Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ТРАНСТРОПНЫХ ПЛАСТИН

А. С. Космодамианский, В. А. Шалдырван

(Донецк)

В трехмерной постановке строится решение задач о напряженном состоянии транстропных многосвязных пластин любой толщины при симметричном и при кососимметричном их загружениях. Как и в работах [1, 2], при получении однородных решений типа А. И. Лурье — С. Г. Лехницкого [3, 4] используется полуобратный метод И. И. Воровича (см. [5–8] и др.). Определение напряженного состояния транстропных пластин проводится методом сведения задачи к решению функциональных систем, описанных в работах [9–12] применительно к изотропным толстым пластинам.

Аналогичные задачи для односвязных пластин асимптотическим методом рассмотрены в [1, 2].

1. Рассмотрим упругий однородный слой постоянной толщины $2h$, ослабленный произвольно расположенными круговыми цилиндрическими полостями, образующие которых нормальны к плоским граням. Будем считать, что слой испытывает малые деформации под действием внешних усилий, приложенных к боковым поверхностям полостей Ω_j ($j = 1, 2, \ldots, s$). Структура материала тела такова, что все направления в плоскостях, параллельных срединной, эквивалентны в смысле упругих свойств. Такие материалы будем называть транстропными [13]. К ним относятся, например, «звездные пластики», древесный пластик ДСП-Г, фанера Ф-60 [13], кристаллы кадмия, магния, цинка [14, 15] и др.

Уравнения обобщенного закона Гука для таких материалов имеют вид [16]

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) - \frac{\nu_z}{E_z}\sigma_{zz}, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\sigma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{xy}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) - \frac{\nu_z}{E_z}\sigma_{zz}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G_z}\sigma_{yz}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu_z}{E_z}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{E_z}\sigma_{zz}, \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G_z}\sigma_{xz}$$

Введем безразмерные величины

$$\xi = \frac{x}{R}, \quad \eta = \frac{y}{R}, \zeta = \frac{1}{\lambda}\frac{z}{R}, \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{2G}\sigma_{kl}, \quad \lambda = \frac{h}{R}$$

$$u_i = u_k/R \quad (i, j = \xi, \eta, \zeta;\ k, l = x, y, z)$$

где переменные ξ, η связаны со срединной плоскостью пластины, R — радиус одной из полостей. Тогда уравнение обобщенного закона Гука можно записать в такой форме (штрих означает производную по ζ):

$$\begin{aligned}
(1.1)\qquad & \sigma_{\xi\xi} = A_{11}\partial_1 u_\xi + A_{12}\partial_2 u_\eta + \lambda^{-1}A_{13}u_\zeta', \quad \sigma_{\xi\eta} = A_{66}(\partial_2 u_\xi + \partial_1 u_\eta)\\
& \sigma_{\eta\eta} = A_{12}\partial_1 u_\xi + A_{11}\partial_2 u_\eta + \lambda^{-1}A_{13}u_\zeta', \quad \sigma_{\xi\zeta} = A_{44}(\partial_1 u_\zeta + \lambda^{-1}u_\xi')\\
& \sigma_{\zeta\zeta} = A_{13}(\partial_1 u_\xi + \partial_2 u_\eta) + \lambda^{-1}A_{33}u_\zeta', \quad \sigma_{\eta\zeta} = A_{44}(\partial_2 u_\zeta + \lambda^{-1}u_\eta')
\end{aligned}$$

Здесь

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial\xi}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial\eta}, \quad A_{33} = \frac{\mu_2}{2}, \quad A_{44} = \frac{1}{2s_0^2}, \quad A_{66} = \frac{1}{2}, \quad A_{13} = \mu_1\nu_z$$

$$A_{11} = \mu_0^{-1}(1 - \nu_2\nu_z), \quad A_{12} = \mu_0^{-1}(\nu + \nu_2\nu_z), \quad \mu_0 = 1 - \nu - 2\nu_2\nu_z, \quad s_0^2 = G / G_z$$

$$\mu_3 = 2\mu_1\nu_z + s_0^{-2}, \quad \mu_2 = 2\mu_1(1-\nu)\nu_z/\nu_2, \quad \mu_1 = \mu_0^{-1}(1+\nu),$$
$$\nu_2 = \nu_z E / E_z, \quad \mu = (1 - 2\nu)^{-1}$$

Энергия деформации должна быть положительной, поэтому на коэффициенты A_{ij} накладываются ограничения [15]

$$A_{44} > 0, \quad A_{11} > |A_{12}|, \quad (A_{11} + A_{12})A_{33} > 2A_{13}^2$$

