УДК 531.31

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Э. А. Вагнер, В. Г. Демин

(Фрунзе, Москва)

Методом малого параметра Пуанкаре доказывается существование нового семейства периодических решений задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Предполагается, что рассматриваемое тело мало отличается от тела с осью динамической симметрии, а постоянная интеграла момента количеств движения достаточно мала.

Рассмотрим движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Уравнения движения задачи с помощью циклического интеграла $\partial T / \partial\dot\psi = f$, где T — живая сила, ψ — угол прецессии, а f — произвольная постоянная, можно привести к системе четвертого порядка, описывающей движение фиктивной материальной точки на плоскости. Для этой цели выполним два последовательных преобразования координат.

Первое из них дается формулами

$$\varphi = \operatorname{Arctg}\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u \operatorname{sn} s}, \qquad \vartheta = \arccos\frac{\operatorname{dn} u \operatorname{cn} s}{\operatorname{dn} s}$$

в которых φ, ϑ — угол собственного вращения и угол нутации соответственно, u, s — новые переменные, причем эллиптические функции аргумента u имеют своим модулем $k = [(A - B)C / (A - C)B]^{1/2}$, а эллиптические функции аргумента s зависят от модуля $k' = (1 - k^2)^{1/2}$.

Второе преобразование определяется соотношениями [1]

$$x = \int_0^u \mu_1(u)\,du, \qquad y = -\int_0^s \mu_2(s)\,ds$$

$$\mu_1^2(u) = B + (A - B)\operatorname{sn}^2 u, \qquad \mu_2^2(s) = \frac{A - Bk'^2\operatorname{sn}^2 s}{\operatorname{dn}^2 s}$$

Введением новой независимой переменной τ при помощи уравнения $dt = I d\tau$, в котором

$$I = \frac{Ck}{\Lambda}\left(k'^2\frac{\operatorname{sn}^2 s}{\operatorname{dn}^2 s} + \operatorname{cn}^2 u\right)$$

$$\Lambda = \frac{1}{\operatorname{dn}^2 s}\left(Ak^2\operatorname{sn}^2 u + Bk^2\operatorname{cn}^2 u\operatorname{sn}^2 s + C\operatorname{dn}^2 u\operatorname{cn}^2 s\right)$$

достигается регуляризация уравнений движения.

В результате приходим к следующей системе уравнений движения:

$$x'' - \frac{f\Omega}{k}y' = V_x', \qquad y'' + \frac{f\Omega}{k}x' = V_y' \tag{1}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по τ и введены следующие обозначения:

$$V = \frac{I}{k}\left[h - \frac{mg}{\operatorname{dn} s}\left(ak\operatorname{sn} u + bk\operatorname{sn} s\operatorname{cn} u + c\operatorname{dn} u\operatorname{cn} s - \frac{f^2}{2\Lambda}\right)\right]$$

$$\Omega = \frac{1}{\mu_1(u)\mu_2(s)}\left\{\nu_2(s)\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\lambda_1(u)}{\Lambda M}\right] + \nu_1(u)\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\lambda_2(s)}{\Lambda M}\right]\right\}$$

$$\nu_1(u) = C\operatorname{dn}^2 u + k^2(A - B)\operatorname{sn}^2 u\operatorname{cn}^2 u, \qquad \nu_2(s) = C\operatorname{cn}^2 s - k^2(A - B)\frac{\operatorname{sn}^2 s}{\operatorname{dn}^2 s}$$

$$\lambda_1(u) = \operatorname{sn} u\operatorname{cn} u\operatorname{dn} u, \qquad \lambda_2(s) = \frac{\operatorname{sn} s\operatorname{cn} s}{\operatorname{dn} s}, \qquad M = 1 - \operatorname{cn}^2 u\operatorname{cn}^2 s$$

[1] В статью И. С. Аржаных [1] при выполнении аналогичного преобразования вкралась погрешность.

