

**КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О ВДАВЛИВАНИИ ШТАМПА
В УПРУГУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ
С ТОНКИМ УСИЛИВАЮЩИМ ПОКРЫТИЕМ**

Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян

(Ереван)

Исследуется контактная задача, когда штамп достаточно общей конфигурации под действием произвольной системы сил вдавливается в упругую полуплоскость с тонким усиливающим слоем. Предполагается, что полуплоскость находится в условиях плоской деформации или обобщенного плоского напряженного состояния. Относительно усиливающего тонкого слоя предполагается, что он в вертикальном направлении изгибается как обычная балка, а в горизонтальном направлении растягивается или сжимается как стержень. Иначе говоря, для усиливающего слоя считается справедливой модель изгиба балки в сочетании с моделью одноосного напряженного состояния стержня. Согласно результатам из тонких пластин [1, 2], эта модель имеет довольно широкую область приложимости и возможная ошибка в величинах напряжений, допускаемая ею, в случае слоя конечной длины l обычно имеет порядок отношения h^2 / l^2 , где h — высота слоя.

Остановимся на некоторых работах, примыкающих к исследуемой задаче и основанных на указанной модели.

Отметим, что если усиливающий слой настолько гибкий, что можно пренебречь его изгибной жесткостью, то этот слой будет деформироваться как стержень, находясь в одноосном напряженном состоянии. Модель одноосного напряженного состояния стержня, применительно к важным для инженерной практики задачам о передаче нагрузки от упругих креплений в виде накладок (стрингеров) малой толщины к массивным телам, предложена в [3].

С другой стороны, если пренебречь деформацией усиливающего слоя как стержня, считая, что он как балка только изгибается, то получается модель, хорошо известная в задачах теории изгиба балок и плит на упругом основании. Не останавливаясь на результатах и работах из этой области теории упругости, отметим лишь, что ее основные достижения с достаточной полнотой отражены в монографиях [4-7] и обстоятельных обзорных статьях [8, 9].

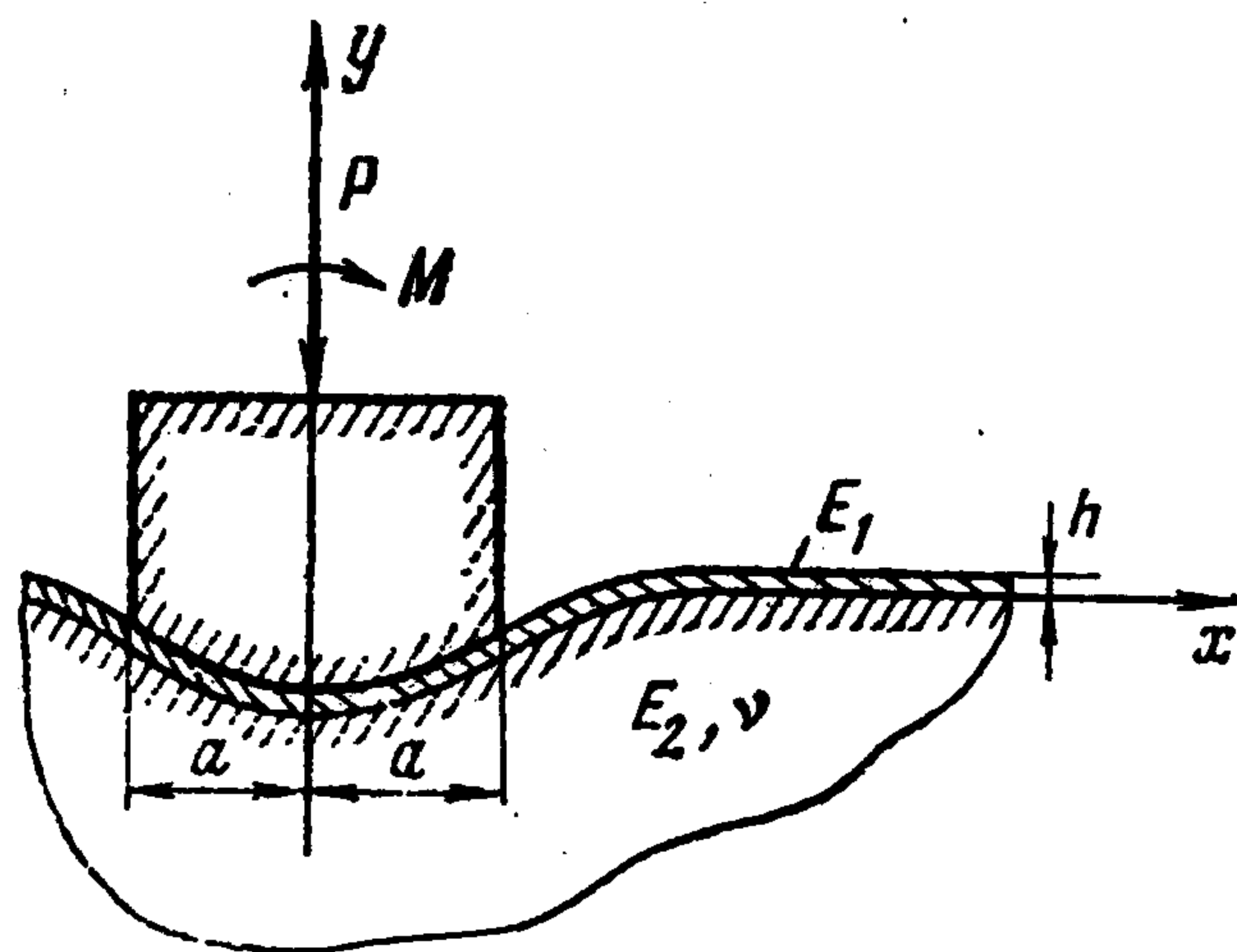
Далее, в работе [10] рассмотрены контактные задачи, когда штамп вдавливается в пластинку, свободно лежащую на упругом основании.

