Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 531.36

# АКТИВНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

**Л. С. Саакян**

**(Ереван)**

Предлагается способ построения управляющих моментов, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной точки [1]. Под действием этих моментов осуществляется стабилизация жестко связанной с твердым телом оси по отношению к некоторой другой оси, совершающей заданное движение и проходящей через неподвижную точку. В случае гиростата рассматривается задача о стабилизации жестко связанной оси по отношению к неподвижной оси, проходящей через неподвижную точку.

1. Рассмотрим твердое тело с неподвижной точкой $O$. Пусть точка $O$ совпадает с центром масс тела; S — вектор в абсолютной системе координат $oXYZ$; **H** — вектор, жестко связанный с твердым телом; $oxyz$ — система координат, оси которой направлены по главным центральным осям эллипсоида инерции твердого тела; $S_0$, $\mathbf{H}_0$ — единичные орты векторов S, **H**. Пусть вектор S вращается вокруг точки $o$ с некоторой мгновенной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0(t)$. Обозначим

$$\alpha_1 = \cos(S_0,\ x),\quad \alpha_2 = \cos(S_0,\ y),\quad \alpha_3 = \cos(S_0,\ z)$$
$$\beta_1 = \cos(\mathbf{H}_0,\ x),\quad \beta_2 = \cos(\mathbf{H}_0,\ y),\quad \beta_3 = \cos(\mathbf{H}_0,\ z)$$

Уравнения движения запишем в форме динамического уравнения Эйлера

$$\theta\boldsymbol{\omega}^{\cdot} + \boldsymbol{\omega} \times \Theta\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M} \tag{1.1}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ — вектор мгновенной угловой скорости тела, $\theta$ — тензор инерции этого тела для неподвижной точки $o$, **M** — управляющий момент. Вектор $S_0$ удовлетворяет кинематическому соотношению

$$S_0^{\cdot} = S_0 \times (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0) \tag{1.2}$$

Рассмотрим следующую задачу. Найти управляющий момент **M**, под воздействием которого тело асимптотически приближалось бы к такому движению, чтобы вектор **H**, связанный с телом, принял направление подвижного вектора S. Исследовать устойчивость такого движения.

Рассмотрим момент **M**, аналогичный моменту, рассмотренному в [1]

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} + \Theta\boldsymbol{\omega}_0^{\cdot} + \boldsymbol{\omega}_0 \times \Theta\boldsymbol{\omega} + \lambda(\mathbf{H}_0 \times \Theta\boldsymbol{\omega}) + {}^1\!/_2\, \mathrm{grad}_{\alpha_i} U,\quad \lambda = \mathrm{const} > 0 \tag{1.3}$$

$$U = \alpha \sum_{i=1}^{3} (\alpha_i - \beta_i)^2, \quad \alpha = \mathrm{const} > 0 \tag{1.4}$$

Здесь знак $\mathrm{grad}_{\alpha_i} U$ означает, что операция градиента берется по компонентам $\alpha_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$. Уравнения движения (1.1) — (1,3) допускают следующее частное решение ($\mu$ — некоторый момент, который на движении (1.5) обращается в нуль):

$$\omega = \omega_0 + \lambda \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{H}_0 = \mathbf{S}_0 \tag{1.5}$$

Исследуем устойчивость решения (1.5). Составим уравнения возмущенного движения, приняв для вариаций переменных следующие обозначения:

$$p - p_0 - \lambda\beta_1 = p_1, \quad q - q_0 - \lambda\beta_2 = q_1, \quad r - r_0 - \lambda\beta_3 = r_1, \quad \alpha_i - \beta_i = \delta_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1.6}$$

Имеем

$$Ap_1^{\bullet} = \lambda\,(B\beta_2 r_1 - C\beta_3 q_1) + Bq_0 r_1 - Cr_0 q_1 + (B - C)q_1 r_1 + \alpha\delta_1 + \mu_1 \quad (1\ 2\ 3) \tag{1.7}$$

$$\delta_1^{\bullet} = \beta_2 r_1 - \beta_3 q_1 + \lambda\,(\beta_3\delta_2 - \beta_2\delta_3) + \delta_2 r_1 - \delta_3 q_1 \quad (1\ 2\ 3) \tag{1.8}$$

Символ (123) означает, что два последующих уравнения получаются из (1.7), (1.8) циклической перестановкой.

