

ВОЗБУЖДЕНИЕ ВИБРИРУЮЩИМ ШТАМПОМ ВОЛН В СЛОЕ

В. А. Бабешко, В. Е. Векслер

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается задача о колебании жесткого круглого штампа на поверхности упругого слоя, покоящегося на жестком основании. Трение между штампом и слоем, слоем и основанием отсутствует. Изучаются контактные напряжения под штампом и возникающие вне штампа упругие волны. Предлагается метод решения этих задач при всех основных частотах, за исключением некоторых особых, при которых необходим иной подход.

Используемый метод основан на сведении краевых задач к интегральному уравнению первого рода, которое отличается от уже исследованных уравнений статических задач сильной осцилляцией ядра, а также его ограниченным ростом на некоторых частотах. Это делает неэффективными известные методы исследования интегральных уравнений. Предлагаемый здесь метод, основанный на специальной факторизации функций, позволяет преодолеть указанные трудности.

1. Использование принципа предельного поглощения [1] приводит задачу к решению интегрального уравнения следующего вида:

$$(1.1) \quad \int_0^a k(r, \rho) \rho q(\rho) d\rho = \theta u(r), \quad 0 \leq r \leq a$$

$$(1.2) \quad k(r, \rho) = \int_{\sigma} u K(u, \kappa_2) J_s(ur) J_s(u\rho) du, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

$$K(u, \kappa_2) = [u^2 \theta_2 \operatorname{cth} \theta_2 - (u^2 - \frac{1}{2} \kappa_2^2)^2 \theta_1^{-1} \operatorname{cth} \theta_1]^{-1}$$

$$\theta_k = \sqrt{u^2 - \kappa_k^2}, \quad \kappa_1^2 = \rho \omega^2 h^2 (\lambda + 2\mu)^{-1}, \quad \kappa_2^2 = \rho \omega^2 h^2 \mu^{-1}$$

$$\theta = 4 \mu h b^2 \omega^{-2}, \quad a = R / h, \quad b^2 = \mu / \rho$$

Здесь $\operatorname{Re} q(r)e^{-i\omega t}$, $\operatorname{Re} u(r)e^{-i\omega t}$ — контактные напряжения под штампом и характеристика его формы и характера внедрения соответственно; ω , ν , λ , μ — частота колебаний штампа, коэффициент Пуассона и материала слоя и постоянные Ляме соответственно; h — толщина упругого слоя, R — радиус штампа.

Выводу уравнения (1.1) предшествовало детальное изучение свойств функции $K(u, \kappa_2)$. Именно, были изучены нейтральные кривые функций K и K^{-1} , графики которых для $\nu = 0.2$ приводятся на фигуре. Сплошными линиями на фигуре изображены нейтральные кривые (т. е. нули) функции $K^{-1}(u, \kappa_2)$, а пунктирными — $K(u, \kappa_2)$.

Принцип предельного поглощения диктует расположение контура σ , который должен совпадать с положительной частью вещественной оси всюду, за исключением отрезков, содержащих вещественные полюсы. В случае чередования нулей и полюсов функции $K(u, \kappa_2)$ указанные

отрезки обходятся контуром снизу. На фигуре это участки значений параметра κ_2 , при которых угол между касательной к сплошным кривым и осью κ_2 — острый. Отрезки, содержащие полюсы, обходятся сверху, если указанный угол — тупой. Это относится к наименьшему полюсу, лежащему на фигуре в промежутке $2 < \kappa_2 < 3$. Наконец, в случае кратных полюсов контур должен их пересекать. Такое положение контура интегрирования без особого труда устанавливается с помощью принципа предельного поглощения и учета аналитичности u как функции параметра κ_2 . А именно, наложив малое внутреннее трение ε на систему и применив соотношения Коши — Римана к функции $u(\kappa_2 + i\varepsilon) = u_1 + iu_2$, легко получаем, что полюсы, обходимые контуром снизу, смещаются в верхнюю полуплоскость, а обходимые сверху — в нижнюю.

На бесконечности функция $K(u, \kappa_2)$ убывает как Cu^{-1} .