Подставим выражения (1.1) в уравнения равновесия. В результате получим уравнения теории упругости для транстропной среды в перемещениях ($D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$ — двумерный оператор Лапласа)

$$\begin{aligned}
(1.2)\qquad & (\lambda s_0)^{-2}u_\xi'' + D^2 u_\xi + \mu_1\partial_1(\partial_1 u_\xi + \partial_2 u_\eta) + \lambda^{-1}\mu_3\partial_1 u_\zeta' = 0\\
& (\lambda s_0)^{-2}u_\eta'' + D^2 u_\eta + \mu_1\partial_2(\partial_1 u_\xi + \partial_2 u_\eta) + \lambda^{-1}\mu_3\partial_2 u_\zeta' = 0\\
& \lambda^{-2}\mu_2 u_\zeta'' + s_0^{-2}D^2 u_\zeta + \lambda^{-1}\mu_3(\partial_1 u_\xi' + \partial_2 u_\eta') = 0
\end{aligned}$$

Теперь краевая задача может быть сформулирована так. Найти решение системы (1.2), удовлетворяющее следующим граничным условиям:

$$(1.3)\qquad \sigma_{\xi\zeta} = \sigma_{\eta\zeta} = \sigma_{\zeta\zeta} = 0, \quad \zeta = \pm 1$$

$$(1.4)\qquad \sigma_{rr} = P_r^j(\theta_j, \zeta), \quad \sigma_{r\theta} = P_\theta^j, \quad \sigma_{r\zeta} = P_\zeta^j \text{ на } \Omega_j$$

Здесь r_j, θ_j, ζ — цилиндрическая система координат, связанная с центром j-й полости, P_k^j ($k = r, \theta, \zeta$) — заданные внешние нагрузки, которые всегда можно разложить на симметричную и кососимметричную составляющие. Как и в работе [3], в задаче растяжения — сжатия P_r^j, P_θ^j — четные, а P_ζ^j — нечетные функции ζ, а в задаче изгиба — наоборот, P_r^j, P_θ^j — нечетные, P_ζ^j — четные.

Решение названных задач будем строить, используя метод однородных решений, в виде суммы бигармонического, вихревого и потенциального напряженных состояний [1–3, 5, 6]

$$(1.5)\qquad u_i = u_{iB} + u_{iR} + u_{iP}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ijB} + \sigma_{ijR} + \sigma_{ijP} \quad (i, j = \xi, \eta, \zeta)$$

2. Вихревое решение будем искать в виде

$$(2.1)\qquad u_{\xi R}(\xi, \eta, \zeta) = p(\zeta)\,\partial_2 B(\xi, \eta), \quad u_{\eta R} = -p\partial_1 B, \quad u_{\zeta R} = 0$$

Здесь принимается, что перемещения u_ξ, u_η — проекции на оси ξ, η ротора некоторой функции [1, 2, 5, 6].

Из системы (1.2) имеем

$$(2.2)\qquad \partial_i(\lambda^{-2}s_0^{-2}p''B + pD^2B) = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

Чтобы выражения (2.1) удовлетворяли системе (1.2), достаточно потребовать равенства нулю выражения, стоящего в скобках формулы (2.2) Это требование, в соответствии с методом разделения переменных, может быть записано так (δ — константа разделения):

$$p''(\zeta) + \delta^2 s_0^2 p(\zeta) = 0 \tag{2.3}$$

$$D^2 B(\xi, \eta) - (\delta / \lambda)^2 B(\xi, \eta) = 0 \tag{2.4}$$

Потребуем удовлетворения граничных условий на плоских гранях (1.3). В результате получим

$$p'(\pm 1)\, \partial_i B(\xi, \eta) = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

Но $\partial_i B \not\equiv 0$ (в противном случае имели бы тривиальное решение), поэтому

$$p'(\pm 1) = 0 \tag{2.5}$$

Следовательно, в связи с нахождением функции $p(\zeta)$ приходим к задаче Штурма — Лиувилля (2.3), (2.5).

Так как в задаче растяжения — сжатия перемещения u_ξ, u_η — четные, а в задаче изгиба — нечетные функции переменной ζ, то решение задачи (2.3), (2.5) можно записать так:

$$\begin{gathered} p_k^+(\zeta) = b_k^+ \cos \delta_k^+ s_0 \zeta, \quad p_k^-(\zeta) = b_k^- \sin \delta_k^- s_0 \zeta \\ \delta_k^+ = \delta^+ = k\pi / s_0, \quad \delta_k^- = \delta^- = (2k - 1)\pi / 2s_0, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots \\ (\sin \delta^+ s_0 = 0, \quad \cos \delta^- s_0 = 0, \quad \delta^\pm \neq 0) \end{gathered} \tag{2.6}$$

Здесь $b_k^\pm$ — произвольные постоянные, а $\delta_k^\pm$ — корни уравнений, приведенных в скобках. Этим же значениям $\delta_k^\pm$ соответствуют решения уравнений (2.4).

