

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК, ПОДКРЕПЛЕННЫХ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

В. Н. Максименко, Л. А. Фильштинский

(Новосибирск)

Строится фундаментальное решение теории пологих анизотропных оболочек, выделяется главная часть и изучаются некоторые его свойства. Указывается процедура построения функции Грина для конечной оболочки. Построенное решение используется при исследовании напряженного состояния анизотропной оболочки в окрестности точки приложения сосредоточенной силы. Дается решение задачи об упругом равновесии анизотропной оболочки, усиленной периодической системой конечных ребер жесткости. Задача сводится к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению относительно скачка касательных напряжений на линии контакта. Приводятся результаты числовых расчетов.

Воздействия сосредоточенных в точках и на линиях усилий на упругие оболочки изучались многими авторами (см. обзоры [1-3]). Асимптотические формулы для усилий и моментов в изотропной оболочке, нагруженной по линиям главных кривизн, получены в [4, 5]. Передача усилия от тонкого ребра к цилиндрической изотропной оболочке впервые в строгой постановке изучена в работе [6].

1. Частные решения в теории анизотропных оболочек, соответствующие сосредоточенным нагрузкам. Будем исходить из дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях для пологих анизотропных оболочек, составленных из нечетного числа однородных анизотропных слоев [7]

$$(1.1) \quad \sum_{k=1}^3 L_{kj} u_k = p_j, \quad k, j = 1, 2, 3$$

Здесь u_j , p_j — компоненты векторов перемещений и внешней нагрузки, L_{kj} — известные операторы [7].

Оператор $B^* = \det [L_{kj}]$ — эллиптический, имеющий вид

$$(1.2) \quad B^* = fL\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}, \frac{\partial}{\partial\beta}\right)$$

$$f = \frac{D_{11}A_{22}}{R_2^3} [(C_{11}C_{22} - C_{12}^2)C_{66} + 2C_{12}C_{16}C_{26} - C_{11}C_{26}^2 - C_{22}C_{16}^2]$$

$$L\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}, \frac{\partial}{\partial\beta}\right) = L_0\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}, \frac{\partial}{\partial\beta}\right) + a_9 \left[\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + 2\lambda \frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \lambda^2 \frac{\partial^4}{\partial\beta^4} \right]$$

$$L_0\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}, \frac{\partial}{\partial\beta}\right) = \sum_{j=0}^8 a_j \frac{\partial^3}{\partial\alpha^{8-j}\partial\beta^j}, \quad \lambda = \frac{R_2}{R_1}$$

Здесь C_{jk} , D_{jk} , A_{jk} связаны с упругими параметрами анизотропии, α и β — безразмерные декартовы координаты, R_1 и R_2 — главные радиу-

сы кривизны поверхности. В уравнении (1.2) коэффициенты первой квадратичной формы поверхности A и B , фигурирующие в (1.1), полагаем равными R_2 .

Из (1.1), (1.2) следует, что задача о действии сосредоточенной силы приводится к определению фундаментального решения оператора L .

Построим T -периодическое по β фундаментальное решение E оператора L . Имеем

$$(1.3) \quad L \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{\partial}{\partial \beta} \right) E = \delta(\alpha) \delta_T(\beta)$$

В силу соотношения

$$\delta_T(\beta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\beta - kT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\omega\beta} \quad \left(\omega = \frac{2\pi}{T} \right)$$

функцию $E(\alpha, \beta)$ разыскиваем в виде

$$(1.4) \quad E(\alpha, \beta) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\alpha) e^{ik\omega\beta}$$

Подставляя (1.4) в (1.3) и приравнявая в полученном уравнении коэффициенты при одинаковых степенях $e^{ik\omega\beta}$, получаем бесконечную систему линейных дифференциальных уравнений для определения $c_k(\alpha)$.

Будем искать $c_k(\alpha)$ в классе D' обобщенных функций медленного роста [8]. Используя свойства свертки обобщенных функций, можем записать

$$(1.5) \quad \left\{ \sum_{j=0}^8 a_j (ik\omega)^j \delta^{(8-j)} + a_9 [\delta^{(4)} - 2\lambda (k\omega)^2 \delta^{(2)} + \lambda^2 (k\omega)^4 \delta] \right\} * c_k = \delta,$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Найдя обратное преобразование Фурье обеих частей (1.5), получим

$$(1.6) \quad F^{-1}(c_k, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c_k(\alpha) e^{-i\alpha\mu} d\alpha = [2\pi \Pi_k(\mu)]^{-1}$$

$$\Pi_k(\mu) = \sum_{j=0}^8 a_j (k\omega)^j \mu^{8-j} + a_9 [\mu^4 + 2\lambda (k\omega)^2 \mu^2 + \lambda^2 (k\omega)^4] =$$

$$= \prod_{\nu=1}^4 (\mu - \mu_\nu^{(k)}) (\mu - \overline{\mu_\nu^{(k)}})$$

Преобразование Фурье функций $[\Pi_k(\mu)]^{-1}$ известно, если мнимые части корней не обращаются в нуль. Их можно найти, например, при помощи теории вычетов. Если какие-либо мнимые части корней обращаются в нуль (для $\Pi_0(\mu)$ имеем, например, нулевой корень кратности четыре), то можно интерпретировать соответствующие функции как главные значения или как предельный случай корней с положительными мнимыми частями [8].

