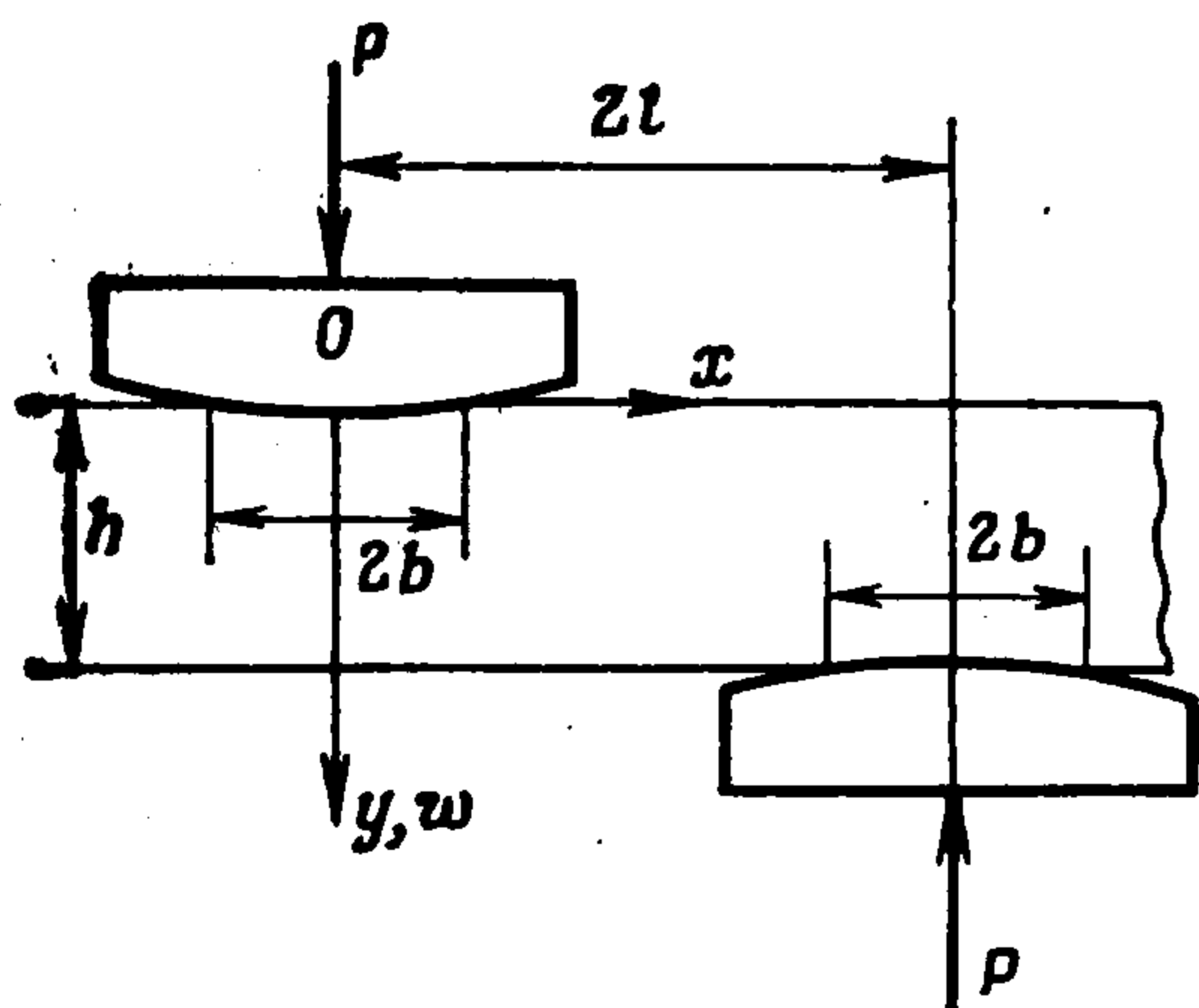


## ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ПЛАСТИНЫ ЖЕСТКИМИ ШТАМПАМИ

Э. И. Григолюк, В. М. Толкачев

(Москва)

Рассматривается периодическая контактная задача цилиндрического изгиба пластины жесткими штампами с позиций уравнений теории упругости, а также теории Кирхгофа — Лява с учетом и без учета поперечного обжатия материала пластины в зоне контакта. Анализ полученных решений позволяет осветить вопрос о погрешности и возможности использования классической теории пластин и оболочек при



Фиг. 1

рассмотрении контактных задач. Дается сравнительный анализ характера распределения и величины напряжений пластины в зоне контакта, характера распределения контактных реакций и зависимости между величиной зоны контакта и приложенной к штампу силой. При рассмотрении задачи с позиций теории упругости используется аппарат интегральных уравнений, решение по теории Кирхгофа получено в замкнутом виде.