Укажем, наконец, на работу [11], в которой в несколько другой постановке рассматривалась по существу та же задача, что и в предлагаемой работе. Влияние усиливающего покрытия вводилось в граничное условие для полуплоскости, и решение исходной задачи свелось к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода относительно неизвестного давления под штампом. Явное выражение точного или приближенного решения этого уравнения не построено. Согласно некоторым результатам относительно поведения контактных напряжений вблизи концов штампа приложенные к штампу силы передаются основанию посредством сосредоточенных сил и моментов, приложенных на концах участка контакта, что противоречит свойствам решений граничных задач теории упругости и результатам теории сингулярных интегральных уравнений. Кроме того, при отсутствии усиливающего покрытия из результатов работы [11] не получаются известные решения классических контактных

задач для полуплоскости с присущими им особенностями на концах штампа. В конечном итоге полученные в указанной работе результаты неверны вследствие некорректного применения соответствующего математического аппарата.

В данной работе на основе приведенных выше предположений строится точное решение поставленной задачи. Определение законов распределения контактных напряжений под штампом и под усиливающим покрытием сводится к решению интегральных или интегро-дифференциальных уравнений с ядром Коши. Эти решения вне штампа под усиливающим покрытием представляются при помощи степенных рядов, а под штампом — рядами по классическим ортогональным многочленам Чебышева и Якоби. Приводятся числовые результаты.

1. Постановка задачи и вывод разрешающих уравнений. Пусть упругая полуплоскость, находящаяся в условиях плоской деформации, с модулем упругости E_2 и коэффициентом Пуассона ν , на своей границе усилена тонким покрытием в виде приваренного или приклеенного к ней бесконечного упругого слоя малой толщины h . Пусть, далее, в такую



Фиг. 1

полуплоскость под действием вертикальной силы P и момента M вдавливаются штамп, основание которого характеризуется достаточно гладкой функцией $f(x)$ (фиг. 1). Требуется определить законы распределения контактных напряжений под штампом и усиливающим покрытием. Предполагается, что под штампом действуют только нормальные контактные напряжения.