Считая корни $\mu_\nu^{(k)}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) простыми и $\text{Im}(\mu_\nu^{(k)}) > 0$ ($\nu = 1, 2, 3, 4$), после некоторых преобразований найдем

$$(1.7) \quad c_0(\alpha) = \frac{1}{2a_9} \left\{ \frac{|\alpha|^3}{3!} + \text{Im} [(z_1^{(0)})^{-3} e^{iz_1^{(0)}|\alpha|}] \right\}$$

$$c_k(\alpha) = \frac{1}{(ik\omega)^2} \sum_{\nu=1}^4 \frac{e^{ik\omega z_\nu^{(k)} \alpha}}{\Delta_k'(z_\nu^{(k)})}$$

$$c_{-k}(\alpha) = c_k(-\alpha) = \overline{c_k(\alpha)}, \quad \alpha > 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Delta_k(z) = \sum_{j=0}^8 a_j z^{8-j} + \frac{a_9}{(k\omega)^4} [z^4 + 2\lambda z^2 + \lambda^2] = \prod_{\nu=1}^4 (z - z_\nu^{(k)})(z - \overline{z_\nu^{(k)}})$$

$$\Delta_k'(z) = \frac{d}{dz} \Delta_k(z), \quad z_\nu^{(k)} = \frac{\mu_\nu^{(k)}}{(k\omega)}, \quad z_1^{(0)} = \frac{\sqrt[4]{a_9}}{\sqrt{2}} (1 + i)$$

Главную часть фундаментального решения E дает фундаментальное решение E_0 соответствующего однородного оператора L_0 . Как и выше, находим

$$(1.8) \quad E_0(\alpha, \beta) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k(\alpha) e^{ik\omega\beta}$$

$$g_0(\alpha) = \frac{|\alpha|^7}{2 \cdot 7!}, \quad g_k(\alpha) = \frac{1}{(ik\omega)^2} \sum_{\nu=1}^4 \frac{e^{ik\omega z_\nu \alpha}}{\Delta'(z_\nu)}$$

$$g_{-k}(\alpha) = g_k(-\alpha) = \overline{g_k(\alpha)}, \quad \alpha > 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Delta(z) = \sum_{j=0}^8 a_j z^{8-j} = \prod_{\nu=1}^4 (z - z_\nu)(z - \overline{z_\nu})$$

Формулы (1.8) получены в предположении, что корни $\Delta(z)$ простые и $\text{Im}(z_\nu) > 0$.

Выражения для перемещений и деформаций в оболочке от действия периодической системы сосредоточенных сил Q_k , приложенных в точках $\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1 + nT$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) вдоль осей α, β и внутренней нормали к поверхности оболочки соответственно, определяются соотношениями

$$(1.9) \quad u_j(\alpha, \beta) = B_{kj} \Psi_k(\alpha - \alpha_1, \beta - \beta_1) \quad \Psi_k = -\frac{Q_k}{fR_2^2} E, \quad k, j = 1, 2, 3$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \lambda u_3 \right), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{R_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \beta} + u_3 \right)$$

Здесь оператор B_{kj} — алгебраическое дополнение L_{kj} в матрице $[L_{kj}]$.

Выпишем выражение прогиба в нулевой точке от действия силы Q_3 в этой же точке. Из (1.9) имеем, используя свойства корней $z_\nu^{(k)}$ (см. п. 2)

$$(1.10) \quad u_3(0, 0) = -\frac{Q_3}{fR_2^2 T} \left\{ \frac{b_0}{2\sqrt{2}\sqrt{a_9^3}} + \frac{2i}{\omega^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left(\sum_{\nu=1}^4 q_k(z_\nu^{(k)}) \right) \right\}$$

$$q_k(z) = \left(\sum_{j=0}^4 b_j z^{4-j} \right) / \Delta_k'(z), \quad \left| \sum_{\nu=1}^4 q_k(z_\nu^{(k)}) \right| < C, \quad C > 0$$