Аналогичная задача на основе уравнений теории упругости методом, отличным от изложенного ниже, решена также в работе [1]. Однако в ней рассмотрены лишь достаточно толстые пластины (отношение толщины к характерному

размеру не менее  $1/20$ ) и не исследованы напряжения. Но именно сравнение напряжений, полученных при использовании различных теорий, может дать наиболее правильный ответ о применимости той или иной теории.

**1. Решение на основе уравнений теории упругости.** Рассмотрим бесконечную пластину толщиной  $h$  (фиг. 1), занимающую плоскость  $xz$  и нагруженную системой жестких штампов. Штампы одинаковые и расположены с постоянным шагом  $2l$ , имеют цилиндрическую поверхность основания, так что контакт происходит по всей длине вдоль оси  $z$  и пластина находится в условиях плоской деформации.

Сначала запишем решение для самоуравновешенной системы нормальных сосредоточенных сил  $P_1$ , приложенных в точках  $x = 0, \pm 2l, \pm 4l, \dots$ . Используя общее решение [2] и граничные условия для напряжений

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \sigma_y &= -\frac{P_1}{2l} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\varphi \right) \quad \text{при } y=0 \\ \sigma_y &= -\frac{P_1}{2l} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos n\varphi \right) \quad \text{при } y=h \\ \tau_{xy} &= 0 \quad \text{при } y=0, h; \quad \varphi = \pi x/2l \end{aligned}$$

получим

$$(1.2) \quad \sigma_x = \frac{P_1}{2l} \sum_{m=1}^{\infty} [\psi_{1m}''(t) + (-1)^m \psi_{3m}''(t)] \cos m\varphi$$

$$\sigma_y = -\frac{P_1}{2l} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [\psi_{1m}(t) + (-1)^m \psi_{3m}(t)] \cos m\varphi \right\}$$

Здесь

$$t = \frac{m\pi y}{2l}, \quad \psi_{jm}'' = \frac{d^2 \psi_{jm}}{dt^2}$$

$$\psi_{jm}(t) = a_{jm} \operatorname{ch} t + b_{jm} \operatorname{sh} t + c_{jm} t \operatorname{ch} t + d_{jm} t \operatorname{sh} t$$

$$a_{1m} = 1, \quad a_{3m} = 0, \quad c_{1m} = (\operatorname{sh} \gamma \operatorname{ch} \gamma + \gamma) a_m^{-1}$$

$$c_{3m} = -(\gamma \operatorname{ch} \gamma + \operatorname{sh} \gamma) a_m^{-1}, \quad d_{1m} = -\operatorname{sh}^2 \gamma a_m^{-1}, \quad d_{3m} = \gamma \operatorname{sh} \gamma a_m^{-1}$$

$$b_{1m} = -c_{1m}, \quad b_{3m} = -c_{3m}, \quad a_m = \operatorname{sh}^2 \gamma - \gamma^2, \quad \gamma = m\pi h / 2l$$

Смещение  $w$  поверхности  $y = 0$  пластины в направлении оси  $y$  найдем путем интегрирования соотношения закона Гука для плоской деформации

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{E_1} (\sigma_y - \nu_1 \sigma_x), \quad E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1 - \nu}$$

С учетом (1.2) после выделения расходящейся части ряда получим ( $a_1$  — произвольная постоянная интегрирования)

$$(1.3) \quad w = -\frac{2P_1}{\pi E_1} \left( \ln \left| 2 \sin \frac{\varphi}{2} \right| - \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cos m\varphi + a_1 \right)$$

$$b_m = \frac{1}{m} [c_{1m} - 1 + (-1)^m c_{3m}]$$

Выражение (1.3) используется в качестве функции Грина для смещения зоны контакта пластины от реакции. С другой стороны, если кривизна основания штампа  $\kappa = 1/R = \text{const}$ , то смещение зоны] контакта пластины в случае плотного прилегания будет ( $d$  — неизвестное смещение штампа)

$$w = d - 2l^2 \varphi^2 / (\pi^2 R)$$

Приравнивание названных смещений приводит к интегральному уравнению для определения нормальной реакции  $q$  штампа

$$(1.4) \quad \int_{-\theta}^{\theta} q_1 \ln \left| 2 \sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right| d\varphi_0 = \int_{-\theta}^{\theta} q_1 K(\varphi - \varphi_1) d\varphi_1 + \varphi^2 + \delta$$

$$(-\theta < \varphi < \theta)$$

$$q = \frac{E_1 l}{2R} q_1, \quad K(\varphi - \varphi_1) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cos m(\varphi - \varphi_1)$$

Здесь  $2\theta$  — величина зоны контакта,  $\delta$  — произвольная постоянная, характеризующая смещение штампа.

