Принимая во внимание вид решения уравнений первого приближения (5), условие (6) можно преобразовать к форме

$$\left[\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(\beta_1, \beta_2)}\right]_{k=0} \neq 0, \quad \left[\frac{D(\psi_3, \psi_4)}{D(\beta_3, \beta_4)}\right]_{k=0} \neq 0 \tag{7}$$

Выполняя в (5) интегрирование, находим

$$x_1 = \sigma \sqrt{A}\,\mathrm{dn}\, w_1 \left\{\frac{1}{A\sigma^3\varkappa'^2}\left[\mathrm{E}(\mathrm{am}\, w_1) - \frac{\varkappa^2 \,\mathrm{sn}\, w_1 \,\mathrm{cn}\, w_1}{\mathrm{dn}\, w_1}\right]\beta_1 + \beta_2 + \ldots\right\} \tag{8}$$

$$y_1 = \sigma \sqrt{A}\,\varkappa' \frac{\mathrm{sn}\, w_2}{\mathrm{cn}\, w_2}\left\{-\frac{1}{A\sigma^3\varkappa'^2}\left[\frac{\mathrm{cn}\, w_2 \,\mathrm{dn}\, w_2}{\mathrm{sn}\, w_2} + \mathrm{E}(\mathrm{am}\, w_2)\right]\beta_3 + \beta_4 + \ldots\right\}$$

С помощью (8) получаем, что условия существования периодических решений (7) сводятся к неравенствам

$$\left[\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(\beta_1, \beta_2)}\right]_{k=0} = -\frac{2}{\sigma\varkappa'^2}\,\mathrm{E}(\varkappa) \neq 0, \quad \left[\frac{D(\psi_3, \psi_4)}{D(\beta_3, \beta_4)}\right]_{k=0} = 2E(\varkappa)$$

которые выполняются для любых периодических решений, исключая $\varkappa' = 0$.

Установленным периодическим решениям системы (1) в общем случае соответствуют квазипериодические движения твердого тела.

В самом деле, обратимся к циклическому интегралу

$$\psi' = \frac{If - C\varphi' \cos\vartheta}{(A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi) + C\cos^2\vartheta}$$

Разлагая правую часть в ряд Фурье по кратным аргумента $\tau\,/\,T$ и интегрируя, получим $\psi = n(\tau - \tau_0) + \Phi(\tau)$, где $\Phi(\tau + T) = \Phi(\tau)$, а n — постоянная величина, зависящая от начальных условий. Очевидно, величина nT, вообще говоря, не кратна 2π, что и свидетельствует о справедливости сделанного заключения.

Поступила 6 III 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аржаных И. С.* Об уравнениях вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Докл. АН СССР, 1954, т. 97, № 3.
2. *Демин В. Г.* Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. М., «Наука», 1968.

УДК 531.36

К ВОПРОСУ О СТРУКТУРЕ СИЛ

Д. Р. Меркин

(Ленинград)

Показано, что широкий класс нелинейных сил можно представить суммой потенциальных, неконсервативных позиционных, гироскопических и диссипативных сил.

Во многих случаях исследование устойчивости движения целесообразно проводить по структуре действующих сил. В последние годы этот метод, основы которого были заложены в работе [1], успешно развивается в основном применительно к линейным системам, для которых произвольные силы исчерпывающим образом могут быть представлены суммой потенциальных, неконсервативных позиционных, гироскопических и диссипативных сил. В данной работе показано, что такое представление сил реализуемо и для широкого класса нелинейных сил.

Пусть в некоторой области n-мерного ортогонального пространства $x = (x_1, \ldots, x_n)$ задано произвольное векторное поле $Q(x) = Q(x_1, \ldots, x_n)$. Поле векторов $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ будем называть циркуляционным, если в каждой точке M области задания поля векторы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{x}$ взаимно перпендикулярны ($\mathbf{x}$ — радиус-вектор точки M)

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} R_j x_j = 0 \tag{1}$$

Теорема. Произвольное непрерывное вместе со своими производными первого порядка векторное поле $Q(x)$ всегда можно разложить на потенциальное и циркуляционное поля

$$Q(x) = -\operatorname{grad}\Pi + \mathbf{R}(x) \tag{2}$$

где поле $\mathbf{R}(x)$ и потенциал $-\Pi$ подлежат определению.