где b_j — коэффициенты оператора

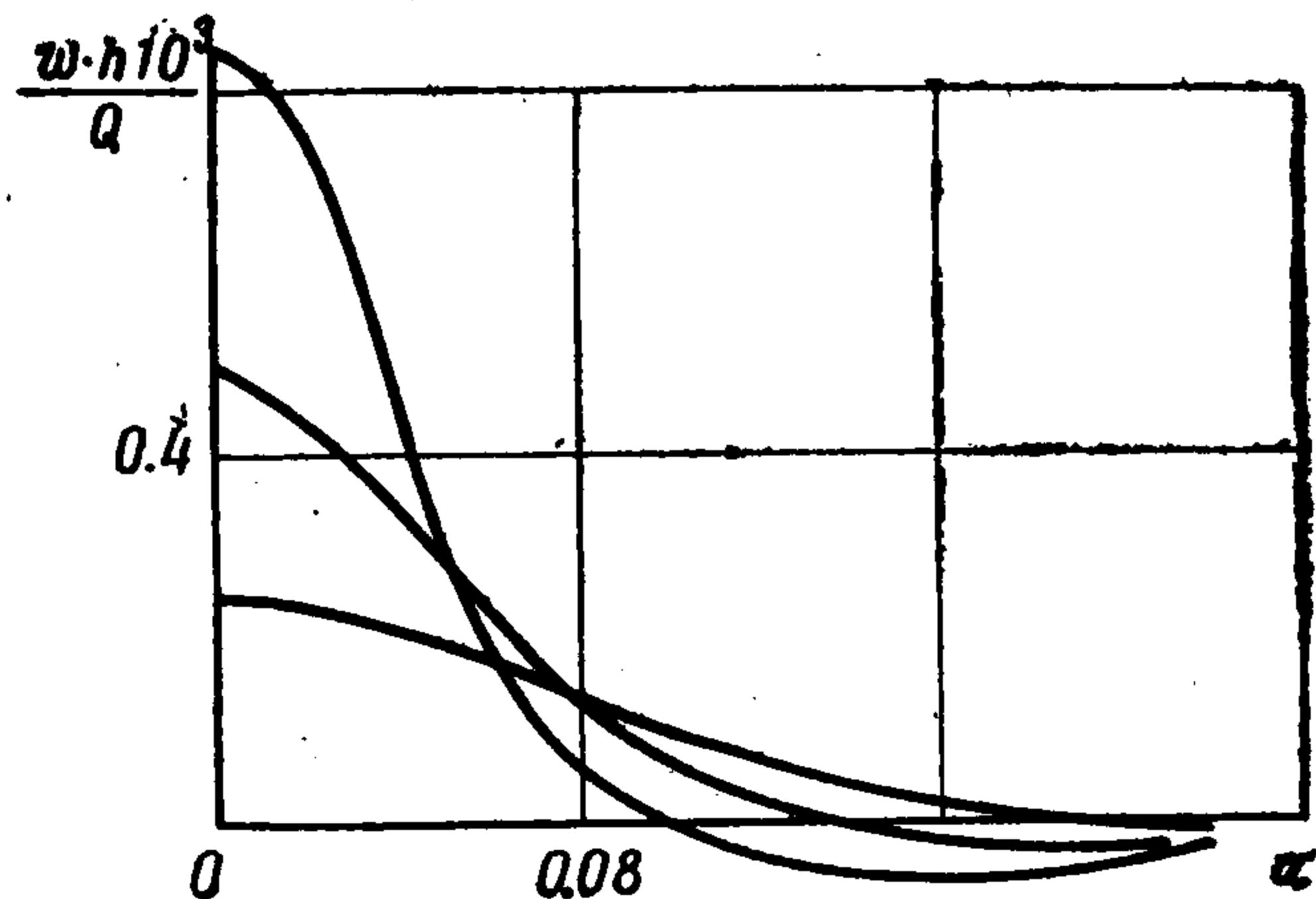
$$B_{33} = \sum_{j=0}^4 b_j \frac{\partial^4}{\partial \alpha^{4-j} \partial \beta^j}$$

определенного выше. Ряд в (1.10) абсолютно сходится.

На фиг. 1 представлены результаты вычислений прогиба вдоль линии α от действия двух диаметрально противоположных и равных по величине радиальных сил для сферической оболочки из стеклопластика АГ-4С ($E_1 = 2.1 \cdot 10^4$ МН/м², $E_2 = 1.6 \cdot 10^4$ МН/м², $G = 4.1 \cdot 10^3$ МН/м², $\nu_2 = 0.07$) при различных значениях параметра $\tau = 10^{-2} R_2 / h$ (h — толщина оболочки).

Выражение для усилий и деформаций в случае загрузки по линиям получается наложением соответствующих решений от сосредоточенной силы. Например

$$(1.11) \quad \varepsilon_m(\alpha, \beta) = R_2 \int_{l=1}^3 p_j(\alpha_l, \beta_l) \times \\ \times \varepsilon_m^{(j)}(\alpha - \alpha_l, \beta - \beta_l) dl, \quad m = 1, 2$$



Фиг. 1

Здесь p_j ($j = 1, 2, 3$) — интенсивность погонных усилий, распределенных по линии l и направленных соответственно вдоль j -й оси, $\varepsilon_m^{(j)}(\alpha - \alpha_l, \beta - \beta_l)$ — отнесенная к единичной силе деформация оболочки в точке (α, β) от действия системы единичных сосредоточенных сил Q_j , приложенных в точках $(\alpha_l, \beta_l + nT)$.