Уравнение (1.4) преобразуем к уравнению Фредгольма второго рода путем обращения интеграла в левой части [3].

Обозначая для краткости правую часть уравнения (1.4) через  $f(\varphi)$  получим

$$(1.5) \quad q_1(\varphi_0) = \frac{1}{2\pi^2 X(\varphi_0)} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{X(\varphi) f'(\varphi) d\varphi}{\sin^{1/2}(\varphi - \varphi_0)} + \frac{A \cos^{1/2} \varphi_0}{\pi X(\varphi_0)},$$

$$X(\varphi) = \sqrt{2(\cos \varphi - \cos \theta)}$$

Здесь  $A$  — постоянная, определяемая из условия

$$(1.6) \quad A \ln \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{f(\varphi)}{X(\varphi)} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi$$

Так как функция  $f(\varphi)$  зависит от произвольной постоянной  $\delta$ , то постоянную  $A$ , согласно (1.6), можно считать произвольной, а само условие (1.6) не учитывать, так как при любом  $A$  оно выполняется подбором  $\delta$ .

Постоянную  $A$  подберем так, чтобы реакция  $q_1$  была ограниченной на концах зоны контакта. Для этого найдем условие обращения в нуль при  $\varphi = \pm \theta$  правой части уравнения (1.5). Используя тождества

$$X(\varphi) = \frac{X^2(\varphi_0)}{X(\varphi)} + \frac{2(\cos \varphi_0 - \cos \varphi)}{X(\varphi)},$$

$$\cos \varphi_0 - \cos \varphi = 2 \sin \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \sin \frac{\varphi_0 + \varphi}{2}$$

уравнение (1.5) перепишем в виде

$$q_1(\varphi_0) = \frac{X(\varphi_0)}{2\pi^2} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{f'(\varphi) d\varphi}{X(\varphi) \sin^{1/2}(\varphi - \varphi_0)} + \frac{A \cos^{1/2} \varphi_0}{\pi X(\varphi_0)} - \\ - \frac{1}{2\pi^2 X(\varphi_0)} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{4 \sin^{1/2}(\varphi + \varphi_0) f'(\varphi) d\varphi}{X(\varphi)}$$

Требование, чтобы сумма двух последних слагаемых обратилась в нуль, дает два условия

$$\int_{-\theta}^{\theta} \frac{f'(\varphi) \cos^{1/2} \varphi d\varphi}{X(\varphi)} = 0, \quad A = \frac{2}{\pi} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{f'(\varphi) \sin^{1/2} \varphi d\varphi}{X(\varphi)}$$

Второе условие можно считать выполненным — это формула для определения  $A$ , первое выполняется автоматически в силу четности функции  $f(\varphi)$ . Четность следует из элементарного анализа уравнения (1.4).

Итак

$$(1.7) \quad q_1(\varphi_0) = \frac{X(\varphi_0)}{2\pi^2} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{f'(\varphi) d\varphi}{X(\varphi) \sin^{1/2}(\varphi - \varphi_0)}$$

Из уравнения (1.4) можно установить, что функция  $q_1$  четная, поэтому в дальнейшем вместо ядра  $K(\varphi - \varphi_1)$  можно взять его четную часть  $K(\varphi, \varphi_1)$ . Внося после этого в уравнение (1.7) функцию  $f(\varphi)$  (напомним, что  $f(\varphi)$  — правая часть уравнения (1.4)), вычисляя соответствующие

интегралы и вводя новую неизвестную функцию  $y(\varphi)$  соотношением

$$(1.8) \quad q_1(\varphi) = X(\varphi) \cos \frac{\varphi}{2} y(\varphi)$$

получим следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода для  $y(\varphi)$ :

$$(1.9) \quad y(\varphi_0) \cos \frac{\varphi_0}{2} - \frac{1}{\pi} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} R(\varphi_1, \varphi_0) X(\varphi_1) \cos \frac{\varphi_1}{2} y(\varphi_1) d\varphi_1 = \frac{1}{\pi} b(\varphi_0)$$