Доказательство. Составляющие K_j потенциального поля $\mathbf{K}(x) = -\operatorname{grad}\Pi$ удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial K_j}{\partial x_k} = \frac{\partial K_k}{\partial x_j} \qquad (k, j = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

Запишем равенство (2) в скалярной форме

$$Q_k = K_k + R_k \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

Теперь соотношения (3) приводятся к виду

$$\frac{\partial R_j}{\partial x_k} = \frac{\partial R_k}{\partial x_j} - \Phi_{kj}, \quad \Phi_{kj} = \frac{\partial Q_k}{\partial x_j} - \frac{\partial Q_j}{\partial x_k} \tag{5}$$

Если все $\Phi_{kj} = 0$, то поле $Q(x)$ потенциально и $\mathbf{R} = 0$.

Продифференцируем равенство (1) частным образом по x_k:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial R_j}{\partial x_k} = -R_k \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

Пользуясь равенством (5), получим

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial R_k}{\partial x_j} = H_k - R_k, \quad H_k = \sum_{j=1}^{n} \Phi_{kj} x_j \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{6}$$

Таким образом, составляющие R_k удовлетворяют n линейным неоднородным дифференциальным уравнениям в частных производных, в которых функции $H_k(x)$ известны. Составим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующую уравнению (6), и найдем n первых интегралов этой системы (C_j — постоянные интегрирования)

$$x_1 = C_1 x_n, \ldots, x_{n-1} = C_{n-1} x_n, \quad R_k = \frac{1}{x_n} \int^{x_n} H_k \, dx_n + \frac{C_n}{x_n}$$

Общее решение уравнения (6) можно представить в следующей форме (Ψ_k — произвольная функция):

$$R_k = \frac{1}{x_n} \int^{x_n} H_k \, dx_n + \frac{1}{x_n} \Psi_k \left(\frac{x_1}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n} \right) \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

При $H_k = 0$ ($k = 1, \ldots, n$) все $R_k = 0$ (см. примечание к формуле (5) и равенства (6)). Поэтому, положив $\Psi_k = 0$, получим составляющие R_k неконсервативной позиционной силы

$$(7) \qquad R_k = \frac{1}{x_n} \int^{x_n} H_k (C_1 x_n, \ldots, C_{n-1} x_n, x_n)\, dx_n \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

причем по выполнении квадратур все C_j нужно заменить на x_j / x_n ($j = 1, \ldots, n - 1$).

Составляющие потенциального поля $\mathbf{K}(x)$ определятся из равенств (4), а затем обычным путем найдется потенциал поля $-\Pi(x)$.

Заметим, что для линейных полей $\mathbf{Q} = C\mathbf{x}$, где C — произвольная квадратная матрица порядка $n \times n$, теорема доказывается элементарно: достаточно разложить матрицу C на симметричную и кососимметричную части.

Пример. Векторное поле задано своими составляющими

$$Q_1 = 2x_1^{11/3} - x_1^{4/3} x_2, \quad Q_2 = -x_1^{7/3} + x_2$$

Изложенными здесь методами найдем составляющие циркуляционного поля и потенциал поля

$$R_1 = {}^2/_5 x_1^{4/3} x_2, \quad R_2 = -{}^2/_5 x_1^{7/3}, \quad \Pi = -{}^3/_7 x_1^{14/3} + {}^3/_5 x_1^{7/3} x_2 - {}^1/_2 x_2^2$$

Применим доказанную теорему к разложению сил. Будем определять положение системы n обобщенными координатами $q_1, \ldots, q_n$. Введем в рассмотрение n-мерное ортогональное пространство $(q_1, \ldots, q_n)$ и два вектора: $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ и $\mathbf{Q} = (Q_1, \ldots, Q_n)$, где Q_k — обобщенные силы системы. Предполагается, что первый вектор определяет изображающую точку, а второй — силу, приложенную к этой точке.

