекул

$$b_1={}^4/_3\,(m/2k)^{1/2}[\pi A_2(5)]^{-1},\quad A_2(5)=0.436$$

Рассмотрим двумерное изотермическое сдвиговое течение газа вдоль оси z ($\partial T / \partial r_i = 0$). Уравнение Больцмана с учетом (2) принимает вид

$$2c_xc_z=b_1I(c_xc_z)$$

Возьмем моменты этого уравнения $c_x\operatorname{sign}c_x$, c_xc_z, $c_zc_x^2\operatorname{sign}c_x$, $c_zc^2\operatorname{sign}c_x$. Под моментом $A(c)$ функции $\Phi(c)$ понимается, как обычно, интеграл

$$\int A(c)\varphi(c)\exp(-c^2)\,d^3c$$

по всем значениям скоростей. Тогда справа получим моменты интеграла столкновений, являющиеся целью данной работы

$$I_2=[c_xc_z,\ c_z\operatorname{sign}c_x],\quad I_6=[c_xc_z,\ c_x^2c_z\operatorname{sign}c_x]$$
$$I_3=[c_xc_z,\ c_xc_z],\quad I_{15}=[c_xc_z,\ c_zc^2\operatorname{sign}c_x]$$

Интегралы в левой части вычисляются элементарно. В результате имеем

(4) $$I_2=-\pi/b_1,\quad I_6=-\pi/b_1,\quad I_3=-{}^1/_2\pi\sqrt{\pi}/b_1,\quad I_{15}=-3\pi/b_1$$

При наличии в газе лишь градиента температуры ($\partial T / \partial r_i = \partial T / \partial z$) имеем

$$({}^5/_2-c^2)c_z=a_1I[({}^5/_2-c^2)c_z]$$

Возьмем моменты $c_xc_z\operatorname{sign}c_x$, $c_z({}^5/_2-c^2)$. Простой расчет дает

(5) $$I_{11}=\left[\left(\frac{5}{2}-c^2\right)c_z,\ c_xc_z\operatorname{sign}c_x\right]=-\frac{\pi}{4a_1}$$
$$I_{13}=\left[\left(\frac{5}{2}-c^2\right)c_z,\ \left(\frac{5}{2}-c^2\right)c_z\right]=\frac{5\pi\sqrt{\pi}}{4a_1}$$

Сопоставление формул (4), (5) с учетом (3) показывает, что выполняются следующие соотношения между моментами интеграла столкновений (независимо от принятой модели взаимодействия молекул):

(6) $$I_2=I_6=\frac{2}{\sqrt{\pi}}I_3,\qquad I_{15}=3I_2,\qquad I_{11}=-\frac{1}{5\sqrt{\pi}}I_{13}=-\frac{1}{3}I_2$$

В приложениях встречается также момент $I_{12}=[c_xc_z,\ ({}^5/_2-c^2)c_z\operatorname{sign}c_x]$

Легко видеть, что имеет место соотношение

(7) $$I_{12}=-{}^1/_2I_2$$

Равенства (6) и (7) являются следствием приближения одного полинома разложения (1), которое дает ту или иную точность для различных моделей молекулярного взаимодействия (для максвелловских молекул это выражение точное). Уместно отметить, что приложения метода полупространственных разложений, предложенного в [5], а затем развитого в кинетической теории газов в работе [6], не выходят за рамки приближения одного полинома (в более высоких приближениях метод сильно усложняется, и автору неизвестны публикации таких работ). Поэтому при решении граничных задач методом работы [6] несоблюдение равенств (6), (7) следует считать превышением точности (см. в связи с этим работы [2, 3], а также [7, 8]).

Таким образом, значения некоторых моментов интеграла столкновений Больцмана (в линеаризованной форме) могут быть установлены без прямого, довольно громоздкого расчета. Эти значения оказываются точными для максвелловских молекул. Для других моделей их точность ограничивается рамками приближения одного полинома в разложении по методу Чепмена — Энскога. Следует подчеркнуть, что применяемые в многочисленных публикациях более точные значения моментов в ряде случаев могут приводить (и приводят) к предсказанию реально не существующих эффектов, являющихся, как правило, следствием простого превышения точности теории. Изложенная в данной работе схема удовлетворяет обязательному физическому требованию [3]: при решении граничных задач кинетической теории обеспечивается правильный предельный переход в объем газа вдали от стенок.

Поступила 28 II 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Uhlenbeck G. E., Wang Chang C. S.* Transport phenomena in very dilute gases. Univ. Michigan, 1949.
2. *Баканов С. П., Дерягин Б. В.* К вопросу о состоянии газа, движущегося вблизи твердой поверхности. Докл. АН СССР, 1961, т. 139, № 1.
3. *Баканов С. П., Маркеев Б. М.* К вопросу о состоянии газа, движущегося вблизи поверхности. Ж. техн. физ., 1974, т. 44, вып. 10.
4. *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
5. *Kourganoff V., Busbridge W.* Basic methods in transfer problems. Oxford, Clarendon Press, 1952.
6. *Gross E. P., Jackson E. A., Ziering S.* Boundary problems in kinetic theory of gases. Ann. Phys., 1957, vol. 1, No. 2.
7. *Ziering S.* Flow of a gas near a solid surface. Flow of a gas near a solid surface. AIAA Journal, 1963, vol. 1, No. 3.
8. *Cercignani C.* Shear flow for gas molecules interacting with an arbitraty central force. Nuovo Cimento, 1963, vol. 27, No. 5.

УДК 629.7.015.3 : 533.6.13.42

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

С. М. Белоцерковский

(Москва)

Излагаются основные положения, на которых базируется расчетная система для определения аэродинамических характеристик летательного аппарата на ЦВМ. Дается описание и обоснование схематизации аппарата с помощью системы плоских базовых элементов. Общая линейная нестационарная задача аэродинамики и гидродинамики сводится к совокупности канонических ε_j-задач, формально решаемых независимо.