Здесь  $(P_n = P_n(\cos \theta))$  — полиномы Лежандра,  $b_k$  — коэффициенты, определяемые в (1.3))

$$(1.10) \quad R(\varphi_1, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{dK(\varphi, \varphi_1)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{X(\varphi) \sin^{1/2}(\varphi - \varphi_0)} =$$

$$= - \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \omega_k(\varphi_0) \cos k\varphi_1$$

$$(1.11) \quad b(\varphi_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{\varphi d\varphi}{X(\varphi) \sin^{1/2}(\varphi - \varphi_0)},$$

$$\omega_k(\varphi_0) = \sum_{n=0}^{k-1} P_n \cos \left( n - k + \frac{1}{2} \right) \varphi_0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Численное решение уравнения (1.9) дано ниже. Зная его, можно определить нормальные напряжения  $\sigma_x$  в пластине, которые представляют наибольший интерес при оценке погрешностей, вносимых в решение задачи гипотезами Кирхгофа — Лява. Используя решение (1.2) для напряжений  $\sigma_x$  от сосредоточенных сил, напряжения от реакции  $q$  с учетом второй формулы (1.4) получим в виде

$$(1.12) \quad \sigma_x = \frac{E_1 l}{2\pi R} \sum_{m=1}^{\infty} f_m(t) \int_{-\vartheta}^{\vartheta} q_1 \cos m(\varphi - \varphi_1) d\varphi_1, \quad f_m(t) = \psi_{1m}''(t) +$$

$$+ (-1)^m \psi_{3m}''(t)$$

Условие равновесия штампа дает уравнение, связывающее величину зоны контакта  $\vartheta$  и силу  $P$ , приложенную к штампу

$$(1.13) \quad P = \frac{E_1 l^2}{\pi R} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} q_1 d\varphi$$

Если для рассмотренной выше пластины (фиг. 1), нагруженной системой штампов, считать справедливыми гипотезы Кирхгофа — Лява, то ее можно отождествить с пластиной, занимающей область  $-l \leq x \leq l$  и свободно опертой по кромкам  $x = \pm l$ . При действии на нее цилиндрического штампа с кривизной основания  $\kappa = 1/R = \text{const}$  максимальные напряжения в зоне контакта будут постоянными по длине зоны и равными

$$(1.14) \quad \sigma_1 = E_1 h / (2R)$$

Напряжения (1.12), вычисленные на основании уравнений теории упругости, удобно сравнивать с напряжениями (1.14) и проанализировать безразмерный параметр напряжений

$$(1.15) \quad \sigma = \sigma_x / \sigma_1$$

отклонение которого в зоне контакта от единицы и будет характеризовать погрешность, вносимую в решение теорией Кирхгофа — Лява.

Безразмерный параметр  $P^*$  силы  $P$ , приложенный к штампу, в рамках теории Кирхгофа — Лява связан с параметром  $\beta$  величины зоны контакта ( $2b$  — фактическая ширина зоны контакта) условием

$$(1.16) \quad P^* = 1 / (1 - \beta)$$

Здесь

$$P^* = \frac{PlR}{2D}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \beta = \frac{b}{l} = \frac{2\theta}{\pi}$$

Сравнивая параметры  $P^*$ , полученные с использованием формул (1.13) и (1.16), можно получить интегральную характеристику погрешности, вносимой теорией Кирхгофа — Лява.

Остановимся кратко на алгоритме численного решения задачи. Уравнение (1.9) решалось сведением его к системе алгебраических уравнений с помощью квадратурной формулы

$$(1.17) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{f(\alpha) d\alpha}{X(\alpha)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{f(\alpha_k)}{\cos^{1/2} \alpha_k}, \quad \alpha_k = -2 \arcsin \left( \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{2k-1}{2n} \pi \right)$$

которая путем простой замены переменной получается из квадратурной формулы Меллера [4] и является точной для полинома степени до  $2n - 1$ . Формула (1.17) использована также для вычисления интегралов (1.12), (1.13) и (1.11). Последний интеграл предварительно регуляризуется с помощью тождества

$$\int_{-\theta}^{\theta} \frac{d\varphi}{X(\varphi) \sin^{1/2}(\varphi - \varphi_0)} = 0$$

**2. Решение по теории Кирхгофа с учетом поперечного обжатия пластины.** Приведенные ниже численные расчеты позволяют сделать вывод о возможности использования теории Кирхгофа для достаточно тонких пластин. Однако теория Кирхгофа содержит некоторые формальные противоречия. Так, в составе реакции появляются сосредоточенные силы на концах зоны контакта как следствие скачка в перерезывающей силе. В начальной стадии контакта нарушается зависимость между усилием, приложенным к штампу, и величиной зоны контакта, так как зона контакта появляется не сразу, а лишь при возрастании усилия до некоторого значения.