Для решения уравнения (1.1) представим правую часть его интегралом Бесселя, что позволяет ограничиться случаем, когда в правой части стоит функция $J_0(\eta, r)$, $\eta \geq 0$. Решение интегрального уравнения (1.1) можно представить для этой правой части в следующем виде:

$$(1.3) \quad q_\eta(r) = J_s(\eta r) / K(\eta) + S(r)\varphi$$

Здесь φ — решение уравнения вида

$$(1.4) \quad \varphi + F\varphi = D$$

Используемые обозначения введены в работе [2]

$$(1.5) \quad S(r)\varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{I_s(itr)\varphi(t)dt}{I_s(ita)K_+(t)}$$

$$F(a, z)\varphi = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_2} \int_{\Gamma_1} \frac{P(t_2, t_1)\varphi(t_1)dt_1 dt_2}{z - t_2}, \quad z \in \Gamma_3$$

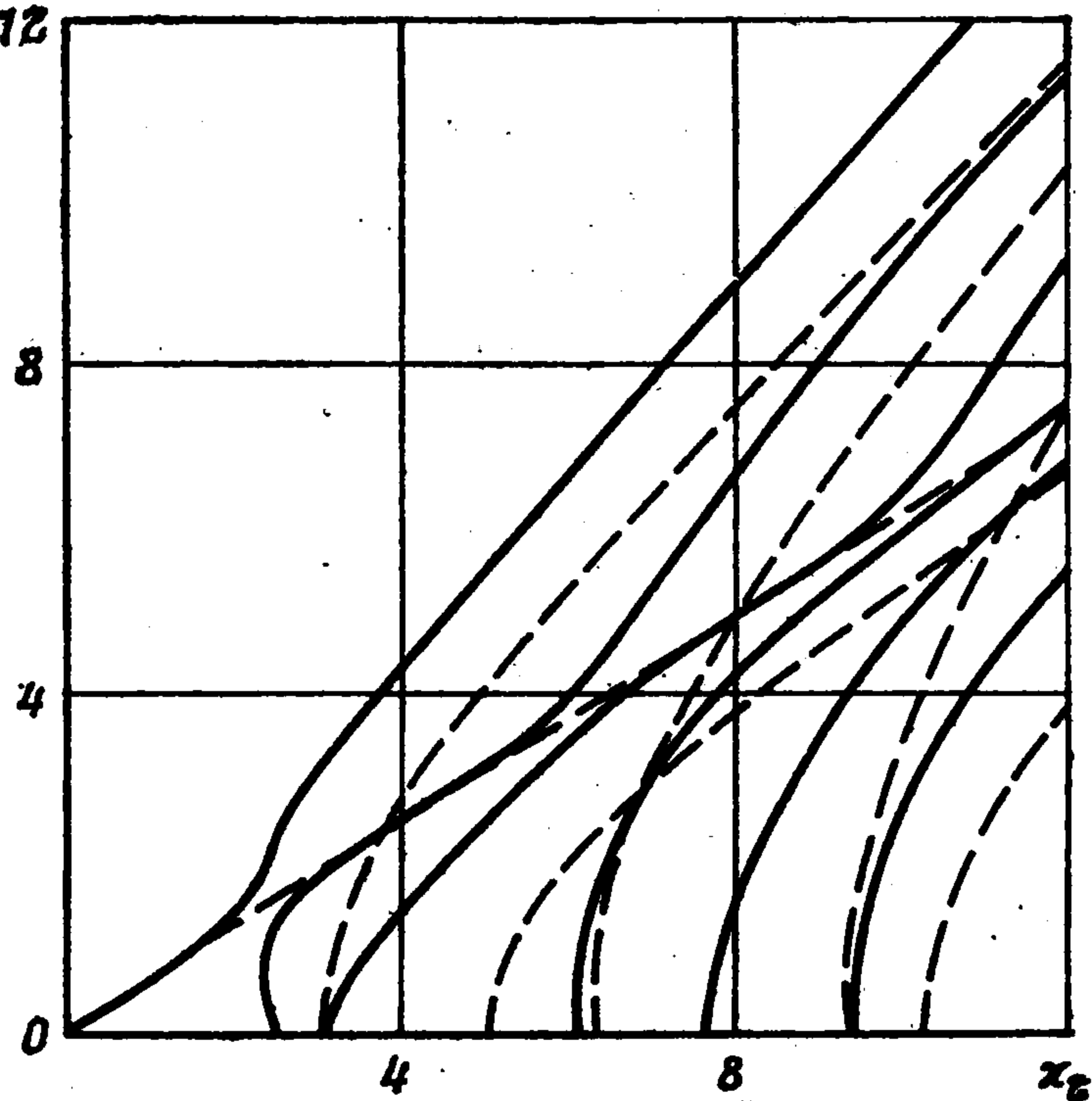
$$D(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{K_+(\tau)\Psi(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad t \in \Gamma_2 > \Gamma, \Gamma_3 > \Gamma_2 > \Gamma_1$$