(h — постоянная живых сил, a, b, c — координаты центра тяжести тела в связанной системе отсчета).

Система (1) обладает интегралом Якоби $x'^2 + y'^2 = 2V$, в котором произвольная постоянная должна быть упразднена.

Для доказательства существования периодических решений уравнений (1) и фактического их построения можно воспользоваться методом малого параметра Пуанкаре. Ограничимся рассмотрением случая малых значений f, в котором допустимо положить $f = k^3 f^*$, где f^* — конечная величина. В качестве малого параметра примем модуль эллиптических функций k. Будем строить решение в виде рядов

$$x(\tau) = x_0(\tau) + kx_1(\tau) + \ldots, \quad y(\tau) = y_0(\tau) + ky_1(\tau) + \ldots$$

Упрощенная система уравнений получается из (1) при $k = 0$

$$x_0'' = \frac{\partial V_0}{\partial x_0}, \quad y_0'' = \frac{\partial V_0}{\partial y_0} \tag{2}$$

$$V_0 = (h - mgc)\left(\cos^2 \frac{x_0}{\sqrt{A}} + \operatorname{sh}^2 \frac{y_0}{\sqrt{A}}\right)$$

Ее общее решение можно записать в виде

$$\cos \frac{x_0}{\sqrt{A}} = \operatorname{cn}(w_1, \varkappa), \quad \operatorname{sh} \frac{y_0}{\sqrt{A}} = \frac{\varkappa'}{\varkappa \operatorname{cn}(w_2, \varkappa)}$$

$$w_i = \sigma(\tau - \tau_i), \quad i = 1, 2; \quad \sigma = \sqrt{\frac{C_1 + 2(h - mgc)}{A}},$$

$$\varkappa^2 = \frac{2(h - mgc)}{C_1 + 2(h - mgc)}$$

Здесь ограничиваемся случаем, когда $h - mgc > 0$, $C_1 > 0$.

Очевидно, порождающее решение будет периодическим с периодом $T = 4\sigma^{-1}\mathrm{K}(\varkappa)$, где $\mathrm{K}(\varkappa)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Перейдем теперь к решению уравнений в вариациях

$$x_1'' = \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_0^2} x_1, \quad y_1'' = \frac{\partial^2 V_0}{\partial y_0^2} y_1 \tag{3}$$

Так как система (2) автономна, то система (3) допускает частное решение $x_1(\tau) = x_0'(\tau)$, $y_1(\tau) = y_0'(\tau)$. Поэтому, делая замену переменных $x_1 = x_0'\xi$, $y_1 = y_0'\eta$, уравнения первого приближения можно записать в виде (Ω_0 — значение функции Ω при $k = 0$)

$$x_0'^2\xi'' + (x_0'^2)'\xi' = f^*\Omega_0 x_0' y_0', \quad y_0'^2\eta'' + (y_0'^2)'\eta' = -f^*\Omega_0 x_0' y_0' \tag{4}$$

Из (4) находим общее решение уравнений первого приближения (β_1, β_2, β_3, β_4 — постоянные интегрирования)

$$x_1 = x_0'\left\{\beta_1 \int \frac{d\tau}{x_0'^2} + \beta_2 + f^* \int \left(\int \Omega_0 x_0' y_0'\, d\tau\right) \frac{d\tau}{x_0'^2}\right\} \tag{5}$$

$$y_1 = y_0'\left\{\beta_3 \int \frac{d\tau}{y_0'^2} + \beta_4 - f^* \int \left(\int \Omega_0 x_0' y_0'\, d\tau\right) \frac{d\tau}{y_0'^2}\right\}$$

В согласии с теоремой симметрии [2] условия периодичности решения системы (1) можно упростить. Так как система (1) инвариантна относительно подстановок

$$\tau \to -\tau, \quad x \to -x, \quad y \to y, \quad x' \to x', \quad y' \to -y'$$

