

ОПТИМИЗАЦИЯ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Н. В. Баничук, А. А. Миронов

(Москва)

Исследуется задача оптимизации частот упругой пластинки, совершающей колебания в идеальной жидкости. Приводится формулировка соответствующей задачи гидроупругости. Методами теории функций комплексного переменного решается «внешняя» гидродинамическая задача и определяются силы, действующие со стороны жидкости на пластинку. Выводится интегро-дифференциальное уравнение, описывающее одномерные колебания пластинки в жидкости. Дается постановка и исследование задачи оптимизации. Излагается численный алгоритм определения оптимальных форм и приводятся результаты расчетов на ЭВМ.

Определение оптимальных форм упругих тел, фундаментальная частота собственных колебаний которых максимальна (при заданном объеме или весе), представляет интерес в связи с некоторыми проблемами проектирования конструкций, работающих в динамических условиях, и, в частности, в задачах флаттера. Первые исследования в этой области были проведены в работах [1-3] на примере оптимизации собственных частот струны. Соответствующие задачи оптимизации упругих балок решались в работах [4-9] для разных типов колебаний (поперечных, продольных и крутильных) и граничных условий. Задачи оптимизации пластинок исследовались в [10-12]. В некоторых из перечисленных работ рассматривалась двойственная задача минимизации веса при заданной частоте основного тона.

1. **Задача о колебаниях пластинки в идеальной жидкости.** Рассмотрим плоскую задачу гидроупругости о малых колебаниях тонкой упругой пластинки в безграничном объеме идеальной жидкости. К указанной задаче, как известно, сводится исследование цилиндрической деформации длинной прямоугольной пластинки, закрепленной вдоль длинных краев, и возникающих плоских колебаний жидкости. Плоскость xy , в которой происходят колебания пластинки и жидкости, перпендикулярна длинным краям пластинки. Точки $A (x = -l, y = 0)$ и $B (x = l, y = 0)$ на плоскости xy соответствуют закрепленным краям. Ширина пластинки равна $2l$. Предполагается, что толщина пластинки является переменной по координате x , т. е. $h = h(x)$, и не меняется в направлении оси z (ось параллельна закрепленным краям пластинки). Обозначая через t время, а через $u = u(x, t)$ и $Q = Q(x, t)$ соответственно функцию прогибов пластинки и реакцию жидкости, запишем уравнения цилиндрических колебаний пластинки

$$(1.1) \quad \rho_1 h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = Q, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Здесь D — жесткость пластинки при изгибе, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, ρ_1 — удельная плотность материала пластин-

ки. Для определенности примем следующие граничные условия в точках A и B , соответствующие шарнирному закреплению концов пластинки:

$$(1.2) \quad u = h^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Движение жидкости предполагается безвихревым с потенциалом скоростей $\varphi = \varphi(x, y, t)$, удовлетворяющим уравнению Лапласа и линеаризованным граничным условиям

$$(1.3) \quad \partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial y^2 = 0$$

$$(1.4) \quad (\partial \varphi / \partial y)_{\pm} = \dot{u} / \partial t, \quad -l \leq x \leq l, \quad y = 0$$

Здесь и ниже верхними знаками плюс и минус будем обозначать значения соответствующих величин на верхнем и нижнем берегах разреза $-l \leq x \leq l, y = 0$. Граничные условия (1.4) получены путем сноса на ось x краевых условий непротекания жидкости через поверхности пластинки. При этом используются предположения о малости прогибов u и толщин h , гладкости функции $h(x)$, а также о безотрывности движений жидкости и пластинки.

Распределение давлений $p = p(x, y, t)$ в жидкости вычисляется с помощью интеграла Коши — Лагранжа

$$(1.5) \quad p = p_{\infty} - \rho_2 \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 \right] \approx p_{\infty} - \rho_2 \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