2. Преобразование фундаментального решения (1.4). Установим некоторые свойства корней z_ν и $z_\nu^{(k)}$ полиномов $\Delta(z)$ и $\Delta_k(z)$ соответственно. В случае анизотропной оболочки считаем корни полинома $\Delta(z)$ простыми и $\text{Im}(z_\nu) > 0$ ($\nu = 1, 2, 3, 4$).

Свойство 1. Если z_ν простые и $\text{Im}(z_\nu) > 0$, то по крайней мере начиная с некоторого k , корни полинома $\Delta_k(z)$ также простые. Имеет место оценка ($\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число)

$$(2.1) \quad |z_\nu^{(k)} - z_\nu| < k^{\varepsilon-4}, \quad \nu = 1, 2, 3, 4$$

Действительно, в силу (1.7), (1.8), в некоторой замкнутой окрестности S точки z_ν полиномы $\Delta_k(z)$ и $\Delta(z)$ представляются в виде

$$(2.2) \quad \Delta_k(z) = \Delta(z) + k^{-4} q(z) = \Delta(z) + \varphi_k(z) \\ \Delta(z) = (z - z_\nu) f(z), \quad \lim_{z \rightarrow z_\nu} f(z) = \Delta'(z_\nu) \neq 0$$

Пусть $m = \min_S |f(z)|$. Окрестность S можно выбрать так, что $m > 0$. Рассмотрим окрестность S_k точки z_ν радиуса $k^{\varepsilon-4}$. Тогда в силу (2.2), начиная с некоторого k

$$|\varphi_k(z)| < \frac{m}{k^{4-\varepsilon}} \ll |\Delta(z)|, \quad z \in \partial S_k$$

Отсюда по теореме Руше $\Delta(z)$ и $\Delta_k(z) = \Delta(z) + \varphi_k(z)$ имеют одинаковое число корней в S_k .

Свойство 2. В тех же предположениях относительно z , справедливы тождества

$$(2.3) \quad \sum_{v=1}^4 \left(\frac{z_v^q}{\Delta'(z_v)} + \frac{\bar{z}_v^q}{\Delta'(\bar{z}_v)} \right) = \begin{cases} 0, & q = 0, 1, \dots, 6 \\ 1, & q = 7 \end{cases}$$

Аналогичные тождества имеют место и для $z_v^{(k)}$.

Действительно, рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{z^q dz}{\Delta(z)}$$

по замкнутой кривой L , содержащей внутри себя все корни полинома $\Delta(z)$. Вычисляя его вначале по формуле Коши, а затем с помощью теоремы вычетов, приходим к (2.3).

Чтобы избежать расходимости рядов в усилиях и моментах, поступим следующим образом.

Используя (1.7), (1.8), представим фундаментальное решение $E(\alpha, \beta)$ в виде

$$(2.4) \quad E(\alpha, \beta) = E_0(\alpha, \beta) + K(\alpha, \beta)$$

$$K(\alpha, \beta) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (c_k(\alpha) - g_k(\alpha)) e^{ik\omega\beta}$$

С помощью (2.1), (2.3) можно доказать, что ряд для $K(\alpha, \beta)$, фигурирующий в (2.4), и все производные от него по α, β до седьмого порядка включительно сходятся абсолютно и равномерно в любой замкнутой окрестности нуля. Для производных седьмого порядка общий член ряда затухает не медленнее чем $k^{\epsilon-3}$.

Для главной части фундаментального решения E_0 имеют место, например, в силу (1.8), (2.3) соотношения

$$(2.5) \quad \frac{\partial^j E_0(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^{7-j} \partial \beta^j} = \frac{1}{T} \sum_{v=1}^4 \operatorname{Re} \left\{ i \frac{z_v^{7-j}}{\Delta'(z_v)} \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2} (z_v \alpha + \beta) \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, 7$$

3. Равновесие анизотропной оболочки, подкрепленной ребрами жесткости. Рассмотрим замкнутую по β оболочку, которая вдоль конгруэнтных отрезков $-l/2 \leq \alpha_s \leq l/2$, $\beta_s = sT$ ($s = 0, 1, \dots, \omega - 1$) усилена тонкими ребрами жесткости, нагруженными на концах $\alpha = -l/2$ одинаковыми продольными силами Q вдоль отрицательной оси α . Будем предполагать, что ребро непрерывно связано с оболочкой и работает только на растяжение.

Исследуем характер распределения усилий в оболочке и ребре. В случае изотропной цилиндрической оболочки эта задача решена в [6].