Из выражений (2.4) и (2.6) следует, что функции $B_k(\xi, \eta)$ — четные, а $p_k^\pm(\zeta)$ могут быть подобраны таковыми за счет соответствующего выбора постоянных $b_k^\pm$. Поэтому суммирование по $\delta_k^\pm < 0$ новых решений не дает, и для обеих задач окончательно можно записать

$$u_{\xi R}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(\zeta)\, \partial_2 B_k(\xi, \eta), \quad u_{\eta R} = -\sum_{k=1}^{\infty} p_k \partial_1 B_k, \quad u_{\zeta R} = 0 \tag{2.7}$$

Подставляя выражения (2.7) в формулы (1.1), получим

$$\begin{gathered} \sigma_{\xi\xi R} = -\sigma_{\eta\eta R} = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \partial_1 \partial_2 B_k, \quad \sigma_{\xi\eta R} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} p_k (\partial_2^2 - \partial_1^2) B_k \\ \sigma_{\xi\zeta R} = -\sum_{k=1}^{\infty} g_k(\zeta)\, \partial_2 B_k, \quad \sigma_{\eta\zeta R} = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \partial_1 B_k, \quad \sigma_{\zeta\zeta R} = 0 \end{gathered} \tag{2.8}$$

В формулах (2.7) и (2.8) обозначено

$$\begin{gathered} p_k^+(\zeta) = 2\lambda s_0 \cos \delta_k^+ s_0 \zeta, \quad p_k^-(\zeta) = \frac{2\lambda s_0}{\delta_k^-} \sin \delta_k^- s_0 \zeta \\ g_k^+(\zeta) = \delta_k^+ \sin \delta_k^+ s_0 \zeta, \quad g_k^-(\zeta) = -\cos \delta_k^- s_0 \zeta \end{gathered} \tag{2.9}$$

В изотропном случае $G_z = G$ и, следовательно, $s_0 = 1$. Формулы (2.7)—(2.9) в этом случае совпадают с приведенными в работе [3].

3. Потенциальное решение ищем в виде [5, 6]

$$u_{\xi P}(\xi,\ \eta,\ \zeta) = n(s)\,\partial_1 C(\xi,\ \eta), \quad u_{\eta P} = n\partial_2 C, \quad u_{\zeta P} = q(\zeta)\,C \tag{3.1}$$

Функции $n(\zeta)$, $q(\zeta)$, $C(\xi, \eta)$ определим, как и в п. 2, удовлетворяя уравнениям (1.2) и условиям (1.3).

Из системы (1.2) получаем

$$\begin{gathered}\partial_i\,[(\lambda s_0)^{-2} n''(\zeta) + (1+\mu_1)\,D^2 C n(\zeta) + \lambda^{-1}\mu_3 q'(\zeta)\,C] = 0\\ \lambda^{-2}\mu_2 q''(\zeta)\,C + (s_0^{-2} q + \lambda^{-1}\mu_3 n')\,D^2 C = 0 \quad (i=1,2)\end{gathered}\tag{3.2}$$

В системе (3.2) переменные разделятся, если положить

$$D^2 C = (\gamma / \lambda)^2 C \tag{3.3}$$

Учитывая зависимости (3.2) и (3.3), сможем удовлетворить системе (1.2), потребовав выполнения следующих условий:

$$\begin{gathered}n''(\zeta) + (1+\mu_1)\gamma^2 s_0^2 n(\zeta) + \lambda\mu_3 s_0^2 q'(\zeta) = 0\\ q''(\zeta) + (\gamma s_0)^2 \mu_2^{-1} q(\zeta) + \gamma^2\mu_3(\lambda\mu_2)^{-1} n'(\zeta) = 0\end{gathered}\tag{3.4}$$

Решение системы (3.4) будем искать методом Эйлера. Её характеристическое уравнение имеет вид

$$S^4 + 2b_1\gamma^2 S^2 + b_2\gamma^4 = 0, \quad b_1 = \frac{s_0^2 - \nu_2}{1-\nu}, \quad b_2 = \frac{\nu_2}{\nu_z}\frac{1-\nu_2\nu_z}{1-\nu^2} \tag{3.5}$$

Для написания общего решения системы (3.4) рассмотрим следующие возможные случаи:

1°. Если $b_1 > 0$ и $b_1^2 - b_2 \neq 0$, то

$$\begin{gathered}S_{1,2} = \pm i\gamma s_1, \quad S_{3,4} = \pm i\gamma s_2\\ n^+(\zeta) = H_1^+ \cos\gamma^+ s_1\zeta + H_2^+ \cos\gamma^+ s_2\zeta,\\ n^-(\zeta) = H_1^- \sin\gamma^- s_1\zeta + H_2^- \sin\gamma^- s_2\zeta\\ q^+(\zeta) = Q_1^+ \sin\gamma^+ s_1\zeta + Q_2^+ \sin\gamma^+ s_2\zeta,\\ q^-(\zeta) = Q_1^- \cos\gamma^- s_1\zeta + Q_2^- \cos\gamma^- s_2\zeta\end{gathered}\tag{3.6}$$

При этом

$$s_{1,2} = \sqrt{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - b_2}}$$

действительные различные, если $b_1^2 - b_2 > 0$, и комплексно-сопряженные, если $b_1^2 < b_2$.