где ρ_2 — плотность жидкости, p_{∞} — давление жидкости на бесконечности. Пренебрежение членом $\rho_2 (\nabla \varphi)^2$ основано на предположении о малости колебаний и использовании линейной теории. Соотношение (1.5) позволяет определить p , если найден потенциал φ . Реакция жидкости Q , фигурирующая в правой части уравнения колебаний (1.1), определяется линеаризованной формулой

$$(1.6) \quad Q = p^- - p^+$$

где через $p^+ = (p(x, 0, t))^+$ и $p^- = (p(x, 0, t))^-$ обозначены распределения давлений соответственно для верхнего и нижнего берегов разреза $-l \leq x \leq l, y = 0$. Определяя Q из соотношений (1.5), (1.6) и подставляя найденное выражение в (1.1), преобразуем уравнение колебаний пластинки к виду

$$(1.7) \quad \rho_1 h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial \varphi^+}{\partial t} - \frac{\partial \varphi^-}{\partial t} \right)$$

Приходим к замкнутой краевой задаче гидроупругости. Гидродинамическая задача (1.3), (1.4) об определении потенциала φ и задача (1.2), (1.7) о колебаниях пластинки являются связанными, так как в граничные условия (1.4) входят распределения скоростей колебаний пластинки, а в правую часть уравнения (1.7) — производные потенциала φ .

Решение задачи (1.2) — (1.4), (1.7) будем искать в виде

$$(1.8) \quad u = e^{i\omega t} U(x), \quad \varphi = i\omega e^{i\omega t} \Phi(x, y)$$

Для удобства анализа и решения задачи перейдем к безразмерным переменным и обозначениям

$$(1.9) \quad x' = x/l, \quad y' = y/l, \quad U' = U/l, \quad \Phi' = \Phi/l^2, \quad h' = lh/S \\ \Omega^2 = 12\rho_1 l^6(1 - \nu^2)\omega^2 / S^2 E, \quad \alpha = \rho_2 l^2 / \rho_1 S$$

где S — площадь поперечного сечения пластинки. Штрихи у безразмерных переменных в дальнейшем опускаются.

Подстановка (1.8), (1.9) в (1.2) — (1.4), (1.7) приводит к следующим соотношениям для определения амплитудных функций $U(x)$ и $\Phi(x, y)$.

$$(1.10) \quad \frac{d^2}{dx^2} \left(h^3 \frac{d^2 U}{dx^2} \right) - \Omega^2 [hU - \alpha(\Phi^+ - \Phi^-)] = 0$$

$$(1.11) \quad U|_{x=\pm 1} = \left(h^3 \frac{d^2 U}{dx^2} \right)_{x=\pm 1} = 0$$

$$(1.12) \quad \partial^2 \Phi / \partial x^2 + \partial^2 \Phi / \partial y^2 = 0$$

$$(1.13) \quad (\partial \Phi / \partial y)^\pm = U, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad y = 0$$

Таким образом, путем разделения пространственных и временной переменных исходная задача (1.2) — (1.4), (1.7) сводится к краевой задаче (1.10), (1.11) на собственные значения для дифференциального уравнения (1.10) при граничных условиях (1.11) и связанной с ней граничной задаче (1.12), (1.13) для уравнения Лапласа во внешности разреза $-1 \leq x \leq 1, y = 0$.

2. Решение гидродинамической задачи. Определим функцию (потенциал) $\Phi(x, y)$, являющуюся решением краевой задачи (1.12), (1.13). С этой целью рассмотрим вспомогательную функцию $W = \Psi + i\Phi$, аналитическую в плоскости с разрезом $-1 \leq x \leq 1, y = 0$.

Из условий Коши — Римана и граничных условий (1.13) будем иметь

$$\partial \Psi / \partial x = \partial \Phi / \partial y = U$$

откуда

$$(2.1) \quad \Psi = \int_{-1}^x U(\xi) d\xi + C = f(x) + C$$

где C — постоянная интегрирования. Задача определения потенциала Φ сводится к отысканию мнимой части аналитической функции W , действительная часть которой на отрезке $[-1, 1]$ равна

$$\operatorname{Re} W = \Psi = f(x) + C$$

Используя результаты работы [13], [14], выпишем решение данной задачи ($z = x + iy$)

$$(2.2) \quad W = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{1/2} \int_{-1}^1 \left(\frac{t+1}{t-1} \right)^{1/2} \frac{f(t) + C}{t-z} dt$$

$$(2.3) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(t) + C}{\sqrt{t^2 - 1}} dt = 0$$

Соотношение (2.3) служит для определения постоянной C .