то условия периодичности принимают вид

$$\psi_1 = x(0) = 0, \quad \psi_2 = x\left(\frac{T}{2}\right) = 0, \quad \psi_3 = y'(0) = 0, \quad \psi_4 = y'\left(\frac{T}{2}\right) = 0$$

Они образуют систему уравнений относительно величин β_i, которые будут совместны, если

$$\left[\frac{D(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)}{D(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)}\right]_{k=0} \neq 0 \tag{6}$$

Принимая во внимание вид решения уравнений первого приближения (5), условие (6) можно преобразовать к форме

$$\left[\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(\beta_1, \beta_2)}\right]_{k=0} \neq 0, \quad \left[\frac{D(\psi_3, \psi_4)}{D(\beta_3, \beta_4)}\right]_{k=0} \neq 0 \tag{7}$$

Выполняя в (5) интегрирование, находим

$$x_1 = \sigma \sqrt{A}\,\mathrm{dn}\,w_1 \left\{\frac{1}{A\sigma^3\varkappa'^2}\left[\mathrm{E}(\mathrm{am}\,w_1) - \frac{\varkappa^2\,\mathrm{sn}\,w_1\,\mathrm{cn}\,w_1}{\mathrm{dn}\,w_1}\right]\beta_1 + \beta_2 + \ldots\right\} \tag{8}$$

$$y_1 = \sigma \sqrt{A}\,\varkappa' \frac{\mathrm{sn}\,w_2}{\mathrm{cn}\,w_2}\left\{-\frac{1}{A\sigma^3\varkappa'^2}\left[\frac{\mathrm{cn}\,w_2\,\mathrm{dn}\,w_2}{\mathrm{sn}\,w_2} + \mathrm{E}(\mathrm{am}\,w_2)\right]\beta_3 + \beta_4 + \ldots\right\}$$

С помощью (8) получаем, что условия существования периодических решений (7) сводятся к неравенствам

$$\left[\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(\beta_1, \beta_2)}\right]_{k=0} = -\frac{2}{\sigma\varkappa'^2}\,\mathrm{E}(\varkappa) \neq 0, \quad \left[\frac{D(\psi_3, \psi_4)}{D(\beta_3, \beta_4)}\right]_{k=0} = 2E(\varkappa)$$

которые выполняются для любых периодических решений, исключая $\varkappa' = 0$.

Установленным периодическим решениям системы (1) в общем случае соответствуют квазипериодические движения твердого тела.

В самом деле, обратимся к циклическому интегралу

$$\psi' = \frac{If - C\varphi' \cos\vartheta}{(A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi) + C\cos^2\vartheta}$$

Разлагая правую часть в ряд Фурье по кратным аргумента $\tau\,/\,T$ и интегрируя, получим $\psi = n(\tau - \tau_0) + \Phi(\tau)$, где $\Phi(\tau + T) = \Phi(\tau)$, а n — постоянная величина, зависящая от начальных условий. Очевидно, величина nT, вообще говоря, не кратна 2π, что и свидетельствует о справедливости сделанного заключения.

Поступила 6III 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аржаных И. С.* Об уравнениях вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Докл. АН СССР, 1954, т. 97, № 3.
2. *Демин В. Г.* Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. М., «Наука», 1968.

УДК 531.36

К ВОПРОСУ О СТРУКТУРЕ СИЛ

Д. Р. Меркин
(Ленинград)

Показано, что широкий класс нелинейных сил можно представить суммой потенциальных, неконсервативных позиционных, гироскопических и диссипативных сил.

Во многих случаях исследование устойчивости движения целесообразно проводить по структуре действующих сил. В последние годы этот метод, основы которого были заложены в работе [1], успешно развивается в основном применительно к линейным системам, для которых произвольные силы исчерпывающим образом могут быть представлены суммой потенциальных, неконсервативных позиционных, гироскопических и диссипативных сил. В данной работе показано, что такое представление сил реализуемо и для широкого класса нелинейных сил.