2°. Если $b_1 > 0$ и $b_1^2 = b_2$, то

$$\begin{gathered}S_{1,2} = S_{3,4} = \pm i\gamma s_1, \quad s_1 = \sqrt{b_1}\\ n^+(\zeta) = H_1^+ \cos\gamma^+ s_1\zeta + H_2^+\zeta \sin\gamma^+ s_1\zeta, \quad n^- = H_1^- \sin\gamma^- s_1\zeta +\\ + H_2^-\zeta \cos\gamma^- s_1\zeta\\ q^+(\zeta) = Q_1^+ \sin\gamma^- s_1\zeta + Q_2^+\zeta \cos\gamma^+ s_1\zeta, \quad q^- = Q_1^- \cos\gamma^- s_1\zeta +\\ + Q_2^-\zeta \sin\gamma^- s_1\zeta\end{gathered}\tag{3.7}$$

В частности, если $\nu_z = \nu_2 = \nu$ и $G_z = G$, то $s_0^2 = s_1 = b_1 = 1$, т. е. решение для изотропной пластины получается из этого случая.

3°. Если $b_1 < 0$ и $b_1^2 - b_2 \neq 0$, то $S_{1,2} = \pm \gamma s_1$, $S_{3,4} = \pm \gamma s_2$. При этом

$$s_{1,2} = \sqrt{|b_1| \pm \sqrt{b_1^2 - b_2}}$$

когда $b_1^2 < b_2$,
и

$$s_{1,2} = \sqrt{|b_1| \pm i\sqrt{b_2 - b_1^2}}$$

когда $b_1^2 < b_2$. Выражения для $n^\pm(\zeta)$ и $q^\pm(\zeta)$ получаются из формул (3.6) заменой круговых функций соответствующими гиперболическими.

4°. Если $b_1 < 0$ и $b_1^2 = b_2$, то $S_{1,2} = S_{3,4} = \pm \gamma s_1$, $s_1 = \sqrt{|b_1|}$. Выражения для $n^\pm(\zeta)$ и $q^\pm(\zeta)$ получаются из (3.7) с помощью той же замены, что и в случае 3°.

Постоянные $H_m^\pm$, $Q_m^\pm$ $(m = 1, 2)$ в формулах (3.6), (3.7) выражаются одна через другую. Например

$$Q_m^+ = A_m^+ H_m^+, \quad Q_m^- = -A_m^- H_m^-, \qquad (3.8)$$
$$A_m^\pm = (\gamma^\pm / \lambda)\, s_m \mu_3 s_0^2 (1 - s_0^2 \mu_2 s_m^2)^{-1}$$

Аналогичные связи устанавливаются и в других случаях.

Постоянные $H_m^\pm$ определим из граничных условий на плоских гранях (1.3). Например, для случая 1° получим

$$a_1 \cos \gamma^+ s_1 H_1^+ + a_2 \cos \gamma^+ s_2 H_2^+ = 0, \quad a_1 \sin \gamma^- s_1 H_1^- + a_2 \sin \gamma^- s_2 H_2^- = 0 \qquad (3.9)$$
$$d_1 s_1 \sin \gamma^+ s_1 H_1^+ + d_2 s_2 \sin \gamma^+ s_2 H_2^+ = 0, \quad d_1 s_1 \cos \gamma^- s_1 H_1^- + d_2 s_2 \cos \gamma^- s_2 H_2^- = 0$$
$$a_m = \left(1 + \frac{1-\nu}{\nu_2} s_m^2\right)(1 - \mu_2 s_0^2 s_m^2)^{-1}, \quad d_m = 2\nu_z \mu_1 s_0^m a_m$$

Для существования нетривиального решения систем (3.9) необходимо, чтобы их определитель был равен нулю. Отсюда следует уравнение для определения γ, которое можно записать в форме [4]

$$(s_1 + s_2) \sin (s_1 - s_2)\gamma^\pm \pm (s_1 - s_2) \sin \pm (s_1 + s_2)\gamma^\pm = 0 \qquad (3.10)$$

Трансцендентные уравнения определяют собственные значения соответствующих однородных задач для потенциального напряженного состояния — параметры $\gamma_p^\pm$. Этим собственным значениям соответствуют собственные функции $n_p^\pm(\zeta)$ и $q_p^\pm(\zeta)$, а также функции $C_p(\xi, \eta)$, определяемые из уравнения (3.3).

Из выражений (3.9) следует, что

$$H_{2p}^+ = -\frac{a_1 \cos s_1 \gamma_p^+}{a_2 \cos s_2 \gamma_p^+} H_{1p}^+, \quad H_{2p}^- = -\frac{a_1 \sin s_1 \gamma_p^-}{a_2 \sin s_2 \gamma_p^-} H_{1p}^-$$

Уравнения (1.2) и условия (1.3) при оставшихся произвольными постоянных $H_{1p}^\pm$ в выражениях (3.6) будут удовлетворены.