Учитывая, что

$$-\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = 1$$

из (2.3) получим

$$(2.4) \quad C = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}$$

Используя далее выражение (2.4) для C и формулу

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right)^{1/2} \frac{d\xi}{\xi-z} = \frac{1}{2} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{1/2} - \frac{1}{2}$$

выполним следующие преобразования в представлении (2.2) для W :

$$(2.5) \quad \begin{aligned} W &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{1/2} \int_{-1}^1 \left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right)^{1/2} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi-z} + \frac{C}{2} \left[1 - \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{1/2}\right] = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{1/2} \int_{-1}^1 f(\xi) \left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{\xi-z} - \frac{1}{\xi+1}\right) d\xi + \frac{C}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{z^2-1}}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi-z)\sqrt{\xi^2-1}} + \frac{C}{2} \end{aligned}$$

Вычислим величину Φ^+ переходя к пределу в (2.5) при $z = x + iy \rightarrow x + i0$ ($0 < y \rightarrow +0$) и выделяя в полученном выражении мнимую часть

$$(2.6) \quad \Phi^+ = \lim_{y \rightarrow +0} [\text{Im } W(x + iy)] = \text{vp} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi-x)\sqrt{1-\xi^2}}$$

Интеграл в (2.6) понимается в смысле главного значения по Коши. Для разности потенциалов на верхнем (плюс) и нижнем (минус) берегах разреза имеем

$$(2.7) \quad \Phi^+ - \Phi^- = 2\Phi^+ = \text{vp} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi-x)\sqrt{1-\xi^2}}$$

Преобразуем интеграл (2.7). По определению интеграла в смысле главного значения имеем

$$\begin{aligned} 2\Phi^+ &= \text{vp} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{1-x^2}{1-t^2}\right)^{1/2} \frac{f(t) dt}{t-x} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \left[\int_{-1}^{x-\varepsilon} \left(\frac{1-x^2}{1-t^2}\right)^{1/2} \frac{f(t) dt}{t-x} + \int_{x+\varepsilon}^1 \left(\frac{1-x^2}{1-t^2}\right)^{1/2} \frac{f(t) dt}{t-x} \right] \end{aligned}$$

Выполняя далее интегрирование по частям и используя выражение (2.1) для $f(t)$, получим

$$(2.8) \quad 2\Phi^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[K(x - \varepsilon, x) \int_{-1}^{x-\varepsilon} U(t) dt - K(x + \varepsilon, x) \int_{-1}^{x+\varepsilon} U(t) dt - \int_{-1}^{x-\varepsilon} K(t, x) U(t) dt - \int_{x+\varepsilon}^1 K(t, x) U(t) dt \right]$$

$$K(t, x) = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right|, \quad r = \left[\frac{(1-x)(1+t)}{(1-t)(1+x)} \right]^{1/2}$$

Заметим, что все выражения в правой части (2.8) (записанные в квадратных скобках) конечны, и, следовательно, примененное выше интегрирование по частям возможно. При $\varepsilon \rightarrow 0$ сумма первых двух членов в (2.8) обращается в нуль, а два последних интеграла сходятся. Таким образом, искомая зависимость величины скачка потенциала $\Phi^+ - \Phi^- = 2\Phi^+$ от распределения прогибов пластинки имеет вид

$$(2.9) \quad 2\Phi^+ = - \int_{-1}^1 K(t, x) U(t) dt$$

3. Формулировка оптимизационной задачи. Используя результаты п. 2, выпишем уравнение колебаний балки. Подставив в (1.10) найденное выражение (2.9) для разности гидродинамических потенциалов, имеем

$$(3.1) \quad LU = \frac{d^2}{dx^2} \left(h^3 \frac{d^2 U}{dx^2} \right) - \Omega^2 \left(hU + \alpha \int_{-1}^1 K(t, x) U(t) dt \right) = 0$$