Рассмотрим следующую функцию:

$$2V = Ap_1^2 + Bq_1^2 + Cr_1^2 - 2\lambda\,(Ap_1\delta_1 + Bq_1\delta_2 + Cr_1\delta_3) + \alpha\,(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2) \tag{1.9}$$

При

$$\alpha > \lambda^2 m_1, \quad m_1 = \max\{A, B, C\} \tag{1.10}$$

Функция (1.9) — определенно-положительная функция от вариаций переменных системы. Составим полную производную функцию (1.9) по времени в силу уравнений возмущенного движения (1.7), (1.8) и положим

$$\begin{aligned}\mu_1 &= -Kp_1 - [K - \lambda\,(B + C)]\,(\beta_3 q_1 - \beta_2 r_1) - (Bq_0 r_1 - Cr_0 q_1)\\ \mu_2 &= -Kq_1 - [K - \lambda\,(A + C)]\,(\beta_1 r_1 - \beta_3 p_1) - (Cr_0 p_1 - Ap_0 r_1)\\ \mu_3 &= -Kr_1 - [K - \lambda\,(A + B)]\,(\beta_2 p_1 - \beta_1 q_1) - (Ap_0 q_1 - Bq_0 p_1), \quad K = \alpha/\lambda > 0\end{aligned} \tag{1.11}$$

Тогда получим

$$V^{\bullet} = -K\,[(p_1 - \lambda\delta_1)^2 + (q_1 - \lambda\delta_2)^2 + (r_1 - \lambda\delta_3)^2] \tag{1.12}$$

Функция (1.12) — знакопостоянная отрицательная функция переменных $p_1$, $q_1$, $r_1$, $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$, а многообразие $E$ точек, где $V^{\bullet} = 0$, имеет вид

$$p_1 = \lambda\delta_1, \quad q_1 = \lambda\delta_2, \quad r_1 = \lambda\delta_3 \tag{1.13}$$

При значениях (1.13) уравнения движения (1.8) удовлетворяются тождественно, а уравнения (1.7) принимают вид

$$\lambda\,(B - C)\delta_2\delta_3 + (K - \lambda C)\,\beta_2\delta_3 - (K - \lambda B)\beta_3\delta_2 = 0 \quad (1\ 2\ 3) \tag{1.14}$$

Заметим, что если из какого-либо уравнения системы (1.14) определить одно из $\delta_i$ ($i = 1, 2, 3$) и подставить в другое уравнение, то получим третье уравнение, поэтому одно из уравнений системы (1.14) можно исключить из рассмотрения. Из первого уравнения (1.14) определим $\delta_2$, а из второго $\delta_1$. Подставив эти значения в соотношение

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + 2\,(\beta_1\delta_1 + \beta_2\delta_2 + \beta_3\delta_3) = 0 \tag{1.15}$$

получим следующее уравнение для определения $\delta_3$:

(1.16) $$f(\delta_3) = (K - \lambda C)^2 \beta_1^2 \delta_3 \Delta_1^2 + (K - \lambda C)^2 \beta_2^2 \delta_3 \Delta_2^2 + 2(K - \lambda C)\beta_1^2 \Delta_1 + 2(K - \lambda C)\beta_2^2 \Delta_2 + \delta_3 + 2\beta_3 = 0$$
$$\Delta_1^{-1} = [(K - \lambda A)\beta_3 - \lambda(A - C)\delta_3], \quad \Delta_2^{-1} = [(K - \lambda B)\beta_3 - \lambda(B - C)\delta_3]$$

Функция $f(\delta_3)$ на отрезке $[-1 - \beta_3, 1 - \beta_3]$ меняет знак.

Обозначим через $l_3$ корень уравнения (1.16). Подставляя значение $\delta_3 = l_3$ в уравнения (1.14), определим $\delta_1 = l_1$, $\delta_2 = l_2$. Тогда многообразие (1.13) не будет содержать других целых движений системы, кроме невозмущенного движения

(1.17) $$p_1 = q_1 = r_1 = 0, \quad \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$$

если начальные возмущения принадлежат области

(1.18) $$p_{10}^2 + q_{10}^2 + r_{10}^2 < \lambda^2 l^2, \quad \delta_{10}^2 + \delta_{20}^2 + \delta_{30}^2 < l^2, \quad l^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2$$

Таким образом, при выполнении равенств (1.11) невозмущенное движение (1.17) асимптотически устойчиво для всех начальных возмущений из области (1.18) [2].