В линейной теории силу $\mathbf{R} = -P\mathbf{q}$, где P — кососимметричная матрица порядка $n \times n$, называют неконсервативной позиционной силой (по терминологии Циглера [2] — циркуляционной силой). Эта сила перпендикулярна $\mathbf{q}$, так как $\mathbf{R}\cdot\mathbf{q} = -P\mathbf{q}\cdot\mathbf{q} \equiv 0$. Обобщая, будем называть любую силу $\mathbf{R}$ неконсервативной позиционной силой, если она перпендикулярна $\mathbf{q}$

$$(8) \qquad \mathbf{R}\cdot\mathbf{q} = \sum_{j=1}^{n} R_j q_j = 0$$

На основании доказанной теоремы произвольную непрерывную вместе со своими производными первого порядка позиционную силу $\mathbf{Q}^*(q)$ можно разложить на потенциальную и неконсервативную позиционную составляющие (Π — потенциальная энергия системы)

$$(9) \qquad \mathbf{Q}^*(q) = -\operatorname{grad}\Pi + \mathbf{R}(q)$$

Рассмотрим теперь силы $\mathbf{Q}^{**}(q^{\cdot})$, зависящие от скорости. Согласно определению Томсона и Тета [1], сила Γ называется гироскопической, если ее мощность равна нулю

$$(10) \qquad \Gamma\cdot\mathbf{q}^{\cdot} = \sum_{j=1}^{n} \Gamma_j q_j^{\cdot} = 0$$

В пространстве скоростей $(q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot})$ гироскопическая сила Γ обладает свойством ортогональности (1). Следовательно, силу $\mathbf{Q}^{**}(q^{\cdot})$ можно разложить на две составляющие

$$\mathbf{Q}^{**}(q^{\cdot}) = -\operatorname{grad} F + \Gamma(q^{\cdot})$$

Сила

$$\mathbf{D}(q^{\cdot}) = -\operatorname{grad} F, \quad D_k = -\partial F / \partial q_k^{\cdot} \quad (k = 1, \ldots, n)$$

является диссипативной с положительным или отрицательным сопротивлением. На основании последних равенств функцию F можно назвать обобщенной функцией Релея. (Другое обобщение функции Релея принадлежит А. И. Лурье [3].)

Таким образом, доказана

Теорема. Произвольную непрерывную вместе со своими производными первого порядка силу

$$Q(q, q^\cdot) = Q^*(q) + Q^{**}(q^\cdot)$$

можно разложить на потенциальную, неконсервативную позиционную, гироскопическую и диссипативную силы.

Из определения (8) неконсервативных позиционных сил и определения (10) гироскопических сил следует, что первые должные зависеть от координат q_k системы, а вторые — от скоростей $q_k^\cdot$. Однако общее определение (8) неконсервативных позиционных сил не исключает того, что эти силы могут зависеть также и от скоростей $q_k^\cdot$ и времени t. Точно так же гироскопические и диссипативные силы могут зависеть не только от скоростей $q_k^\cdot$, но и от координат q_k и времени t. В [4] приведены некоторые теоремы, определяющие характер устойчивости движения системы по структуре сил, удовлетворяющих этим общим определениям.

Поступила 25 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Thomson W., Tail P.* Treatise on natural phylosophy, pt. 1. Cambridge University Press, 1879.
2. *Ziegler H.* Linear elastic stability. A critical analysis of methods. Z. angew. Math. und Phys. Basel — Zürich, F—2, 1953, Bd. 4.
3. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
4. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. Изд. 2. М., «Наука», 1974.

УДК 533.6.011.8

О НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЯХ В КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВ

С. П. Баканов

(Москва)

Предлагается метод вычисления некоторых моментов интеграла столкновений Больцмана, появляющихся при решении граничных задач кинетической теории газов методом разложения по полупространству скоростей, без прямого их расчета [1], позволяющий установить определенные соотношения между ними (в том числе уже полученные ранее [2, 3]).

При решении граничных задач кинетической теории газов методом разложения по полупространству скоростей возникает необходимость вычисления некоторых интегралов — моментов больцмановского интеграла столкновений, причем многие авторы справедливо считают это наиболее трудоемкой частью решаемых таким путем задач. Последовательный метод прямого вычисления указанных моментов был развит в работе [1], что в принципе позволяет решить широкий класс граничных задач в рамках кинетической теории. Однако практическое применение метода [1] требует весьма трудоемких выкладок и не позволяет проконтролировать получаемые результаты (в работе [1] были допущены ошибки при вычислении некоторых моментов) и, что самое главное, в ряде случаев использование точных значений моментов в рамках приближенной теории приводит к эффектам, которые следует отнести за счет превышения точности.

В работах [2, 3] было показано, как можно установить некоторые соотношения между моментами интеграла столкновений из физических соображений, упростив тем самым процедуру решения задачи. В данной работе ряд таких соотношений устанавливается также и математически.