Рассмотрим однородную краевую задачу на собственные значения для интегро-дифференциального уравнения (3.1) при граничных условиях (1.11). Для заданного распределения толщины $h = h(x)$ из решения задачи (3.1), (1.11) определяются собственные функции $U(x)$ и соответствующие собственные числа Ω (частоты). Из уравнения $(U, LU) = 0$ определим релеевское отношение

$$(3.2) \quad \Omega^2 = J(h, U) = I(h, U) \left[\int_{-1}^1 hU^2 dx + \alpha \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 K(x, t) U(x) U(t) dx dt \right]^{-1}$$

$$I(h, U) = \int_{-1}^1 h^3 \left(\frac{d^2 U}{dx^2} \right)^2 dx$$

Минимальное собственное значение (фундаментальная частота) самосопряженной задачи (3.1), (1.11) (при заданной функции $h = h(x)$) равно

$$(3.3) \quad \Omega^2 = \min_U J(h, U)$$

Соотношение (3.3) представляет собой известный вариационный принцип Релея (см., например, [15]). Минимум J по U вычисляется на множестве всех дважды непрерывно дифференцируемых функций $U(x)$, удовлетворяющих краевым условиям

$$(3.4) \quad U(1) = U(-1) = 0.$$

Краевым условиям $h^3(d^2U/dx^2) = 0$, выставленным при $x = \pm 1$, удовлетворять заранее не требуется, так как эти условия являются «естественными» для функционала J (3.2) и искомая экстремаль этого функционала, найденная при условиях (3.4), будет автоматически удовлетворять условиям $h^3(d^2U/dx^2) = 0$ в точках $x = -1$ и $x = 1$. Функция $U(x)$, реализующая данный минимум, соответствует минимальному собственному значению. Уравнение Эйлера для функции $U(x)$ в вариационной задаче (3.2) — (3.4) совпадает с уравнением (3.1).

Решаемая ниже задача оптимизации заключается в отыскании функции $h(x)$, удовлетворяющей изопериметрическому условию постоянства площади поперечного сечения пластинки

$$(3.5) \quad \int_{-1}^1 h dx = 1$$

и максимизирующей минимальное собственное значение, т. е.

$$(3.6) \quad \Omega^2 = \max_h \min_U J(h, U)$$

Сформулированная задача оптимизации (3.2) — (3.6) однопараметрическая с параметром $\alpha = \rho_2 l^2 / \rho_1 S$. При $\alpha = 0$ (случай отсутствия жидкости) приходим к известной задаче оптимизации фундаментальной частоты, рассмотренной впервые в работе [4]. Имеющееся отличие по сравнению с работой [4] в случае $\alpha = 0$ обусловлено различием в принятых зависимостях $D = D(h)$ (в работе [4] рассмотрена задача оптимизации балок круглого поперечного сечения, для которых $D \sim h^2$, где h — переменный радиус сечения).

Получим необходимое условие оптимальности в задаче (3.2) — (3.6). Выписывая для этого уравнение Эйлера по h для функционала (3.2) при изопериметрическом условии (3.5), имеем

$$3h^2(d^2U/dx^2)^2 - \Omega^2 U^2 = c^2$$

где c^2 — множитель Лагранжа, отвечающий изопериметрическому условию (3.5).

4. Метод численного решения. Выведем основные соотношения, используемые при численном решении задачи оптимизации. Пусть функция $h = h_0(x)$, входящая в (3.2), удовлетворяет изопериметрическому условию (3.5), а $U = U_0(x)$ — решение вариационной задачи (3.2) — (3.4) при заданной $h = h_0(x)$. Наряду с $h_0(x)$ рассмотрим функцию $h_1(x)$, определяемую формулой

$$(4.1) \quad h_1 = h_0 + \delta h$$

где через δh обозначена малая вариация функции h . Для того чтобы функция $h_1(x)$ удовлетворяла изопериметрическому условию (3.5), наложим на функцию δh следующее ограничение:

$$(4.2) \quad \int_{-1}^1 \delta h dx = 0$$

Вычислим вариацию функционала (3.2), обусловленную вариацией распределения толщины (4.1).

Используя уравнения Эйлера (3.1) для функции U_0 и выполняя элементарные преобразования, связанные с вычислением первой вариации функционала, получим

$$(4.3) \quad \delta\Omega^2 = \int_{-1}^1 \Lambda \delta h dx, \quad \Lambda \equiv \left[3h^2 \left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)^2 - \Omega^2 U^2 \right] / I(h, U)$$

Если задать вариацию δh в виде ($\sigma > 0$ — малое положительное число)

$$(4.4) \quad \delta h = \sigma \left(\Lambda - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Lambda dx \right)$$

то непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что условие (4.2) будет выполнено, а линейная часть приращения функционала, т. е. его первая вариация неотрицательна

$$(4.5) \quad \delta\Omega^2 \geq 0$$

Таким образом, подбирая достаточно малое положительное число σ и вычисляя по формулам (4.1), (4.3), (4.4) новое распределение толщин, можно добиться возрастания оптимизируемого функционала. При этом условие (4.5) будет выполнено для любых положительных σ .