*Теорема 1*. Пусть начальные возмущения принадлежат области (1.18). Тогда при выполнении условия (1.10) и равенств (1.11) твердое тело под действием момента

(1.19) $$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} + \Theta\boldsymbol{\omega}_0^{\cdot} + \boldsymbol{\omega}_0 \times \Theta\boldsymbol{\omega} + \lambda(\mathbf{H}_0 \times \Theta\boldsymbol{\omega}) + {}^1/_2\, \mathrm{grad}_{\alpha_i} U$$

либо совершает движение

(1.20) $$\boldsymbol{\omega} = \lambda \mathbf{H}_0 + \boldsymbol{\omega}_0, \quad \mathbf{H}_0 = \mathbf{S}_0$$

либо асимптотически приближается к такому движению; при этом движение (1.20) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

*Следствие 1*. Пусть вектор $\mathbf{H}$ совпадает с одной из полуосей эллипсоида инерции тела. Тогда, если число $K$ определить согласно неравенству

(1.21) $$\frac{K - \lambda m_1}{\lambda(m_1 - m_2)} > 2, \quad m_2 = \min\{A, B, C\}$$

то движение (1.20) асимптотически устойчиво для всех начальных возмущений из области

(1.22) $$p_{10}^2 + q_{10}^2 + r_{10}^2 < 4\lambda^2, \quad \delta_{10}^2 + \delta_{20}^2 + \delta_{30}^2 < 4$$

Если вектор $\mathbf{H}$ совпадает с одной из полуосей эллипсоида инерции тела и в выражении момента (1.19) отсутствует член $\lambda(\mathbf{H}_0 \times \Theta\boldsymbol{\omega})$, то, как показал В. И. Зубов [1], при некоторых условиях, наложенных на момент $\boldsymbol{\mu}$, движение (1.20) условно асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Пусть теперь $\mathbf{S}$ — фиксированный вектор в абсолютной системе координат $oXYZ$.

*Следствие 2*. Пусть начальные возмущения принадлежат области (1.18). Тогда при выполнении условия (1.10) и равенств (1.11) ($p_0 = q_0 = r_0 = 0$) твердое тело под действием момента

(1.23) $$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} + \lambda(\mathbf{H}_0 \times \Theta\boldsymbol{\omega}) + {}^1/_2\, \mathrm{grad}_{\alpha_i} U$$

либо совершает движение

(1.24) $\omega = \lambda \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{H}_0 = \mathbf{S}_0$

либо асимптотически приближается к такому движению; при этом движение (1.24) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Пусть число $K$ определяется согласно (1.21), и вектор $\mathbf{H}$ совпадает с одной из полуосей эллипсоида инерции тела. Тогда постоянные вращения тела вокруг наименьшей ($A > B > C$) и наибольшей ($A < B < C$) полуосей эллипсоида инерции тела асимптотически устойчивы для всех начальных возмущений из области (1.22).

Постоянное вращение вокруг средней полуоси эллипсоида инерции тела будет асимптотически устойчивым для всех начальных возмущений из области (1.22), если ($A > B > C$) число $K$ определить условием

$$K > \max \{ \lambda (2B - C), \lambda (3A - 2B)\}$$

Если в выражении (1.23) момент $\mu$ отсутствует, то невозмущенное движение (1.17) неустойчиво, так как характеристическое уравнение системы первого приближения уравнений возмущенного движения (1.7), (1.8) ($p_0 = q_0 = r_0 = 0$) имеет, кроме нулевого, по крайней мере один положительный корень.

$$\Delta (\zeta) = \zeta \varphi (\zeta) = 0$$

Здесь

$$\varphi (0) = -\lambda^4 K[\beta_1^2\beta_2^2 (A - B)^2 + \beta_1^2\beta_3^2 (A - C)^2 + \beta_2^2\beta_3^2 (C - B)^2] < 0, \quad \varphi(\zeta \to +\infty) \to +\infty$$

Далее предполагается, что $\mathbf{S}$ — фиксированный вектор в абсолютной системе координат $oXYZ$, т. е. $\omega_0 = 0$.