Пусть $q(\alpha)$ — продольные касательные усилия, передающиеся от ребра к оболочке. Условие совместности деформаций ребра и оболочки на линии контакта и статическое условие для ребра жесткости имеют вид

$$(3.1) \quad - \int_{\alpha}^{l/2} q(\alpha) d\alpha = \frac{E_0 F_0}{R_2} \epsilon_1(\alpha, 0)$$

$$(3.2) \quad \int_{-l/2}^{l/2} q(\alpha) d\alpha = - \frac{Q}{R_2}$$

Здесь E_0, F_0 — модуль упругости и площадь поперечного сечения ребра.

Подставляя в (3.1) выражение для деформации $\varepsilon_1(\alpha, 0)$ из (1.11), используя представление (2.4), (2.5) и вводя замену переменных $\alpha = lx/2$, приходим к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению

$$(3.3) \quad \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t) dt}{t-x} + A \int_{-1}^1 \Phi(x-t) \varphi(t) dt + B \int_x^1 \varphi(t) dt = 0, \quad \varphi(x) = q(\alpha)$$

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^3 \Phi_j\left(\frac{l}{2}x\right), \quad A = -\frac{\omega l}{4} \left(i \sum_{\nu=1}^4 \frac{d(z_\nu)}{z_\nu}\right)^{-1}, \quad B = -\frac{R_2 T}{E_0 F_0} A$$

$$\Phi_1(x) = \frac{\text{sign } x}{2} \left(A_0 - \frac{B_0}{a_0}\right) \text{Re} \{e^{iz_1^{(0)}} |x| - 1\}$$

$$\Phi_2(x) = \text{Re} \left\{ i \sum_{\nu=1}^4 d(z_\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\omega z_\nu x}{(\omega z_\nu x)^2 - (2\pi m)^2} \right\}$$

$$\Phi_3(x) = 2 \text{sign } x \sum_{k=1}^{\infty} \text{Re} \left\{ \sum_{\nu=1}^4 \left[\left(d_k(z_\nu^{(k)}) + \frac{p_k(z_\nu^{(k)})}{(k\omega)^4} \right) e^{ik\omega z_\nu^{(k)} |x|} - d(z_\nu) e^{ik\omega z_\nu |x|} \right] \right\}$$

$$d_k(z) = \frac{1}{\Delta_k'(z)} \sum_{j=0}^6 A_j z^{7-j}, \quad d(z) = \frac{1}{\Delta'(z)} \sum_{j=0}^6 A_j z^{7-j}$$

$$p_k(z) = \frac{1}{\Delta_k'(z)} \sum_{j=0}^3 B_j z^{3-j}$$

Здесь A_j и B_j — коэффициенты оператора

$$(fR_2^2)^{-1} \left(\frac{\partial B_{11}}{\partial \alpha} + \lambda B_{13} \right) = \sum_{j=0}^6 A_j \frac{\partial^7}{\partial \alpha^{7-j} \partial \beta^j} + \sum_{j=0}^3 B_j \frac{\partial^3}{\partial \alpha^{3-j} \partial \beta^j}$$

Уравнение (3.3) в совокупности с дополнительным условием (3.2) однозначно определяет напряжения и деформации в оболочке и ребре.

Сингулярное интегральное уравнение (3.3) можно регуляризовать по Карлеману — Векуа, сведя его к уравнению Фредгольма второго рода. Появившаяся в процессе регуляризации произвольная постоянная определяется соотношением (3.2).

Однако для численной реализации алгоритма, по-видимому, целесообразнее воспользоваться одной из процедур прямого решения сингулярных уравнений [9-11]. Ниже применяется процедура, развитая в работе [11].

Положим

$$(3.4) \quad \varphi(x) = \varphi_0(x) / \sqrt{1-x^2}$$

Здесь $\varphi_0(x)$ непрерывна по Гельдеру на $[-1, 1]$.

Подставляя (3.4) в уравнение (3.3) и вводя новую переменную ϑ равенством $x = \cos \vartheta$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$, приводим его к виду

$$(3.5) \quad \int_0^\pi \frac{\varphi_0(\cos \tau) d\tau}{\cos \tau - \cos \vartheta} + A \int_0^\pi k(\vartheta, \tau) \varphi_0(\cos \tau) d\tau + B \int_0^\pi \varphi_0(\cos \tau) d\tau = 0$$

$$k(\vartheta, \tau) = \Phi(\cos \vartheta - \cos \tau)$$

Построив интерполяционный полином Лагранжа для искомой функции $\varphi_0(x)$ по чебышевским узлам

$$L_n[\varphi_0, x] = \frac{2}{n} \sum_{\nu=1}^n \varphi_\nu^0 \sum_{m=0}^{n-1} \cos m\vartheta_\nu \cos m\vartheta - \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \varphi_\nu^0$$

$$\varphi_\nu^0 = \varphi_0(x_\nu), \quad x_\nu = \cos \vartheta_\nu, \quad \vartheta_\nu = \frac{2\nu-1}{2n} \pi, \quad \nu = 1, 2, \dots, n$$