Соотношения (4.1), (4.3), (4.4) позволяют построить следующий алгоритм отыскания оптимального распределения толщины $h = h(x)$. Задается начальное приближение h_0 для функции $h(x)$, удовлетворяющее изопериметрическому условию (3.5). При заданном $h = h_0(x)$ решается вариационная задача (3.2) — (3.4) и находится оптимальное распределение $U = U_0(x)$, отвечающее распределению толщины $h = h_0(x)$ (описание метода решения вариационной задачи (3.2) — (3.4) приведено ниже). Далее, с использованием найденного распределения $U_0(x)$, по формулам (4.3), (4.4) вычисляется вариация δh и находится новое приближение $h_1 = h_0 + \delta h$ для распределения толщин. По найденному распределению h_1 путем решения задачи (3.2) — (3.4) разыскивается новое приближение $U_1(x)$ для функции $U(x)$ и т. д. Описанный процесс вычислений повторяется циклически и заканчивается при выполнении условия ($\varepsilon > 0$ — достаточно малое число)

$$(4.6) \quad |J(h_i U_i) - J(h_{i-1}, U_{i-1})| < \varepsilon$$

Таким образом, описанный алгоритм оптимизации сводится к последовательному решению вариационных задач (3.2) — (3.4), вычислению по формулам (4.1) — (4.4) новых приближений для функции h и проверке условия (4.6). Отметим, что при проведении расчетов по данному алгоритму осуществлялся также контроль невязок в выполнении необходимых условий экстремума.

Для решения вариационных задач (3.2) — (3.4) применялся метод локальных вариаций ([16]). Использовалась симметрия задачи (3.2) — (3.4) относительно точки $x = 0$ и решение разыскивалось на отрезке $-1 \leq x \leq 0$. Отрезок $[-1, 0]$ разбивался на n равных ячеек. В качестве узлов сетки выбирались центры ячеек, имеющие

координаты $x_i = -(n + 0,5 - i)/n$, $i = 0, 1, \dots, n + 1$. Введение фиктивных точек x_0 и x_{n+1} , не принадлежащих отрезку $[-1, 0]$, обусловлено удобствами конечно-разностной аппроксимации и стандартизацией вычислений. Для аппроксимации производных использовались центральные разности

$$\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x=x_i} = (U_{i+1} + U_{i-1} - 2U_i)/(\Delta x)^2, \quad U_i = U(x_i)$$