**2.** Рассмотрим движение твердого тела в центральном ньютоновском поле сил. Пусть неподвижная точка тела $O$ закреплена на расстоянии $R$ от центра притяжения $O_1$. Ось $oZ$ неподвижной системы координат $oXYZ$ направлена от центра притяжения, $\mathbf{S}_0$ — единичный орт этой оси. Уравнения движения тела с учетом моментов гравитационных сил имеют вид ($g_0$ — ускорение силы тяжести на расстоянии $R$)

(2.1) $\Theta\omega^{\cdot} + \omega \times \Theta\omega - \nu (\mathbf{S}_0 \times \Theta \mathbf{S}_0) = \mathbf{M}, \quad \mathbf{S}_0^{\cdot} = \mathbf{S}_0 \times \omega, \quad \nu = 3g_0/R$

Рассмотрим момент

(2.2) $\mathbf{M} = \mu^\circ + \lambda (\mathbf{H}_0 \times \Theta\omega) - \nu (\mathbf{H}_0 \times \Theta \mathbf{S}_0) + {}^1/_2 \operatorname{grad}_{\alpha_i} U$

Уравнения движения (2.1), (2.2) допускают частное решение

(2.3) $\omega = \lambda \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{H}_0 = \mathbf{S}_0$

Исследуем устойчивость решения (2.3). Сохраняя те же обозначения (1.6) ($p_0 = q_0 = r_0 = 0$), составим уравнения возмущенного движения

(2.4) $Ap_1^{\cdot} = \lambda (B\beta_2 r_1 - C\beta_3 q_1) + (B - C)q_1 r_1 + \nu (C - B)\delta_2\delta_3 + \nu (C\beta_3\delta_2 - B\beta_2\delta_3) + \alpha\delta_1 + \mu_1^\circ \quad (1\ 2\ 3)$

(2.5) $\delta_1^{\cdot} = \beta_2 r_1 - \beta_3 q_1 + \lambda (\beta_3\delta_2 - \beta_2\delta_3) + r_1\delta_2 - q_1\delta_3 \quad (1\ 2\ 3)$

Функция

$$2V = Ap_1^2 + Bq_1^2 + Cr_1^2 - 2\lambda\,(Ap_1\delta_1 + Bq_1\delta_2 + Cr_1\delta_3) + (\alpha + \nu A)\delta_1^2 + (\alpha + \nu B)\delta_2^2 + (\alpha + \nu C)\,\delta_3^2 \tag{2.6}$$

$$\alpha > (\lambda^2 - \nu)\,m_1, \quad m_1 = \max\,\{A,\ B,\ C\} \tag{2.7}$$

будет определенно-положительной относительно входящих в нее переменных.

Положим

$$\mu_1^0 = \mu_1 - \nu\,(B + C)\,(\beta_3\delta_2 - \beta_2\delta_3), \quad \mu_2^\circ = \mu_2 - \nu\,(A + C)\,(\beta_1\delta_3 - \beta_3\delta_1) \tag{2.8}$$

$$\mu_3^0 = \mu_3 - \nu\,(A + B)\,(\beta_2\delta_1 - \beta_1\delta_2)$$

где $\mu_i$ — функции (1.11) ($p_0 = q_0 = r_0 = 0$). Производная функции (2.6) по времени, составленная в силу уравнений возмущенного движения (2.4), (2.5) с учетом (1.11), (2.8), имеет вид (1.12).

Пусть $\lambda^2 = \nu$, тогда уравнения (2.4) при значениях $p_1 = \lambda\delta_1$, $q_1 = \lambda\delta_2$, $r_1 = \lambda\delta_3$ принимают вид $\beta_2\delta_3 - \beta_3\delta_2 = 0$, $\beta_3\delta_1 - \beta_1\delta_3 = 0$, $\beta_1\delta_2 - \beta_2\delta_1 = 0$.

Поэтому многообразие (1.14), где $V^\cdot = 0$ не содержит других целых движений системы, кроме невозмущенного движения (1.17), если начальные возмущения принадлежат области (1.22).