$$\Psi(\tau) = \left[\frac{\eta K_{s+1}(i\tau a) J_s(\eta a)}{K_s(i\tau a)} + i\eta J_{s+1}(\eta a) \right] \frac{1}{(\eta^2 - \tau^2) K(\eta)}$$

$$P(t_2, t_1) = K_+(t_2)[R_1(t_1) + R_2(t_2)] / (t_2^2 - t_1^2)K_+(t_1)$$

$$R_1(t) = tI_{s+1}(ita)I_s^{-1}(ita) - t, \quad R_2(t) = tK_{s+1}(ita)K_s^{-1}(ita) - t$$

Из представления (1.3) — (1.5) результат работы [2] получается как частный случай, если уравнение (1.4) решать методом последовательных



приближений. Справедливость этого представления можно проверить непосредственной подстановкой его в уравнение (1.1).

Основная трудность эффективного использования этого представления связана с необходимостью факторизации функции $K(u, \kappa_2)$ относительно контура σ [3]. Для преодоления этой трудности произведем приближенную факторизацию, используя аппроксимирующую функцию $H(u)$, подбираемую из следующего условия:

$$|K(u, \kappa_2) - H(u)| / |K(u, \kappa_2)| < \varepsilon$$

В этом случае так же, как и в работе [4], можно показать, что при достаточно малом ε будет иметь место и близость решений в некоторой равномерной метрике. Аппроксимация производится по следующей схеме: пусть x_i и p_j — соответственно положительные нули и полюса, z_s — комплексные нули функции

$$K(u, \kappa_2), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

Составим не имеющую действительных нулей и полюсов функцию

$$R(u) = K(u, \kappa_2) \sqrt{u^2 + B^2} \prod_{j=1}^p (u^2 - p_j^2) \prod_{i=1}^n \frac{1}{u^2 - x_i^2} \times \begin{cases} \prod_{s=1}^{p-n} \frac{1}{u^2 - z_s^2}, & p > n \\ 1, & p = n \end{cases}$$

О выборе B будет упомянуто позже; $R(u) \sim C$ при $u \rightarrow \infty$; $C \neq 0$. Для однозначности функции $R(u)$ проводим разрез от Bi до $+i\infty$ и от $-Bi$ до $-i\infty$ и фиксируем ветвь условием $\sqrt{B^2} = B > 0$. Делаем замену $x = u^2 / (u^2 + M^2)$, переводящую $(0, \infty)$ в $(0, 1)$ и на отрезке $(0, 1)$ аппроксимируем функцию $R(M\sqrt{x/(1-x)})$ многочленами Бернштейна $B_s(x)$ (выбор параметра M существенно влияет на точность аппроксимации). Получим

$$H(u) = B_k \left(\frac{u^2}{u^2 + M^2} \right) \frac{1}{\sqrt{u^2 + B^2}} \prod_{i=1}^n (u^2 - x_i^2) \prod_{j=1}^p \frac{1}{u^2 - p_j^2} \times \begin{cases} \prod_{s=1}^{p-n} (u^2 - z_s^2), & p > n \\ 1, & p = n \end{cases}$$

Функция $H(u)$ имеет $2k$ комплексных нулей, определяемых многочленом Бернштейна, симметричных относительно всех осей, $2n$ простых действительных нулей $\pm x_m$ и $p - n$ простых комплексных нулей при $p > n$. Полюса функции $H(u)$ исчерпываются двумя k -кратными $\pm Mi$ и $2p$ вещественными $\pm p_s$. Кроме того, к числу особенностей функции $H(u)$ относятся две точки ветвления $\pm iB$.