Формальные противоречия можно устранить в рамках приближенных теорий либо учетом деформаций поперечного сдвига [5], либо поперечного обжатия пластины, либо тем и другим вместе. Ниже приведено решение с учетом поперечного обжатия, но без учета поперечных сдвигов.

Это решение, как и при учете поперечного сдвига, устраняет сосредоточенные силы на концах зоны контакта и отмеченное несоответствие между приложенной силой и величиной зоны контакта в начальной стадии. Кроме этого, характер изменения реакции по длине зоны контакта для зон средней и малой величины близок к истинному, в то время как учет только деформаций поперечного сдвига дает реакцию, имеющую максимальное значение на конце зоны контакта, где в действительности она должна быть равной нулю.

Величину поперечного обжатия найдем, применяя известный, но формально незаконный в рамках теории Кирхгофа прием интегрирования соотношения закона Гука для поперечной деформации  $\epsilon_y$  после нахождения напряжения  $\sigma_y$  из уравнения равновесия. Если под поперечным обжатием понимать разность между смещением  $w(0)$  поверхности контакта и смещением срединной поверхности пластины, то найдем

$$(2.1) \quad w(0) = w + \frac{13}{32} \frac{h}{E} q + \frac{\nu h^2}{8(1-\nu)} \frac{d^2 w}{dx^2}$$

где  $q$  — реакция, действующая со стороны штампа на пластину в направлении оси  $y$  (фиг. 1). Последнее слагаемое в формуле (2.1) для простоты отбросим, так как оно не нарушает качественной картины решения и, как показали расчеты с учетом этого слагаемого, практически не изменяет решение количественно.

Если, как и выше, кривизна основания штампа  $\kappa = 1/R = \text{const}$ , то условие плотного прилегания штампа и пластины в зоне контакта будет ( $d$  — смещение штампа)

$$(2.2) \quad w + \frac{13}{32} \frac{h}{E} q = d - \frac{\kappa x^2}{2}$$

Условие (2.2) можно рассматривать как формулу для определения прогиба  $w$ , если известна реакция. Уравнение же для реакции получим, если прогиб из (2.2) подставим в уравнение равновесия пластины в зоне контакта

$$d^4 w / dx^4 = q / D$$

В результате получим уравнение

$$(2.3) \quad \frac{d^4 q}{d\xi^4} + 4\omega^4 q = 0, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \omega = \frac{l}{h} \sqrt[4]{\frac{96}{13} (1-\nu^2)}$$

В отличие от решения для реакции  $q$ , полученного при учете только поперечного сдвига и определяемого из уравнения второго порядка, решение уравнения (2.3) можно подчинить не только условиям равновесия штампа, но и условию обращения реакции в нуль на концах зоны контакта. В рассматриваемом случае симметричного штампа это решение имеет вид ( $\beta = b/l$  — безразмерная величина зоны контакта)

$$(2.4) \quad q = \frac{\omega P}{l} \frac{f(\xi)}{\text{sh } \omega\beta - \sin \omega\beta}$$

$$f(\xi) = \text{sh } \omega(\beta + \xi) \sin \omega(\beta - \xi) + \text{sh } \omega(\beta - \xi) \sin \omega(\beta + \xi)$$

Из формулы (2.4) следует, что вид решения не зависит от условий закрепления пластины, эти условия будут влиять лишь на зависимость между силой  $P$  и величиной зоны контакта  $\beta$ .

Отметим, что в выражении для прогиба в зоне контакта, который определяется через реакцию (2.4) из соотношения (2.2), имеется два произвола: смещение штампа  $d$  и величина зоны контакта  $\beta$ . Общее решение для прогиба вне зоны контакта будет содержать четыре произвола. Эти шесть произволов позволят удовлетворить четырем условиям стыковки на конце зоны контакта и двум граничным условиям на конце пластины  $x = l$ .