*Теорема 2.* Пусть $\lambda^2 = \nu$ и начальные возмущения принадлежат области (1.22). Тогда при выполнении равенств (1.11), (2.8) твердое тело под действием момента (2.2) либо совершает движение (2.3), либо асимптотически приближается к такому движению, при этом движение (2.3) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

3. Рассмотрим твердое тело с неподвижной точкой, по главным осям инерции которого расположены оси трех однородных симметричных маховиков. Такая система относится к типу гиростатов, т. е. систем, распределение масс которых не изменяется в процессе движения. Закон о моменте количества движения дает следующие уравнения:

$$C_1p^\cdot + J_1\Omega_1^\cdot + (C_3 - C_2)\,qr + H_3q - H_2r = 0 \quad (1\ 2\ 3), \quad H_i = J_i\Omega_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{3.1}$$

Здесь $C_i$ — главные центральные моменты инерции гиростата; $J_i$ — соответственно моменты инерции маховиков; $\Omega_i$ — угловые скорости вращения маховиков относительно тела; $p$, $q$, $r$ — проекции вектора $\omega$ угловой скорости тела на оси $xyz$.

Уравнения движения маховиков следующие:

$$J_1\,(\Omega_1^\cdot + p^\cdot) = -M_x, \quad J_2\,(\Omega_2^\cdot + q^\cdot) = -M_y, \quad J_3\,(\Omega_3^\cdot + r^\cdot) = -M_z \tag{3.2}$$

Здесь $-M_x$, $-M_y$, $-M_z$ — моменты двигателей, приводящих маховики во вращение. Пусть

$$A = C_1 - J_1, \quad B = C_2 - J_2, \quad C = C_3 - J_3$$

Из уравнений (3.1), (3.2) получаем

$$Ap^\cdot = (C_2q + H_2)\,r - (C_3r + H_3)\,q + M_x \quad (1\ 2\ 3) \tag{3.3}$$

Уравнения (3.3) приняты за основу исследования. Здесь $M_x$, $M_y$, $M_z$ рассматриваются как моменты управления телом.

Введем новые переменные

$$z_1 = Ap + J_1(\Omega_1 + p), \quad z_2 = Bq + J_2(\Omega_2 + q), \quad z_3 = Cr + J_3(\Omega_3 + r) \tag{3.4}$$

Тогда совокупные уравнения (3.2), (3.3) примут вид

$$Ap^{\bullet} = z_2 r - z_3 q + M_x \quad (1\ 2\ 3) \tag{3.5}$$

$$z_1^{\bullet} = z_2 r - z_3 q \quad (1\ 2\ 3) \tag{3.6}$$

Уравнения (3.6) допускают первый интеграл

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = \mathrm{const} \tag{3.7}$$

Поэтому, если $z_1^2(0) + z_2^2(0) + z_3^2(0) < \infty$, то функции $z_i$ всегда ограничены. Существование интеграла (3.7) показывает, что свести одновременно к нулю все переменные невозможно. Этот вывод заставляет отказаться от попытки стабилизировать вращение гиростата и ограничиться задачей о стабилизации вращения самого тела [3].

Присоединим к (3.5) кинематические уравнения Пуассона ($\alpha_i$ ($i = 1$, 2, 3) — направляющие косинусы фиксированного вектора S с подвижными осями)

$$\alpha_1^{\bullet} = \alpha_2 r - \alpha_3 q \quad (1\ 2\ 3) \tag{3.8}$$

*Задача.* Найти управляющий момент **M**, под действием которого тело асимптотически приближалось бы к такому положению, чтобы вектор **H**, связанный с телом, принял направление фиксированного вектора S. Исследовать устойчивость такого положения. Рассмотрим момент (**z** — вектор с компонентами $z_1$, $z_2$, $z_3$)

$$\mathbf{M} = \mu - \lambda(\mathbf{z} \times \mathbf{H}_0) + {}^1/_2\, \mathrm{grad}_{\alpha_i} U \tag{3.9}$$

Уравнения (3.5), (3.9) и (3.8) допускают частное решение

$$\omega = \lambda \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{H}_0 = \mathbf{S}_0 \tag{3.10}$$

при любых $z_i$ ($i = 1, 2, 3$), удовлетворяющих условиям (3.6), (3.7).