В дальнейшем первыми занумерованы вещественные нули и полюса в порядке возрастания модулей, а затем все остальные.

2. Построив аппроксимирующую функцию, можем построить приближенное решение задачи. С этой целью контуры $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ в уравнениях (1.4), (1.5) опускаем вниз до точки ветвления $-iB$. При этом будут пересечены нули и полюса подынтегральной функции. По теории вычетов

функции $F(a, z)\varphi$ и $D(z)$ изменят свой вид, и их можно представить в форме

$$(2.1) \quad F(a, z)\varphi = B_n + \varepsilon_n, \quad D(t) = D_p(t) + \varepsilon_p', \quad B_n = \sum_{s=1}^n f_s(z)\varphi(-z_s)$$

$$f_s(z) = \sum_{j=1}^p \frac{R_1(-z_s) + R_2(-p_j)}{(p_j^2 - z_s^2) K_+'(-z_s)} \left[\left(\frac{1}{K_+(-p_j)} \right)' \right]^{-1} \frac{1}{z + p_j} -$$

$$- \frac{R_1'(-z_s) + R_2(-Mi)}{(k-1)! (M^2 + z_s^2) K_+'(-z_s)} \frac{1}{z + Mi} \lim_{u \rightarrow -Mi} \frac{d^{k-1}}{du^{k-1}} [K_+(u)(u + Mi)^k]$$

$$\varepsilon_n = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_2^k} \int_{\Gamma_1^k} \frac{K_+(t_2) [R_1(t_1) + R_2(-p_j)] \varphi(t_1) dt_1 dt_2}{(t_2^2 - t_1^2) K_+(t_1)(z - t_2)} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{p+1} \frac{1}{z + p_j} \operatorname{Res}_{u=-p_j} K_+(u) \int_{\Gamma_1^k} \frac{R_1(t_1) + R_2(-p_j)}{(p_j^2 - t_1^2) K_+(t_1)} \varphi(t_1) dt_1 +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(-z_i)}{K_+'(-z_i)} \int_{\Gamma_2^k} \frac{R_1(-z_i) + R_2(t_2)}{(z - t_2)(t_2^2 - z_i^2)} K_+(t_2) dt_2$$

$$D_p(t) = \sum_{j=1}^{p+1} \frac{\Psi(-p_j)}{t + p_j} \operatorname{Res}_{u=-p_j} K_+(u), \quad \varepsilon_p' = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^p} \frac{K_+(\tau) \Psi(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

В последних соотношениях при достаточно больших B влияние интегральных членов мало и ими можно пренебречь. В результате для приближенного определения функции $\varphi(t)$ достаточно знать ее значения в точках $-z_k$, $K(z_k) = 0$. Эти значения определяются из решения конечной линейной системы алгебраических уравнений следующего вида:

$$(2.2) \quad \sum_{s=1}^n [f_s(-z_i) + \delta_{is}] \varphi(-z_s) = D_s(-z_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Эта система при достаточно больших n , которые будут иметь место при больших B , оказывается однозначно разрешимой. Определив, $\varphi(-z_s)$, найдем приближенное представление решения во внутренней области контакта и волнового поля на достаточном удалении от границы штампа в форме

$$(2.3) \quad q_\eta(\rho) = \theta \left[\frac{J_s(\eta\rho)}{K(\eta)} + \sum_{j=1}^n \frac{I_s(-iz_j\rho) \varphi(-z_j)}{I_s(-iz_j a) K_+'(-z_j)} \right]$$