Таким образом, получим соотношение между силой  $P$ , прижимающей штамп, и величиной зоны контакта  $\beta$ , а также между смещением  $d$  и  $\beta$ . В случае свободного опирания краев пластины имеем ( $P^*$  — параметр внешней нагрузки тот же, что и в (1.16))

$$P^* = \frac{1}{(1-\beta)\psi}, \quad a^* = 1 - \frac{1}{3}(1-\beta)^2 \frac{\psi_1}{\psi}$$

$$a^* = \frac{2dR}{l^2}, \quad \psi = 1 + \frac{1}{\omega(1-\beta)} \frac{\operatorname{ch} 2\omega\beta + \cos 2\omega\beta}{\operatorname{sh} 2\omega\beta - \sin 2\omega\beta}$$

$$\psi_1 = 1 + \frac{3}{\omega(1-\beta)} \frac{\operatorname{ch} 2\omega\beta + \cos 2\omega\beta}{\operatorname{sh} 2\omega\beta - \sin 2\omega\beta} + \frac{3}{\omega^2(1-\beta)^2} \frac{\operatorname{sh} 2\omega\beta + \sin 2\omega\beta}{\operatorname{sh} 2\omega\beta - \sin 2\omega\beta}$$

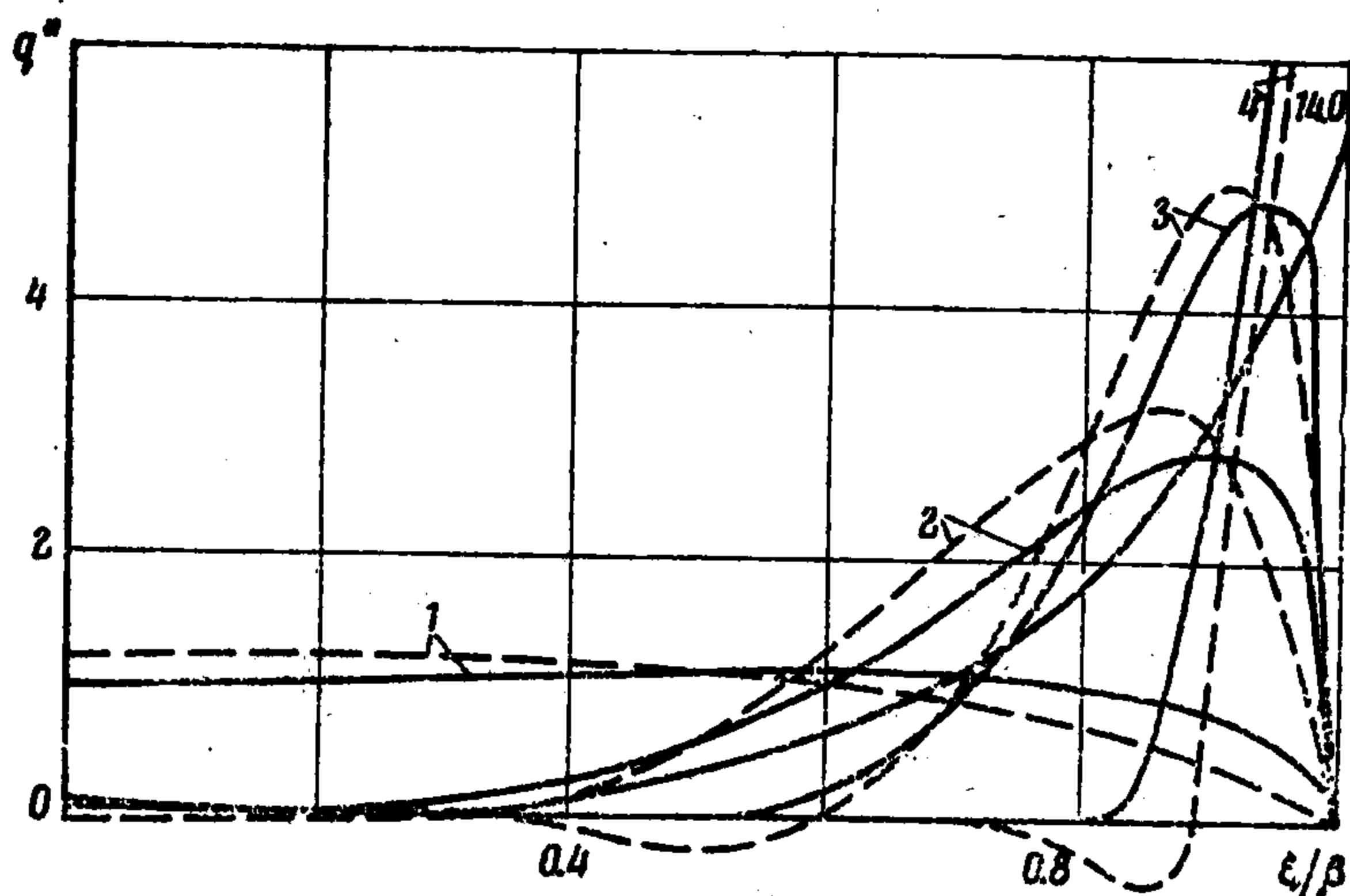
3. Остановимся на оценке точности численного решения п. 1 и результатах. Точность зависит от удерживаемого числа членов ряда (1.10), определяющего ядро уравнения (1.9), и числа  $n$  в квадратурной сумме типа (1.17). Вариацией этих величин установлено, что погрешность в реакции не превысит двух процентов, если число членов ряда (1.10) взять равным величине параметра  $2l/h$ . Погрешность в напряжениях при этом будет еще меньше. Что касается числа  $n$  в сумме (1.17), достаточно взять  $n = 20$ . При  $n = 20$  и 40 результаты совпадают даже в случае тонкой пластины ( $2l/h = 100$ ). При  $2l/h < 100$  реакция будет более плавной функцией и точность возрастает.