При $\omega = \lambda \mathbf{H}_0$ уравнения (3.6) имеют вид

$$z_1^{\bullet} = \lambda(\beta_3 z_2 - \beta_2 z_3) \quad (1\ 2\ 3) \tag{3.11}$$

Уравнения (3.11) допускают два первых интеграла

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = h_1^2 = \mathrm{const}, \quad \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \beta_3 z_3 = h = \mathrm{const} \tag{3.12}$$

Общее решение уравнений (3.11) имеет вид

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 \cos\lambda t + b_1 \sin\lambda t + h\beta_1 \\ z_2 &= \frac{1}{1-\beta_1^2}[(\beta_3 b_1 - \beta_1\beta_2 a_1)\cos\lambda t - (\beta_3 a_1 + \beta_1\beta_2 b_1)\sin\lambda t] + h\beta_2 \\ z_3 &= -\frac{1}{1-\beta_1^2}[(\beta_2 b_1 + \beta_1\beta_3 a_1)\cos\lambda t - (\beta_2 a_1 - \beta_1\beta_3 b_1)\sin\lambda t] + h\beta_3 \\ a_1^2 + b_1^2 &= (1-\beta_1^2)(h_1^2 - h^2), \quad h_1 \geqslant h \end{aligned} \tag{3.13}$$

Пусть начальные условия $z_i(0)$ $(i = 1, 2, 3)$ для линейной системы (3.11) выбраны так, что

(3.14) $$h = h_1$$

Тогда $(a_1 = b_1 = 0)$ решение системы (3.11) принимает вид

(3.15) $$z_1 = h\beta_1, \quad z_2 = h\beta_2, \quad z_3 = h\beta_3$$

а момент (3.9) равен

(3.16) $$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} + {}^1/_2 \operatorname{grad}_{\alpha_i} U$$

Ограничимся рассмотрением случая (3.14), (3.15). Составим уравнения возмущенного движения, приняв для вариаций переменных следующие обозначения:

$$p_1 = p - \lambda\beta_1, \quad q_1 = q - \lambda\beta_2, \quad r_1 = r - \lambda\beta_3, \quad \alpha_i - \beta_i = \delta_i,$$
$$z_i - h\beta_i = \eta_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

Имеем

(3.17) $$Ap_1^{\bullet} = h(\beta_2 r_1 - \beta_3 q_1) + \lambda(\beta_3\eta_2 - \beta_2\eta_3) + \eta_2 r_1 - \eta_3 q_1 + {} + \alpha\delta_1 + \mu_1 \quad (1\ 2\ 3)$$
$$\delta_1^{\bullet} = \beta_2 r_1 - \beta_3 q_1 + \lambda(\beta_3\delta_2 - \beta_2\delta_3) + \delta_2 r_1 - \delta_3 q_1 \quad (1\ 2\ 3)$$
$$\eta_1^{\bullet} = h(\beta_2 r_1 - \beta_3 q_1) + \lambda(\beta_3\eta_2 - \beta_2\eta_3) + \eta_2 r_1 - \eta_3 q_1 \quad (1\ 2\ 3)$$

Обозначим через $\mathbf{x}$ вектор с компонентами $\{p_1, q_1, r_1, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3\}$, а через $\mathbf{y}$ — вектор с компонентами $\{p_1, q_1, r_1, \delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Рассмотрим функцию

(3.18) $$2V = Ap_1^2 + Bq_1^2 + Cr_1^2 - 2\lambda(Ap_1\delta_1 + Bq_1\delta_2 + Cr_1\delta_3) + {} + \alpha(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2) + (h\delta_1 - \eta_1)^2 + (h\delta_2 - \eta_2)^2 + (h\delta_3 - {} - \eta_3)^2$$

Функция (3.18) является $\mathbf{y}$-определенно-положительной [4] в области

(3.19) $$0 \leqslant |\mathbf{x}| < +\infty$$

если $\alpha > \lambda^2 m_1$, где $m_1 = \max\{A, B, C\}$. Кроме того, $V(\mathbf{x}) \to \infty$ при $|\mathbf{y}| \to \infty$. Полная производная функции (3.18) по времени, составленная в силу уравнений возмущенного движения (3.17), имеет вид

(3.20) $$V^{\bullet} = -h[(p_1 - \lambda\delta_1)^2 + (q_1 - \lambda\delta_2)^2 + (r_1 - \lambda\delta_3)^2]$$

где в уравнениях (3.17) положено $\alpha = \lambda h$, а функции $\mu_i$ $(i = 1, 2, 3)$ определены равенством

(3.21) $$\mu_1 = -hp_1 + \lambda(B\beta_3 q_1 - C\beta_2 r_1) + (B - C)q_1 r_1 - \lambda(\beta_3\eta_2 - {} - \beta_2\eta_3) - (\eta_2 r_1 - \eta_3 q_1)$$
$$\mu_2 = -hq_1 + \lambda(C\beta_1 r_1 - A\beta_3 p_1) + (C - A)p_1 r_1 - \lambda(\beta_1\eta_3 - {} - \beta_3\eta_1) - (\eta_3 p_1 - \eta_1 r_1)$$
$$\mu_3 = -hr_1 + \lambda(A\beta_2 p_1 - B\beta_1 q_1) + (A - B)p_1 q_1 - \lambda(\beta_2\eta_1 - {} - \beta_1\eta_2) - (\eta_1 q_1 - \eta_2 p_1)$$