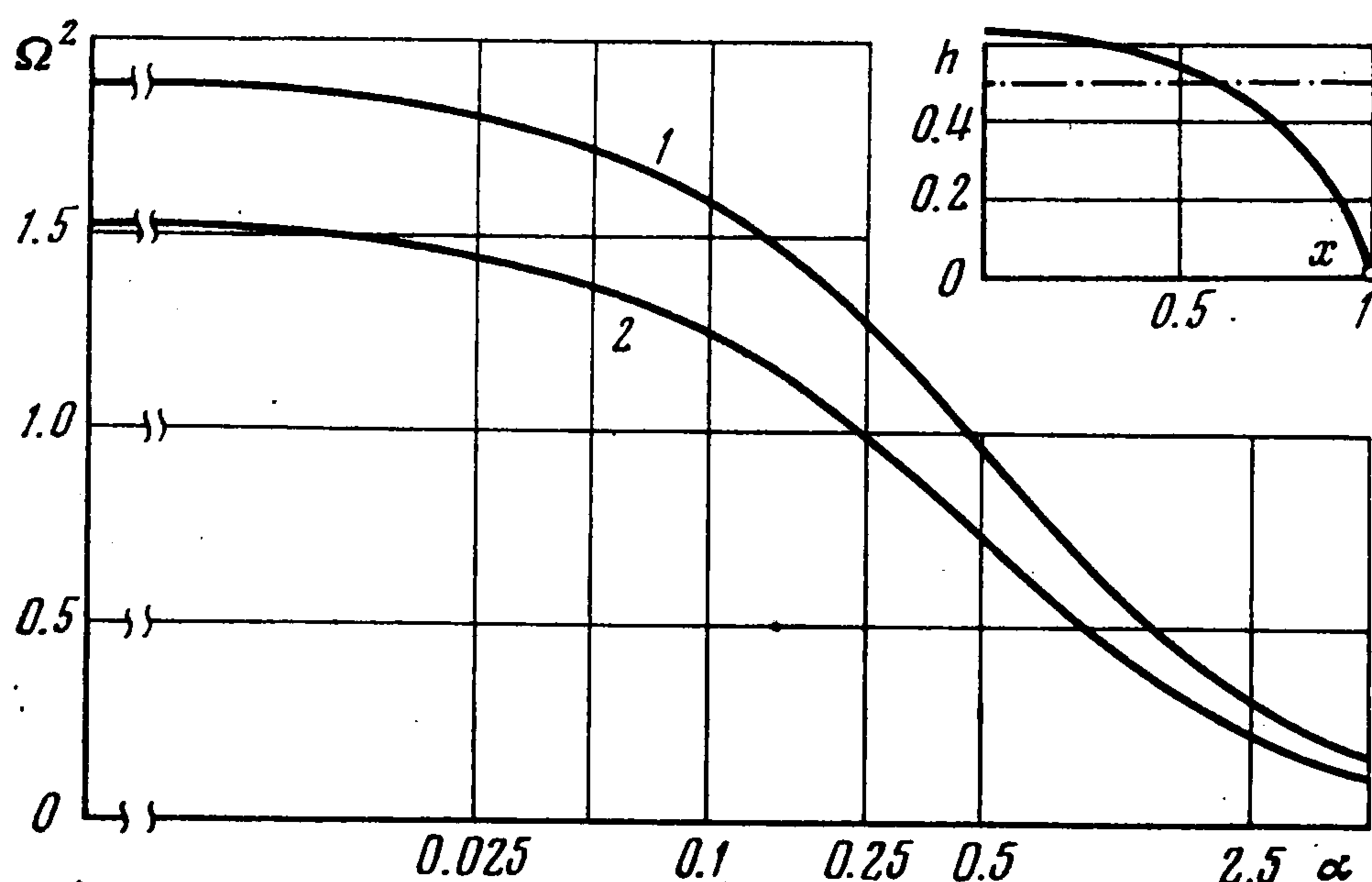
Интегралы, входящие в выражение (3.2) для J заменялись следующими квадратурными формулами:

$$\int_{-1}^0 h^3 \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)^2 dx \approx \sum_1^n h_i^3 \left[\frac{U_{i+1} + U_{i-1} - 2U_i}{(\Delta x)^2}\right]^2 \Delta x$$

$$\int_{-1}^0 hU^2 dx \approx \sum_1^n h_i U_i^2 \Delta x$$

$$\int_{-1}^0 \int_{-1}^0 K(x, t) U(x) U(t) dx dt \approx \sum_{i,j=1}^n K_{ij} U_i U_j (\Delta x)^2$$

При решении задачи по методу локальных вариаций шаг варьирования функции изменялся половинным делением от 10^{-1} до 10^{-6} . Остальные параметры описанного вычислительного процесса полагались равными $n = 30$, $\Delta x = 1/30$, $\varepsilon = 10^{-4}$.



Расчеты оптимальных форм проводились при следующих значениях параметра $\alpha = 0; 0.025 \cdot 2^n$, $n = 0, 1, \dots, 8$. Для каждого из указанных значений α в качестве начального приближения h_0 функции $h(x)$ выбиралось постоянное распределение толщины $h_0(x) = 1/2$ и на первом этапе расчетов определялось распределение прогибов и значение квадрата частоты Ω^2 , соответствующее постоянному распределению толщин.

На фигуре показаны зависимости квадрата частоты Ω^2 от α для оптимальных пластин (кривая 1) и для пластин постоянной толщины (кривая 2). Показано также оптимальное распределение толщины (симметричное относительно $x = 0$) для $\alpha = 6.4$.