и используя соотношения [11]

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\tau d\tau}{\cos \tau - \cos \vartheta} = \frac{\sin n\vartheta}{\sin \vartheta}, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\int_{-1}^1 \frac{F(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{n} \sum_{\nu=1}^n F(\cos \vartheta_\nu)$$

(последняя формула справедлива, когда $F(x)$ — полином порядка $\leq 2n-1$), выводим квадратурные формулы

$$(3.6) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t) dt}{t-x} = \frac{1}{n \sin \vartheta} \sum_{\nu=1}^n \varphi_\nu^0 \sum_{m=0}^{n-1} \cos m\vartheta_\nu \sin m\vartheta$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \Phi(x-t) \varphi(t) dt = \frac{1}{2n} \sum_{\nu=1}^n k(\vartheta, \vartheta_\nu) \varphi_\nu^0$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_x^1 \varphi(t) dt = \frac{1}{\pi n} \sum_{\nu=1}^n \varphi_\nu^0 \left[\sum_{m=1}^{n-1} \frac{\cos m\vartheta_\nu \sin m\vartheta}{m} + \frac{\vartheta}{2} \right]$$

Выражения (3.6) дают возможность заменить уравнения (3.2), (3.3) системой линейных алгебраических уравнений относительно приближенных значений искомой функции в узловых точках.

После некоторых преобразований эта система примет вид

$$(3.7) \quad \frac{\pi}{n} \sum_{\nu=1}^n \varphi_\nu^0 = -\frac{2Q}{lR_2}, \quad \sum_{\nu=1}^n \alpha_{m\nu} \varphi_\nu^0 = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n$$

$$\alpha_{m\nu} = \frac{1}{2n} \left[\frac{1}{\sin \vartheta_\nu} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta_m + (-1)^{|m-\nu|} \vartheta_\nu}{2} + Ak(\vartheta_m \vartheta_\nu) + \right.$$

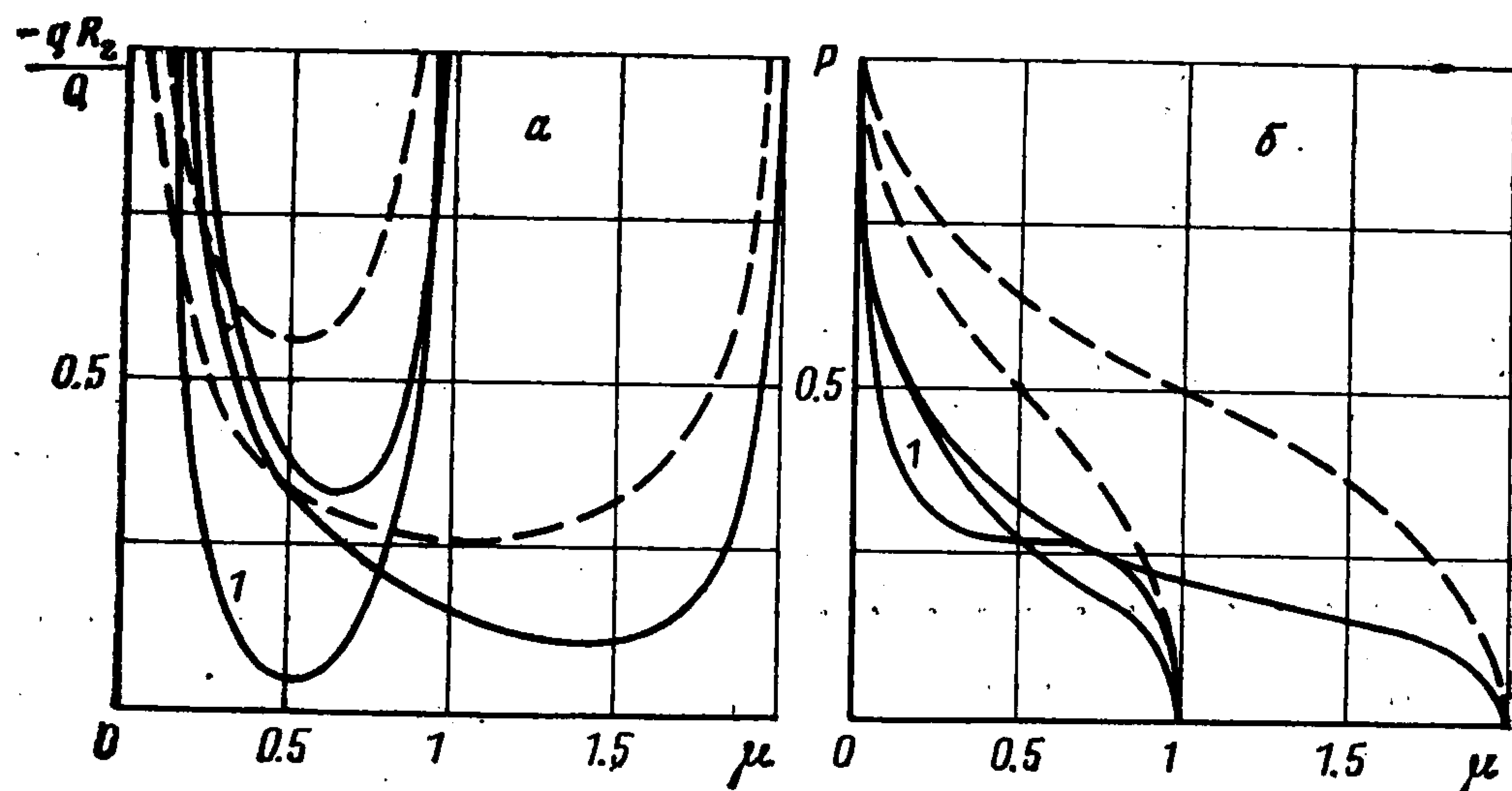
$$\left. + \frac{2B}{\pi} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \cos j\vartheta_\nu \sin j\vartheta_m + \frac{\vartheta_m}{2} \right) \right]$$