Согласно уравнению (3.3), функции $C_p^\pm(\xi, \eta)$ четны по $\gamma_p^\pm$. Поэтому постоянные $H_{1p}^\pm$ подберем так, чтобы перемещения были четными по $\gamma_p^\pm$, что позволит рассматривать только те корни уравнения (3.10), действительная часть которых больше нуля. Указанные постоянные возьмем таким $H_{1p}^+ = \cos\gamma_p{}^+ s_2$, $H_{1p}^- = \sin\gamma_p{}^- s_2$. Тогда

$$n_p{}^+(\zeta) = \cos\gamma_p{}^+ s_2 \cos\gamma_p{}^+ s_1 \zeta - s_3 \cos\gamma_p{}^+ s_1 \cos\gamma_p{}^+ s_2 \zeta \tag{3.11}$$
$$s_3 = a_1 / a_2$$
$$q_p{}^+(\zeta) = S_{1p}^+ \cos\gamma_p{}^+ s_2 \sin\gamma_p{}^+ s_1 \zeta - S_{2p}{}^+ s_3 \cos\gamma_p{}^+ s_1 \sin\gamma_p{}^+ s_2 \zeta,$$
$$S_{mp}{}^+ = A_m{}^+(\gamma_p)$$

Выражения для $n_p{}^-(\zeta)$, $q_p{}^-(\zeta)$ получаются из приведенных заменой $\cos x^+$ на $\sin x^-$, а $\sin x^+$ на $-\cos x^-$, где $x^\pm = s_m\gamma_p{}^\pm$ или $x^\pm = s_m\gamma_p{}^\pm\zeta$.

Формулы для перемещений можно записать теперь так:

$$u_{\xi p} = \sum_{p=1}^{\infty} n_p(\zeta)\,\partial_1 C_p(\xi,\eta), \quad u_{\eta p} = \sum_{p=1}^{\infty} n_p \partial_2 C_p, \quad u_{\zeta p} = \sum_{p=1}^{\infty} q_p C_p \tag{3.12}$$

Из уравнений закона Гука имеем

$$\sigma_{\xi\xi p} = \sum_{p=1}^{\infty} [s_p(\zeta) + n_p(\zeta)\,\partial_1{}^2]\, C_p, \quad \sigma_{\xi\zeta p} = \sum_{p=1}^{\infty} r_p(\zeta)\,\partial_1 C_p \tag{3.13}$$

$$\sigma_{\eta\eta p} = \sum_{p=1}^{\infty} [s_p(\zeta) + n_p(\xi)\,\partial_2{}^2]\, C_p, \quad \sigma_{\eta\zeta p} = \sum_{p=1}^{\infty} r_p(\zeta)\,\partial_2 C_p$$

$$\sigma_{\zeta\zeta p} = \sum_{p=1}^{\infty} t_p(\zeta)\, C_p, \quad \sigma_{\xi\eta p} = \sum_{p=1}^{\infty} n_p(\zeta)\,\partial_1\partial_2 C_p$$

$$s_p(\zeta) = (\gamma_p / \lambda)^2 n_p(\zeta) A_{12} + \lambda^{-1} A_{13} q_p{}'(\zeta)$$
$$r_p(\zeta) = {}^1/{}_2 s_0{}^{-2}(q_p + \lambda^{-1} n_p{}'),\ t_p(\zeta) = (\gamma_p/\lambda)^2 A_{13} n_p + \lambda^{-1} q_p{}' A_{33}$$

Преобразуем уравнение (3.10). Если $b_1 > 0$ и $b_1{}^2 > b_2$, то, обозначив $s_1 + s_2 = \Omega$, $(s_1 - s_2)/(s_1 + s_2) = \omega$ (Ω и ω — действительные), получим

$$\omega \sin\Omega\gamma^\pm \pm \sin\omega\gamma^\pm\Omega = 0 \tag{3.14}$$

Если же $b_1 > 0$ и $b_1{}^2 < b_2$, то $s_{1,2} = \alpha \pm i\beta = \sqrt{b_1 \pm i\sqrt{b_2 - b_1{}^2}}$. Тогда имеем [17]

$$\beta \sin 2\alpha\gamma^\pm \pm \alpha \operatorname{sh} 2\beta\gamma^\pm = 0 \tag{3.15}$$

В случае 2° постоянные $H_m{}^\pm$ находятся аналогичным образом, но имеют более громоздкую структуру. Характеристическое уравнение имеет вид

$$2s_1\gamma^\pm \pm \sin 2s_1\gamma^\pm = 0 \tag{3.16}$$

Что касается случаев 3° и 4°, то для них результаты получаются из случаев 1° и 2° формальной заменой s_1, s_2 на is, is_2. Например, уравнения для определения $\gamma_p{}^\pm$ получаются из (3.14) — (3.16) и представляются так:

$$\omega \operatorname{sh}\Omega\gamma^\pm \pm \operatorname{sh}\omega\Omega\gamma^\pm = 0, \quad \beta\operatorname{sh}2\alpha\gamma^\pm \pm \alpha\sin 2\beta\gamma^\pm = 0, \quad 2s_1\gamma^\pm \pm$$
$$\pm \operatorname{sh}2s_1\gamma^\pm = 0$$

Напряжения и перемещения вычисляются по формулам (3.12) и (3.13), в которых выражения для $n_p(\zeta)$ и $q_p(\zeta)$ имеют структуру вида (3.11).