$$(2.4) \quad \sigma_z(\rho, t) = \operatorname{Re} e^{-i\omega t} \int_0^\infty \eta G(\eta) q_\eta(\rho) d\eta$$

$$u(r) = \int_0^\infty \eta G(\eta) J_0(\eta r) d\eta, \quad 0 \leq r \leq a$$

$$(2.5) \quad u(r, t) = \operatorname{Re} e^{-i\omega t} \left[\sum_{k=1}^p A_k H_s^{(1)}(r p_k) + \sum_{k=p+1}^n A_k K_s(-i r p_k) \right], \quad r > a$$

$$A_k = i\zeta_k a \left[\int_0^\infty \eta \frac{G(\eta)}{K(\eta)} \frac{\eta I_{s+1}(-i\eta a) I_s(-ip_k a) - p_k I_s(-i\eta a) I_{s+1}(-ip_k a)}{\eta^2 - p_k^2} d\eta + \right. \\ \left. + \int_0^\infty \eta G(\eta) \sum_{m=1}^n \varphi(-z_m) \frac{z_m I_{s+1}(-iz_m a) I_s(-ip_k a) - p_k I_s(-iz_m a) I_{s+1}(-ip_k a)}{I_s(-iz_m a) K_+'(-z_m)(z_m^2 - p_k^2)} d\eta \right] \\ \zeta_k = \operatorname{Res}_{u=-p_k} uK(u)$$

Первая сумма представляет волновое поле в дальней зоне, в то время как вторая (экспоненциально затухающая при $r \rightarrow \infty$) корректирует его при приближении к штампу.

В качестве примера рассмотрим случай плоского штампа. Уравнение задачи о плоском штампе является частным случаем уравнения (1.1) с правой частью в виде функции Бесселя $\alpha J_0(\eta r)$ при $\eta = 0$, где α — глубина внедрения штампа

$$(2.6) \quad \varphi(\rho) = \alpha \theta \left[B_0 + \sum_{k=1}^n B_k I_0(-iz_k \rho) \right] \\ B_0 = K^{-1}(0), \quad B_k = \frac{\varphi(-z_k)}{I_0(-iz_k a) K_+'(-z_k)}$$

Волновое поле вне штампа представимо в форме

$$(2.7) \quad u(\rho, t) = \alpha \operatorname{Re} e^{-i\omega t} \sum_{j=1}^p A_j H_0^{(1)}(p_j \rho)$$

Рассмотрим случай $\nu = 0.2$, $a = 1$, $x_2^2 = 11$. В этом случае функция $K(u)$ имеет на действительной полуоси полюса $p_1 = 0.4984$, $p_2 = 2.004$, $p_3 = 3.393$, нули $z_1 = 2.031$, $z_2 = 1.063$. При аппроксимации $M^2 = 110$, $B = 15$, $z_3 = 2.397 i$. При аппроксимации многочленом четвертой степени погрешность не превышает 6%.

Формулы (2.6), (2.7) позволяют рассчитывать напряжения под штампом в области, не примыкающей к его краю. При приближении к краю штампа напряжения растут как $(r - a)^{-1/2}$, и эту особенность легко выделить, использовав, например, прием работы [5].

По формуле (2.7) рассчитываются волны на поверхности слоя в дальней зоне. Для расчета поля в ближайшей зоне необходимо использовать формулу (2.5); за счет увеличения параметра B эта формула может описывать волновое поле в зоне, сколько угодно близкой к штампу.

Поступила 5 II 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Самарский А. Г. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.
2. Бабешко В. А. Асимптотические свойства решений одного класса интегральных уравнений теории упругости и математической физики. Докл. АН СССР, 1970, т. 193, № 3.
3. Бабешко В. А. К теории динамических контактных задач. Докл. АН СССР, 1971, т. 201, № 3.
4. Бабешко В. А. Интегральные уравнения свертки первого рода на системе отрезков, возникающие в теории упругости и математической физике. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
5. Бабешко В. А., Гарагуля В. А. Асимптотическое решение задачи о действии штампа, круглого в плане на упругий слой. Изв. АН СССР, МТТ, 1971, № 1.