4. Результаты расчетов. Расчеты проводились на ЦВМ М-222. В системе (3.7) полагалось $n = 20$ и $n = 30$, что отвечает разбиению интервала на 20 и 30 чебышевских узлов соответственно. Решения совпадают с точностью до четвертого знака.

На фиг. 2 представлены результаты расчетов распределения касательных усилий q вдоль ребра (фиг. 2, а) и безразмерного усилия в ребре жесткости (фиг. 2, б)

$$P(\mu) = -\frac{R_2}{Q} \int_{\mu}^l q \left(\mu - \frac{l}{2} \right) d\mu, \quad 0 < \mu < l$$

для цилиндрической оболочки из стеклопластика АГ-4С при $l = L / R_2 = 1; 2$ (L — длина ребра), $\omega = 6; 40$ (ω — количество ребер, кривая 1 соответствует $\omega = 40$ при $l = 1$) и относительной жесткости $U = E_1 R_2^2 / E_0 F_0 = 2 \cdot 10^2; 0$ (сплошные линии соответствуют значению $U = 2 \cdot 10^2$, а пунктирные — $U = 0$).



Фиг. 2

5. Построение функции Грина для конечной оболочки. Рассмотрим замкнутую по β и конечную по α пологую анизотропную оболочку. Решение вопроса о равновесии такой оболочки под действием T -периодической по β системы равных сил, приложенных в точках $(\alpha_1, \beta_1 + nT)$, $n = 0, 1, \dots, \omega - 1$, сводится к построению фундаментального решения E^* оператора L с заданными граничными условиями при $\alpha = 0, l$.

Например, в случае действия радиальных сил для оболочки с шарнирно подвижным опиранием краев в силу (1.3) имеем

$$(5.1) \quad L \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{\partial}{\partial \beta} \right) E^*(\alpha, \beta; \alpha_1, \beta_1) = \delta(\alpha - \alpha_1) \delta_T(\beta - \beta_1)$$

$$\left(\frac{\partial B_{13}}{\partial \alpha} + \frac{C_{16}}{C_{11}} \left(\frac{\partial B_{23}}{\partial \alpha} + \frac{\partial B_{13}}{\partial \beta} \right) \right) E^* = \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{D_{16}}{D_{11}} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \right) B_{33} E^* =$$

$$= B_{23} E^* = B_{33} E^* = 0 \quad \text{при } \alpha = 0, l$$

$$B_{13} = \sum_{j=0}^3 e_j \frac{\partial^3}{\partial \alpha^{3-j} \partial \beta^j}, \quad B_{23} = \sum_{j=0}^3 d_j \frac{\partial^3}{\partial \alpha^{3-j} \partial \beta^j}, \quad B_{33} = \sum_{j=0}^4 b_j \frac{\partial^4}{\partial \alpha^{4-j} \partial \beta^j}$$

Рассмотрим подробно построение функции Грина для этого случая. Разыскиваем E^* в виде

$$(5.2) \quad E^* = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k(\alpha, \alpha_1) e^{ik\omega(\beta - \beta_1)}$$