Рассмотрим множество $\{\mathbf{x} : \mathbf{y} = 0\}$. Оно представляет собой совокупность всех решений линейных уравнений

$$\eta_1^{\bullet} = \lambda(\beta_3\eta_2 - \beta_2\eta_3) \quad (1\ 2\ 3)$$

т. е. является инвариантным. Многообразие $E$ точек, где (3.20) обращается в нуль, имеет вид $p_1 = \lambda\delta_1$, $q_1 = \lambda\delta_2$, $r_1 = \lambda\delta_3$, $\eta_i$ произвольны ($i = 1$, 2, 3).

При значениях $p_1 = \lambda\delta_1 = \lambda l_1$, $q_1 = \lambda\delta_2 = \lambda l_2$, $r_1 = \lambda\delta_3 = \lambda l_3$ первые шесть уравнений (3.17) удовлетворяются тождественно, а остальные три принимают вид

$$\eta_1^{\cdot} = \lambda\,[(\beta_3 + l_3)\,\eta_2 - (\beta_2 + l_2)\eta_3] + \lambda h\,(\beta_2 l_3 - \beta_3 l_2) \quad (1\ 2\ 3) \tag{3.22}$$

Уравнения (3.22) допускают первый интеграл

$$\eta_1\,(\beta_1 + l_1) + \eta_2\,(\beta_2 + l_2) + \eta_3\,(\beta_3 + l_3) = n = \mathrm{const} \tag{3.23}$$

Общее решение уравнений (3.22) имеет вид

$$\eta_i = \varphi_i\,(t) + n\,(\beta_i + l_i) + hl_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{3.24}$$

Здесь $\varphi_i\,(t)$ — периодические функции периода $2\pi$, $\varphi_i\,(t) + n\,(\beta_i + l_i)$ — общее решение однородной системы, $hl_i$ — частное решение неоднородной системы (3.22).

Подставляя решение (3.24) в интеграл (3.23) и учитывая соотношение

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + 2\,(\beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \beta_3 l_3) = 0$$

получаем, что $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 0$, т. е. $l_i = 0$. Таким образом, получаем, что множество $E \diagdown \{\mathbf{x} : \mathbf{y} = 0\}$ не содержит целых движений системы (3.17). Следовательно, при $h > \lambda m_1$ ($m_1 = \max\,\{A, B, C\}$) невозмущенное движение $\mathbf{x} = 0$ асимптотически $\mathbf{y}$-устойчиво в целом [5].

*Теорема* 3. Пусть начальные условия $z_i$ (0) ($i = 1, 2, 3$) линейной системы (3.11) выбраны согласно (3.12), (3.14). Тогда при выполнении условия $h > \lambda m_1$ твердое тело под действием момента

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} + {}^1/_2\,\mathrm{grad}_{\alpha_i}\,U$$

где $\boldsymbol{\mu}$ определяется согласно (3.21), либо совершает движение

$$\boldsymbol{\omega} = \lambda\mathbf{H}_0, \qquad \mathbf{H}_0 = \mathbf{S}_0$$

либо асимптотически приближается к такому движению; при этом движение (3.25) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

**4.** Пусть гиростат совершает движение вокруг центра масс при наличии гравитационных сил, при этом неподвижная точка гиростата $O$ закреплена на расстоянии $R$ от центра притяжения $O_1$.

Рассмотрим момент

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu}^{\circ} - \nu\,(\mathbf{H}_0 \times \Theta\mathbf{S}_0) + {}^1/_2\,\mathrm{grad}_{\alpha_i} U \tag{4.1}$$

Здесь $\Theta$ — тензор инерции гиростата для неподвижной точки $O$.