4. Составляющие вектора перемещений бигармонического решения будем искать в виде

$$u_{\xi B}^{+} = \partial_1 (\Phi_0 + \zeta^2\Phi_2 + \Phi_0^*), \quad u_{\eta B}^{+} = \partial_2 (\Phi_0 + \zeta^2\Phi_2 - \Phi_0^*), \quad u_{\zeta B}^{+} = \zeta\Phi_1 \tag{4.1}$$

$$u_{\xi B}^{-} = \partial_1 (\zeta\Psi_1 + \zeta^3\Psi_3), \quad u_{\eta B}^{-} = \partial_2 (\zeta\Psi_1 + \zeta^3\Psi_3), \quad u_{\zeta B}^{-} = \Psi_0 + \zeta^2\Psi_2$$

где $\Phi_m = \Phi_m (\xi, \eta)$, $\Psi_m = \Psi_m (\xi, \eta)$ — некоторые произвольные функции, подлежащие определению. Требуя, чтобы выражения (4.1) удовлетворяли системе (1.2) и условиям (1.3), получим

$$\Phi_1 = 2\lambda\mu_8 D^2\Phi_0, \quad \Phi_2 = -\lambda^2\mu_8 D^2\Phi_0, \quad \partial_1^2\Phi_0^* = -(1+\nu)^{-1}D^2\Phi_0, \quad D^2D^2\Phi_0 = 0$$

$$\partial_2^2\Phi_0^* = (1+\nu)^{-1} D^2\Phi_0, \quad \Psi_0 = -\frac{1}{\lambda}\Psi_1 + 2\mu_5\lambda s_0^2 D^2\Psi_1,$$

$$\Psi_2 = -\lambda\nu_2\mu_5 D^2\Psi_1, \quad D^2D^2\Psi_1 = 0$$

$$\Psi_3 = -\lambda^2\mu_4 D^2\Psi_1, \quad \mu_4 = {}^1/_3\mu_5 (2s_0^2 - \nu_2), \quad \mu_5 = {}^1/_2 (1-\nu)^{-1},$$

$$\mu_8 = {}^1/_2 \nu_2 (1+\nu)^{-1}$$

Вместо функции Φ_0 введем новую бигармоническую функцию F соотношением

$$\Phi_0 = -(F + {}^1/_3\lambda^2\mu_8 D^2F), \quad D^2D^2F = 0$$

Тогда перемещения запишутся так:

$$u_{\xi B}^{+} = -\partial_1 [F + \lambda^2 ({}^1/_3 - \zeta^2)\mu_8 D^2F - \Phi_0^*], \quad \partial_1^2\Phi_0^* = (1+\nu)^{-1} D^2F \tag{4.2}$$

$$u_{\eta B}^{+} = -\partial_2 [F + \lambda^2 ({}^1/_3 - \zeta^2)\mu_8 D^2F + \Phi_0^*], \quad \partial_2^2\Phi_0^* = -(1+\nu)^{-1}D^2F$$

$$u_{\xi B}^{-} = \partial_1 [\zeta F - \lambda^2\mu_4\zeta^3 D^2F], \quad F = \Psi_1, \quad u_{\zeta B}^{+} = -2\lambda\mu_8\zeta D^2F$$

$$u_{\eta B}^{-} = \partial_2 [\zeta F - \lambda^2\mu_4\zeta^3 D^2F], \quad u_{\zeta B}^{-} = -\frac{1}{\lambda}F - \lambda\mu_5 (\nu_2\zeta^2 - 2s_0^2) D^2F$$

Подставляя перемещения (4.2) в уравнения (1.1), получим следующие формулы для определения напряжений бигармонического состояния:

$$\sigma_{\xi\xi B}^{+} = \partial_2^2 [F + \lambda^2\mu_8 ({}^1/_3 - \zeta^2) D^2F], \quad \sigma_{\eta\eta B}^{+} = \partial_1^2 [F + \lambda^2\mu_8 ({}^1/_3 - \zeta^2) D^2F]$$

$$\sigma_{\xi\eta B}^{+} = -\partial_1\partial_2 [F + \lambda^2\mu_8 ({}^1/_3 - \zeta^2)D^2F], \quad \sigma_{\xi\zeta B}^{+} = \sigma_{\eta\zeta B}^{+} = \sigma_{\zeta\zeta B}^{+} = 0$$