Функция $h(x)$ достигает максимума при $x = 0$ и стремится к нулю при стремлении x к ± 1 , т. е. при приближении к шарнирно закрепленным концам пластины. Штрихпунктирной линией показано начальное приближение для функции $h_0(x)$. Заметим, что при $\alpha = 0$ выигрыш для Ω^2 составляет 23.6%, а при $\alpha = 1.6$ — 38%.

5. Вопросы обоснования. Рассмотрим краевую задачу на собственные значения (1.11), (3.1) для линейного интегро-дифференциального уравнения (3.1) при граничных условиях (1.11), к решению которой сведено исследование гармонических колебаний упругой пластинки в идеальной жидкости. Покажем, что собственные числа задачи (1.11), (3.1) действительны, а для отыскания минимального (первого) собственного значения может использоваться вариационный принцип Релея ([15]). Для доказательства вещественности собственных чисел и применимости принципа Релея, как это следует из общих теорем (см., например, [15]), достаточно установить, что рассматриваемая краевая задача является самосопряженной и вполне определенной.

Доказательство самосопряженности краевой задачи (1.11), (3.1) сводится к проверке равенств

$$(5.1) \quad (V, L_i U) = (U, L_i V)$$

где U и V — четырежды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие краевым условиям (1.11), а через L_1 и L_2 обозначены следующие линейные операторы ($L = L_1 - \Omega^2 L_2$):

$$(5.2) \quad L_1 U = \frac{d^2}{dx^2} \left(h^3 \frac{d^2 U}{dx^2} \right), \quad L_2 = hU + \alpha \int_{-1}^1 K(t, x) U(t) dt$$

Круглыми скобками в (5.1) обозначено скалярное произведение, понимаемое как интеграл по отрезку $[-1, 1]$ от произведения функций, записанных в скобках. Самосопряженность оператора L_1 устанавливается путем интегрирования по частям и использования условий (1.11)

$$(5.3) \quad (V, L_1 U) = \int_{-1}^1 V \frac{d^2}{dx^2} \left(h^3 \frac{d^2 U}{dx^2} \right) dx = \int_{-1}^1 U \frac{d^2}{dx^2} \left(h^3 \frac{d^2 V}{dx^2} \right) dx = (U, L_1 V)$$

Для проверки самосопряженности второго оператора из (5.2) предварительно установим симметричность ядра $K(t, x)$. Учитывая, что $r(t, x) = 1/r(x, t)$ (см. 2.8)) и проводя элементарные выкладки, получим

$$(5.4) \quad K(t, x) = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{1+r(t, x)}{1-r(t, x)} \right| = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{r(x, t)+1}{r(x, t)-1} \right| = \\ = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{1+r(x, t)}{1-r(x, t)} \right| = K(x, t)$$

Используя далее отмеченное свойство симметричности (5.4), устанавливаем требуемое равенство

$$(5.5) \quad (V, L_2 U) = \int_{-1}^1 h V U dx + \alpha \int_{-1}^1 V(x) dx \int_{-1}^1 U(t) K(t, x) dt = \\ = \int_{-1}^1 h U V dx + \alpha \int_{-1}^1 U(x) dx \int_{-1}^1 V(t) K(t, x) dt = (U, L_2 V)$$

На основании доказанных равенств (5.3), (5.5) заключаем, что краевая задача (1.11), (3.1) — самосопряженная.

Докажем, что задача (1.11), (3.1) является вполне определенной, т. е. что

$$(5.6) \quad (U, L_i U) > 0, \quad (i = 1, 2)$$

для всех четырежды непрерывно дифференцируемых функций $U(x)$, не равных тождественно нулю и удовлетворяющих краевым условиям (1.11).

Неравенство (5.6) в случае $i = 1$ устанавливается непосредственно

$$(5.7) \quad (U, L_1 U) = \int_{-1}^1 U \frac{d^2}{dx^2} \left(h^3 \frac{d^2 U}{dx^2} \right) dx = \int_{-1}^1 h^3 \left(\frac{d^2 U}{dx^2} \right)^2 dx > 0$$

Докажем положительность оператора L_2 . Выпишем соответствующее скалярное произведение

$$(5.8) \quad (U, L_2 U) = \int_{-1}^1 h U^2 dx + \alpha \int_{-1}^1 U(x) dx \int_{-1}^1 K(t, x) U(t) dt$$