$2l/h$	20		100		$k$
	$y$	$O$	$y$	$O$	
0.03	0.819	0.720	1.017	1.018	1.031
0.06	0.970	0.981	1.049	1.050	1.064
0.1	1.032	1.045	1.095	1.096	1.111
0.3	1.303	1.313	1.402	1.404	1.429
0.6	2.140	2.166	2.417	2.425	2.500
0.8	3.740	3.821	4.701	4.709	5.000

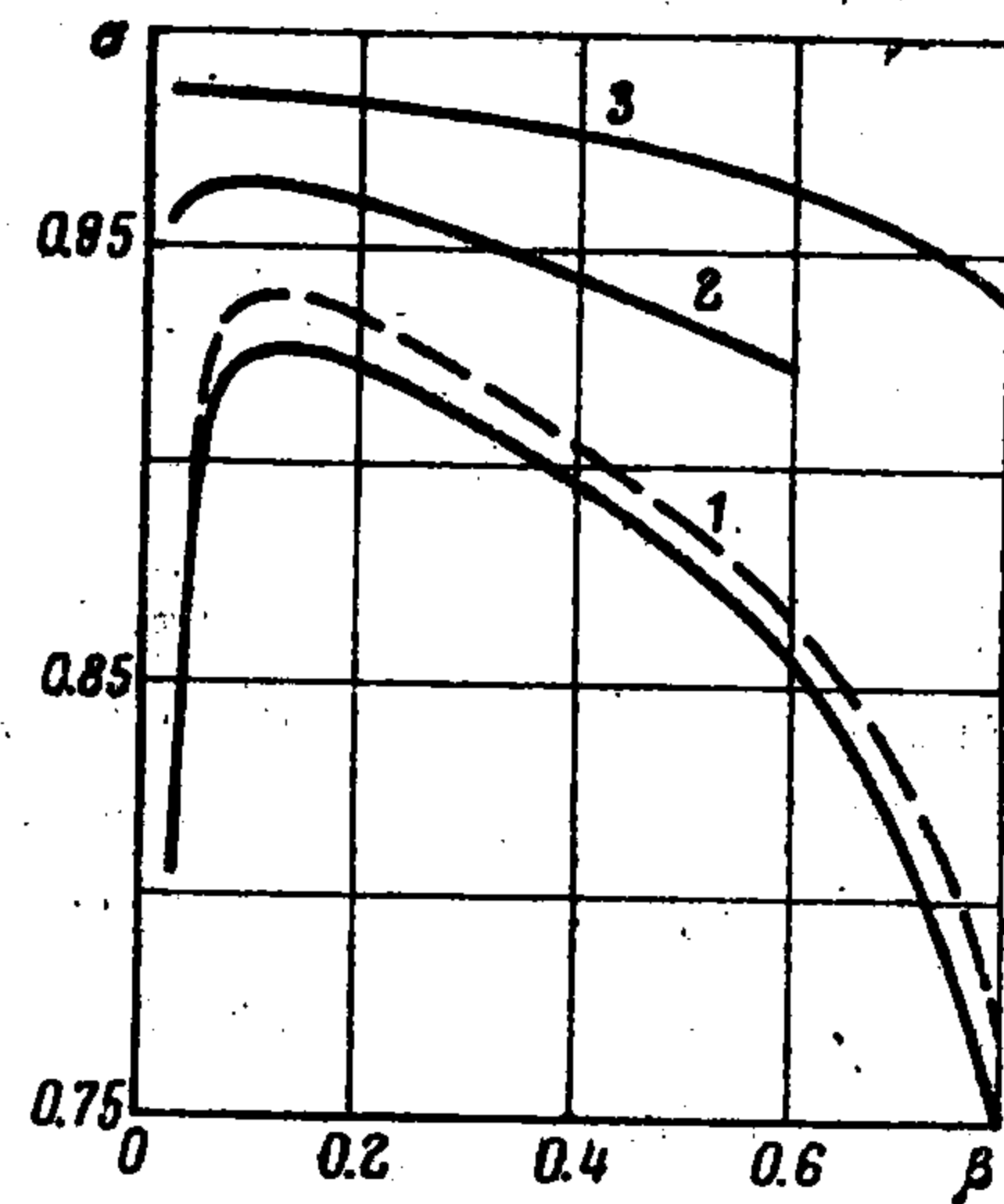
В таблице показано изменение параметра нагрузки  $P^*$  в зависимости от величины зоны контакта  $\beta = b/l$ . При этом графы  $y$  соответствуют решению п. 1,  $O$  — решению п. 2,  $k$  — решению по теории Кирхгофа — Лява без учета обжатия.