$$\sigma_{\xi\xi B}^{-} = \zeta (\mu_6\partial_1^2 + \mu_7\partial_2^2)F - \zeta^3\mu_4\lambda^2\partial_1^2 D^2F, \quad \sigma_{\xi\zeta B}^{-} = \lambda\mu_5 (1-\zeta^2)\, \partial_1 D^2F$$

$$\sigma_{\eta\eta B}^{-} = \zeta (\mu_7\partial_1^2 + \mu_6\partial_2^2) F - \zeta^3\mu_4\lambda^2\partial_2^2 D^2F, \quad \sigma_{\eta\zeta B}^{-} = \lambda\mu_5 (1-\zeta^2)\partial_2 D^2F$$

$$\sigma_{\xi\eta B}^{-} = \partial_1\partial_2 (\zeta F - \zeta^3\lambda^2\mu_4 D^2F), \quad \sigma_{\zeta\zeta B}^{-} = 0, \quad \mu_6 = 2\mu_5, \quad \mu_7 = \mu_6 - 1$$

5. Решение поставленной в п. 1 задачи сводится к нахождению функций F, B_k, C_p, которые удовлетворяют системе разрешающих уравнений

$$D^2D^2F = 0, \quad D^2C_p = (\gamma_p / \lambda)^2 C_p, \quad D^2B_k = (\delta_k / \lambda)^2 B_k \tag{5.1}$$

Общий порядок системы (5.1) равняется $D^{2(2+p+k)}$, что требует постановки $(2+p+k)$ граничных условий на Ω_j, вместо имеющих трех (1.4). Поэтому для согласования краевых условий с разрешающей системой воспользуемся идеей метода Бубнова — Галеркина. С этой целью будем требовать, чтобы невязки граничных условий (1.4) были ортогональны на отрезке $[-1,1]$ к полной системе функций $\{\sin \delta_m^{\pm} s_0 \zeta, \cos \delta_m^{\pm} s_0 \zeta\}$. В результате получим систему граничных условий, необходимых для удовлетворения условий на боковых поверхностях полостей.

В задаче растяжения — сжатия на Ω_j будем иметь

$$
\begin{gathered}
\varphi(t_j) + t_j\overline{\varphi'(t_j)} + \overline{\psi(t_j)} + {}^1/_2\Lambda_{1,j}(B_0, C_p) = {}^1/_2 f_{1,0}(t_j) \\
-16(\lambda/\delta_m^+ s_0)^{-2}\mu_8\overline{\varphi''(t_j)} + \Lambda_{1,j}(B_m, C_p) = f_{1,m}(t_j), \\
\Lambda_{2,j}(B_m, C_p) = f_{2,m}(t_j)
\end{gathered} \tag{5.2}
$$

$$
\Lambda_{1,j}(B_m, C_p) = \int\limits_{s_j}\Big[2s_0\lambda(-1)^m L_{8\Omega_j}B_m + \sum_{p=1}^{\infty}(s_{mp}^+ L_{0\Omega_j} + n_{mp}^+ L_{9\Omega_j})C_p\Big]R_j\,d\sigma_j
$$

$$
\Lambda_{2,j}(B_m, C_p) = -\delta_m^+(-1)^m L_{2\Omega_j}B_m + \sum_{p=1}^{\infty} r_{mp}^+ L_{1\Omega_j}C_p \qquad (m = 1, 2, \ldots)
$$

$$
F = \operatorname{Re}[\bar z\varphi(z) + \chi(z)], \quad \psi = \frac{d\chi}{dz}, \quad B_0 = 0, \quad f_{2,m}(t_j) = P_{m\zeta}^j
$$

$$
f_{1,m} = \int\limits_{s_j}(P_{mr}^j + iP_{m\theta}^j)R_j\,d\sigma_j
$$

$$
\begin{Bmatrix} s_{mp}^+ \\ P_{mr}^j \end{Bmatrix} = (-1)^m \int\limits_{-1}^{1}\begin{Bmatrix} s_p^+ \\ P_r^j \end{Bmatrix}\cos\delta_m^+ s_0\zeta\,d\zeta,
$$

$$
\begin{Bmatrix} r_{mp}^+ \\ P_{m\zeta}^j \end{Bmatrix} = (-1)^m \int\limits_{-1}^{1}\begin{Bmatrix} r_p^+ \\ P_\zeta^j \end{Bmatrix}\sin\delta_m^+ s_0\zeta\,d\zeta.
$$

В выражениях (5.2) отброшена произвольная константа, не влияющая на распределение напряжений, t_j — аффикс точки j-го контура, $L_q\Omega_j$ — граничные значения операторов L_q $(q = 0, 1, \ldots, 9)$, которые приведены в [11].