и преобразуем второй интеграл, фигурирующий в правой части (5.8), используя для этого соотношения (1.13), (2.7), (2.9)

$$(5.9) \quad \alpha \int_{-1}^1 U(x) dx \int_{-1}^1 K(t, x) U(t) dt = -\alpha \int_{-1}^1 (\Phi^+ - \Phi^-) U dx = \\ = -\alpha \left(\int_{-1}^1 \Phi^+ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^+ dx - \int_{-1}^1 \Phi^- \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^- dx \right) = -\alpha \oint_S \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS$$

Через n обозначена внешняя нормаль к поверхности пластинки. Контурный интеграл в (5.9) берется по поверхности пластинки S , т. е. по обоим берегам разреза $y = 0$, $-1 \leq x \leq 1$.

Применяя к контурному интегралу формулу Грина, получим

$$(5.10) \quad -\alpha \oint_S \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = \alpha \int_V (\nabla \Phi)^2 dV$$

Для пояснения проведенных преобразований (5.9), (5.10) напомним, что определяемая для произвольной функции сравнения U величина

$$\int_{-1}^1 U(t) K(t, x) dt$$

по построению (см. п. 2) представляет собой разность $\Phi^+ - \Phi^-$ граничных значений гармонической функции Φ ($\Delta \Phi = 0$). Из (5.8) — (5.10) вытекает требуемая оценка

$$(5.11) \quad (U, L_2 U) = \alpha \int_V (\nabla \Phi)^2 dV + \int_{-1}^1 h U^2 dx > 0$$

Под V в (5.10), (5.11) понимается область, занимаемая жидкостью, т. е. внешность разреза $y = 0$, $-1 \leq x \leq 1$.

Из установленных соотношений (5.3), (5.5), (5.7), (5.11) вытекает вещественность собственных значений задачи (1.11), (3.1) и применимость принципа Релея.

Авторы благодарят Д. И. Шермана за полезные советы.

Поступила 31 X 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. Условия конечности интегралов уравнения $d^2y/dx^2 + py = 0$. Собр. соч., М.—Л., Гостехиздат, 1948, т. 1, стр. 246—253.
2. Рапопорт И. М. Об одной вариационной задаче в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями. Докл. АН СССР, 1950, т. 73, № 5.
3. Крейн М. Г. О некоторых задачах на максимум и минимум для характеристических чисел и о ляпуновских зонах устойчивости. ПММ, 1951, т. 15, вып. 3.
4. Niordson F. I. On the optimal design of a vibration beam. J. Appl. Math., 1965, vol. 23, No. 1.
5. Karihaloo B. L., Niordson F. I. Optimum design of vibrating beams under axial compression. Arch. mech. stosowanej, 1972, vol. 24, No. 5—6.
6. Karihaloo B. L., Niordson F. I. Optimum design of vibrating cantilever. J. Optimization Theory and Appl., 1973, vol. 11, No. 6.
7. Ashley H., McIntosh S. C., Jr. Applications of aeroelastic constraints in structural optimization. Proc. 12th Internat. congress of Appl. Mech. Berlin, Springer-Verlag, 1969.
8. Тейлор Р. Е. Расчет стержня наименьшего веса при продольных колебаниях с заданным значением собственной частоты. Ракетная техника и космонавтика, 1967, т. 5, № 10.
9. Гринев В. Б., Филипов А. П. Оптимальное проектирование конструкций, имеющих заданные собственные частоты. Прикл. механ., 1971, т. 7, вып. 10.
10. Olhoff N. Optimal design of vibrating circular plates. Internat. J. Solids and Structures, 1970, vol. 6.
11. Armand J.-L. Minimum-mass design of a plate-like structure for specified fundamental frequency. AIAA Journal, 1971, vol. 9, No. 9.
12. Olhoff N. Optimal design of vibrating rectangular plates. Internat. J. Solids and Structures, 1974, vol. 10, No. 1.
13. Шерман Д. И. К вопросу о напряженном состоянии междукамерных целиков. Упругая весовая среда, ослабленная двумя отверстиями эллиптической формы. II. Изв. АН СССР. ОТИ, 1952, № 7.
14. Лаурентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного, М., «Наука», 1965.
15. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М., «Наука», 1968.
16. Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления. М., «Наука», 1973.