Пусть условие (3.14) выполнено. Тогда уравнения возмущенного движения с учетом моментов гравитационных сил имеют вид

$$\begin{aligned} Ap_1^{\cdot} &= h\,(\beta_2 r_1 - \beta_3 q_1) + \lambda\,(\beta_3\eta_2 - \beta_2\eta_3) + \eta_2 r_1 - \eta_3 q_1 + \\ &\quad + \nu\,(C_3 - C_2)\,\delta_2\delta_3 + \nu\,(C_3\beta_3\delta_2 - C_2\beta_2\delta_3) + \alpha\delta_1 + \mu_1^{\circ} \quad (1\ 2\ 3) \\ \delta_1^{\cdot} &= \beta_2 r_1 - \beta_3 q_1 + \lambda\,(\beta_3\delta_2 - \beta_2\delta_3) + \delta_2 r_1 - \delta_3 q_1 \quad (1\ 2\ 3) \\ \eta_1^{\cdot} &= h\,(\beta_2 r_1 - \beta_3 q_1) + \lambda\,(\beta_3\eta_2 - \beta_2\eta_3) + (\eta_2 r_1 - \eta_3 q_1)\ (1\ 2\ 3) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Функция

(4.3) $$2V = Ap_1^2 + Bq_1^2 + Cr_1^2 - 2\lambda\,(Ap_1\delta_1 + Bq_1\delta_2 + Cr_1\delta_3) + (\alpha + \nu C_1)\,\delta_1^2 + (\alpha + \nu C_2)\delta_2^2 + (\alpha + \nu C_3)\,\delta_3^2 + (h\delta_1 - \eta_1)^2 + (h\delta_2 - \eta_2)^2 + (h\delta_3 - \eta_3)^2$$

при

(4.4) $$h > \max\left\{\frac{(\lambda^2-\nu)\,A + \nu J_1}{\lambda},\ \frac{(\lambda^2-\nu)\,B + \nu J_2}{\lambda},\ \frac{(\lambda^2-\nu)\,C + \nu J_2}{\lambda}\right\}$$

является y-определенно-положительной функцией. Положим

(4.5) $$\mu_1^\circ = \mu_1 - \nu\,(C_2 + C_3)\,(\beta_3\delta_2 - \beta_2\delta_3),\quad \mu_2^\circ = \mu_2 - \nu\,(C_1 + C_3)\,(\beta_1\delta_3 - \beta_3\delta_1),\quad \mu_3^\circ = \mu_3 - \nu\,(C_1 + C_2)\,(\beta_2\delta_1 - \beta_1\delta_2)$$

где $\mu_i$ $(i = 1, 2, 3)$ — функции (3.21). Полная производная по времени от функции (4.3), составленная в силу уравнений возмущенного движения (4.2), с учетом равенств (3.21), (4.5) имеет вид

$$V^\cdot = -h\,[(p_1 - \lambda\delta_1)^2 + (q_1 - \lambda\delta_2)^2 + (r_1 - \lambda\delta_3)^2]$$

Множество $\{\mathbf{x} : \mathbf{y} = 0\}$ инвариантно, а множество $E \setminus \{\mathbf{x} : \mathbf{y} = 0\}$ не содержит целых траекторий системы (4.2) (это показывается аналогично 3). Следовательно, при выполнении условий (3.14), (4.4) невозмущенное движение $\mathbf{x} = 0$ асимптотически y-устойчиво в целом [5].

*Теорема* 4. Пусть начальные условия $z_i$ (0) $(i = 1, 2, 3)$ линейной системы (3.11) выбраны согласно (3.12), (3.14). Тогда при выполнении условия (4.4) твердое тело под действием момента (4.1), где $\mu^\circ$ определяется согласно равенствам (3.21), (4.5) при наличии гравитационных сил, либо совершает движение

(4.6) $$\omega = \lambda \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{H}_0 = \mathbf{S}_0$$

либо асимптотически приближается к такому движению; при этом движение (4.6) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

В заключение автор приносит благодарность В. В. Румянцеву за постановку задачи, постоянное внимание к работе.

Поступила 18 XI 1974

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Зубов В. И.* Об активном управлении вращательным движением твердого тела. Дифференциальные уравнения, 1970, т. 6, № 11.
2. *Красовский Н. Н.* Обобщение теорем второго метода Ляпунова. В кн. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения, доп. 3. М., «Наука», 1966.
3. *Летов А. М.* Динамика полета и управление. М., «Наука», 1969.
4. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных. Вестн. Моск. ун-та, 1957, № 4.
5. *Озиранер А. С., Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных. ПММ, 1972, т. 36, вып. 2.