В задаче изгиба соответственно имеем (D_{1j} — действительные, D_{2j} — комплексные постоянные)

$$
\begin{gathered}
\varkappa\varphi(t_j) + t_j\overline{\varphi'(t_j)} + \overline{\psi(t_j)} - \varkappa_{2m}\overline{\varphi''(t_j)} - X_{1,j}(B_m, C_p) - \\
- iD_{1j}t_j + D_{2j} = -\int\limits_{s_j}\Big(P_{mr}^j + iP_{m\theta}^j + i\int\limits_{s_j}P_{m\zeta}^j\,ds_j\Big)dt_j
\end{gathered}
$$

$$
8\mu_5\operatorname{Im}\varphi'(t_j) + X_{2,j}(B_m, C_p) + D_{1j} = \int\limits_{s_j}P_{m\zeta}^j\,ds_j \qquad (m = 1, 2, \ldots)
$$

$$
\begin{gathered}
X_{1,j}(B_m, C_p) = \int\limits_{s_j}\Big\{\frac{1}{2}(-1)^{m+1}(\delta_m^- s_0)^2 b_m^-\Big[L_{8\Omega_j} + \frac{i}{2}\Big(\frac{\delta_m^- s_0}{\lambda}\Big)L_{0\Omega_j}\Big]\times \\
\times B_m + \sum_{p=1}^{\infty}\Big[(s_{mp}^- L_{0\Omega_j} + n_{mp}^- L_{9\Omega_j})C_p + r_{mp}^-\int\limits_{s_j} iL_{1\Omega_j}C_p\,ds_j\Big]\Big\}R_j\,d\sigma_j
\end{gathered}
$$

$$X_{2,j}(B_m, C_p) = (-1)^{m+1}\frac{(\delta_m^- s_0)^4}{4\lambda^2} b_m^- L_{0\Omega_j} B_m + \sum_{p=1}^{\infty} r_{mp}^- \int_{s_j} L_{1\Omega_j} C_p \, ds_j$$

$$\varkappa = -(3+\nu)/(1-\nu), \quad \varkappa_{2m} = 12\lambda^2\mu_4[1 - 2/(\delta_m^- s_0)^2]$$

$$\int_{-1}^{1} \begin{Bmatrix} s_p^- \\ P_r^j \end{Bmatrix} \sin \delta_m^- s_0 \zeta d\zeta = \frac{2(-1)^{m+1}}{(\delta_m^- s_0)^2} \begin{Bmatrix} s_{mp}^- \\ P_{mr}^j \end{Bmatrix},$$

$$\int_{-1}^{1} \begin{Bmatrix} r_p^- \\ P_\zeta^j \end{Bmatrix} \cos \delta_m^- s_0 \zeta d\zeta = \frac{2\lambda(-1)^m}{(\delta_m^- s_0)^2} \begin{Bmatrix} r_{mp}^- \\ P_{m\zeta}^j \end{Bmatrix}$$

После определения функций F, B_k, C_p напряженно-деформированное состояние в любой точке пластины находится по формулам (1.5).

Поступила 14 II 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Роменская Г. И., Шленев М. А.* Асимптотический метод решения задачи теории упругости о толстой трансверсально изотропной плите. Пластинки и оболочки. Труды молодых ученых. Ростов-на-Дону, 1971.
2. *Роменская Г. И., Шленев М. А.* Об одном методе решения граничных задач теории толстых трансверсально изотропных плит. Теория плит и оболочек. Ростов-на-Дону, 1972.
3. *Лурье А. И.* К теории толстых плит. ПММ, 1942, т. 6, вып. 2—3.
4. *Лехницкий С. Г.* Упругое равновесие трансверсально изотропного слоя и толстой плиты. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
5. *Аксентян О. К., Ворович И. И.* Напряженное состояние плиты малой толщины. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
6. *Ворович И. И., Малкина О. С.* Напряженное состояние толстой плиты. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
7. *Базаренко Н. А., Ворович И. И.* Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для полого цилиндра конечной длины при малой толщине. ПММ, 1965, т. 29, вып. 6.
8. *Виленская Г. В., Ворович И. И.* Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для сферической оболочки малой толщины. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
9. *Космодамианский А. С., Шалдырван В. А.* Концентрация напряжений в толстой плите с двумя круговыми отверстиями. Прикл. механ., 1970, т. 6, вып. 10.
10. *Космодамианский А. С., Шалдырван В. А.* Напряженное состояние толстой многосвязной пластинки. В кн.: Теория оболочек и пластин. М., «Наука», 1973.
11. *Космодамианский А. С., Шалдырван В. А.* Периодическая задача для толстой пластины с круговыми цилиндрическими полостями. Прикл. механ., 1974, т. 10, вып. 1.
12. *Космодамианский А. С., Шалдырван Г. Г.* Изгиб толстой плиты, ослабленной полостью. Прикл. механ., 1974, т. 10, вып. 5.
13. *Ашкенадзи Е. К., Ганов Э. В.* Анизотропия конструкционных материалов (справочник). Л., Машиностроение, 1972.
14. *Мэзон У.* Пьезоэлектрические кристаллы и их применения в ультраакустике. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
15. *Най Дж.* Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров. М., «Мир», 1967.
16. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
17. *Агаловян Л. А.* О погранслое ортотропных пластинок. Изв. АрмССР. Механика, 1973, т. 26, № 2.