Видно, что расхождение между теорией Кирхгофа и теорией упругости имеет место лишь для очень малых и больших зон контакта. Учет поперечного обжатия улучшает результат.

На фиг. 2 показан характер изменения безразмерной реакции  $q^* = 2ql\beta / P$  по длине зоны контакта ( $\xi = x/b$ , фиг. 1) при следующих значениях  $2l/h$  и  $\beta$ : 1 —  $2l/h = 20$ ,  $\beta = 0,1$ , 2 —  $2l/h = 20$ ,  $\beta = 0,3$ , 3 —  $2l/h = 100$ ,  $\beta = 0,1$ , 4 —  $2l/h = 100$ ,  $\beta = 0,3$ . Сплошные линии соответствуют решению п. 1, пунктирные — решению по формулам п. 2. Как видим, с уменьшением толщины пластины имеет место концентрация реакции у конца зоны контакта. Приближенное решение с учетом попе-



Фиг. 2



Фиг. 3

речного обжатия достаточно хорошо совпадает с полученным по теории упругости. На фиг. 2 для сравнения показано решение по теории пластин с учетом поперечного сдвига, но без учета поперечного обжатия. Это сплошная монотонно возрастающая кривая, она соответствует  $2l/h = 20$ ,  $\beta = 0,3$ .

Численный расчет параметра напряжений (1.15) показал, что наиболее сильно он отличается от единицы на концах зоны контакта. Графики изменения его на концах зоны контакта в зависимости от величины зоны и толщины пластины даны на фиг. 3. Кривым 1—3 соответствуют значения  $2l/h$ , равные 20, 60, 100. Пунктиром показано решение по теории Кирхгофа, но с учетом характера изменения реакции в зоне контакта, полученного по формуле (2.4). Как видим, истинные напряжения в зоне контакта для тонких пластин незначительно отличаются от полученных по теории Кирхгофа.

Поступила 6 I 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Keer L. M., Silva M. A. G. Bending of a cantilever brought gradually into contact with a cylindrical supporting surface. *Internat. J. Mech. Sci.*, 1970, vol. 12, p. 751—760.
2. Филоненко-Борович М. М. Теория упругости. Изд. 4. М., Физматгиз, 1959.
3. Толкачев В. М. Действие острых штампов на бесконечно длинную цилиндрическую оболочку. *ПММ*, 1971, т. 35, вып. 4.
4. Крылов В. И. Справочная книга по численному интегрированию. М., «Наука», 1966.
5. Филоненко-Борович М. М. Изгиб тонкого стержня по заданной кривой. *Тр. Моск. электро-механ. ин-та инж. ж.-д. трансп.*, 1949, вып. 58.