Подставляя (5.2) в (5.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $e^{ik\omega(\beta - \beta_1)}$, получаем следующую краевую задачу:

$$(5.3) \quad L_k(C_k) = \sum_{j=0}^8 a_j (ik\omega)^j \frac{d^{8-j} C_k}{d\alpha^{8-j}} +$$

$$+ a_9 \left[\frac{d^4 C_k}{d\alpha^4} + 2\lambda (ik\omega)^2 \frac{d^2 C_k}{d\alpha^2} + \lambda^2 (ik\omega)^4 C_k \right] = \delta(\alpha - \alpha_1)$$

$$U_j(C_k) = D_j(C_k)|_{\alpha=0} = 0, \quad U_{j+4}(C_k) = D_j(C_k)|_{\alpha=l} = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

$$D_1 = \sum_{j=0}^3 d_j (ik\omega)^j \frac{d^{3-j}}{d\alpha^{3-j}}, \quad D_2 = \sum_{j=0}^4 b_j (ik\omega)^j \frac{d^{4-j}}{d\alpha^{4-j}},$$

$$D_3 = \left(\frac{d^2}{d\alpha^2} + 2(ik\omega) \frac{D_{16}}{D_{11}} \frac{d}{d\alpha} \right) D_2$$

$$D_4 = \left(\frac{d}{d\alpha} + \frac{C_{16}}{C_{11}} (ik\omega) \right) \sum_{j=0}^3 e_j (ik\omega)^j \frac{d^{3-j}}{d\alpha^{3-j}} + \frac{C_{16}}{C_{11}} \frac{d}{d\alpha} D_1, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Считая, как и выше, корни $Z_\nu^{(k)}$ простыми, выпишем фундаментальную систему решений оператора L_k

$$y_{\nu, k} = e^{ik\omega z_\nu^{(k)} \alpha}, \quad y_{\nu+4, k} = e^{\overline{ik\omega z_\nu^{(k)}} \alpha}, \quad \nu = 1, 2, 3, 4$$

Тогда решение краевой задачи (5.3) приобретает вид [12]

$$C_k(\alpha, \alpha_1) = \frac{Y_k(\alpha, \alpha_1)}{\Delta_k}, \quad c_k(\alpha, \alpha_1) = c_k(\alpha - \alpha_1)$$

$$Y_k(\alpha, \alpha_1) = \begin{vmatrix} c_k(\alpha, \alpha_1) & y_{1, k}(\alpha) & \dots & y_{8, k}(\alpha) \\ U_1(c_k) & U_1(y_{1, k}) & \dots & U_1(y_{8, k}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_8(c_k) & U_8(y_{1, k}) & \dots & U_8(y_{8, k}) \end{vmatrix}, \quad \Delta_k = \begin{vmatrix} U_1(y_{1, k}) & U_1(y_{2, k}) & \dots & U_1(y_{8, k}) \\ U_2(y_{1, k}) & U_2(y_{2, k}) & \dots & U_2(y_{8, k}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_8(y_{1, k}) & U_8(y_{2, k}) & \dots & U_8(y_{8, k}) \end{vmatrix}$$

Отсюда следует, что функции $C_k(\alpha, \alpha_1)$ можно представить как сумму фундаментального решения оператора L_k , построенного в п. 1, и регулярного решения уравнения $L_k(y)$, учитывающего влияние граничных условий

$$C_k(\alpha, \alpha_1) = c_k(\alpha, \alpha_1) + \sum_{j=1}^8 y_{j, k} \frac{\Delta_{j, k}}{\Delta_k}$$

Здесь $\Delta_{j, k}$ — алгебраическое дополнение элемента $y_{j, k}$ в определителе $Y_k(\alpha, \alpha_1)$. Аналогичным образом строится решение и для иных граничных условий.

Поступила 29 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Даревский В. М. Контактные задачи теории оболочек (действие локальных нагрузок на оболочки). В сб.: Тр. 6 Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. М., «Наука», 1966.
2. Чернышев Г. Н. О контактных задачах в теории оболочек. В сб.: Тр. 7 Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. М., «Наука», 1970.
3. Жигалко Ю. П. Расчет тонких упругих цилиндрических оболочек на локальные нагрузки (обзор литературы и результаты). В сб.: Исследования по теории пластин и оболочек, вып. 4, Изд-во Казанск. ун-та, 1966.
4. Даревский В. М. Определение перемещений и напряжений в цилиндрической оболочке при локальных нагрузках. В сб.: Прочность и динамика авиационных двигателей, вып. 1. М., Машиностроение, 1964.
5. Григолюк Э. И., Толкачев В. М. О расчете цилиндрических оболочек, загруженных по линиям. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
6. Григолюк Э. И., Толкачев В. М. О передаче усилий от ребер жесткости к цилиндрической оболочке. В сб.: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. М., «Наука», 1969.
7. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. М., Физматгиз, 1961.
8. Бремерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М., «Мир», 1968.
9. Иванов В. В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. Киев, «Наукова думка», 1968.
10. Schleiff M. Über Naherungsverfahren zur Lösung einer singularen linearen Integrodifferentialgleichung. ZAMM, 1968, Bd 48, Nr 7.
11. Каландия А. И. О приближенном решении одного класса сингулярных интегральных уравнений. Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 4.
12. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1965.