В качестве основной физической модели усиливающего слоя применяется модель изгиба балки в сочетании с моделью одноосного напряженного состояния стержня. Поскольку толщина усиливающего слоя предполагалась малой, то для того чтобы балка имела конечную жесткость на изгиб, необходимо, чтобы модуль упругости слоя E_1 был достаточно большим. Будем считать, что, вообще говоря, E_1 больше модуля упругости основания E_2 .

Выведем разрешающие уравнения поставленной задачи.

Обозначим через $q(x)$ и $\tau(x)$ соответственно нормальные и тангенциальные контактные напряжения, приложенные к границе упругой полуплоскости и действующие на линии соединения усиливающего слоя с основанием. Давление штампа на усиленную упругую полуплоскость обозначим через $p(x)$, а участком контакта пусть будет отрезок $[-a, a]$, причем считается, что $a \gg h$. Далее, через $u_2(x)$ и $v_2(x)$ обозначим соответственно горизонтальные и вертикальные перемещения граничных точек упругой полуплоскости от указанных нагрузок $q(x)$ и $\tau(x)$.

Рассматривая усиливающий слой как изгибающуюся балку, запишем уравнение ее изогнутой оси

$$(1.1) \quad D \frac{d^2 v_1}{dx^2} = M(x)$$

Здесь $v_1(x)$ — вертикальные прогибы балки в сечении x , $D = E_1 I$ — жесткость балки на изгиб, I — момент инерции поперечного сечения балки, а $M(x)$ — изгибающий момент в сечении x

$$(1.2) \quad M(x) = \int_x^{\infty} (\xi - x) [q(\xi) - p(\xi)] d\xi \quad (-\infty < x < \infty)$$

Рассматривая теперь усиливающий слой как стержень, находящийся в одноосном напряженном состоянии, при помощи закона Гука получим ($\varepsilon_x^{(1)}$ — осевая деформация в сечении x стержня)

$$(1.3) \quad \varepsilon_x^{(1)} = \frac{1}{hE_1} \int_{-\infty}^x \tau(\xi) d\xi \quad (-\infty < x < \infty)$$

На границе $y = 0$ упругой полуплоскости должны иметь место условия

$$v_1(x) = v_2(x), \quad du_2/dx = \varepsilon_x^{(1)} \quad (-\infty < x < \infty)$$

которые в сочетании с (1.1) показывают, что поставленная задача формулируется в виде соотношений

$$(1.4) \quad \begin{aligned} du_2/dx &= \varepsilon_x^{(1)} \quad (-\infty < x < \infty); \quad dv_2/dx = f'(x), \quad |x| < a \\ D \frac{d^2v_2}{dx^2} &= M(x), \quad |x| > a \end{aligned}$$

Отсюда и из известных асимптотических формул [12] для перемещений при больших x следует, что по крайней мере

$$(1.5) \quad q(x) = O(x^{-3}), \quad \tau(x) = O(x^{-3}) \quad \text{при } x \rightarrow \infty$$

Приняв во внимание известные формулы для $u_2(x)$ и $v_2(x)$ из [12], а также формулы (1.2), (1.3) и учитывая то, что $p(x) \equiv 0$ при $|x| > a$, (1.4) представим в виде

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(\xi) d\xi}{\xi - x} - \vartheta_0 q(x) &= \lambda \sigma(x) \quad (-\infty < x < \infty) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\xi) d\xi}{\xi - x} + \vartheta_0 \tau(x) &= -kf'(x), \quad |x| < a \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\xi) d\xi}{\xi - x} + \vartheta_0 \tau(x) &= \mu g(x), \quad |x| > a \\ \vartheta_0 &= \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}, \quad \lambda = \frac{1}{\vartheta_2 h E_1}, \quad k = \frac{1}{\vartheta_2}, \quad \mu = \frac{1}{\vartheta_2 D} \\ \vartheta_1 &= \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E_2}, \quad \vartheta_2 = \frac{2(1 - \nu^2)}{\pi E_2} \end{aligned}$$

Здесь введены следующие функции:

$$(1.7) \quad h(x) = \int_x^{\infty} (x - \xi) q(\xi) d\xi, \quad \sigma(x) = \int_{-\infty}^x \tau(\xi) d\xi \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$(1.8) \quad g(x) = \int_{\eta(x)}^x h(u) du, \quad \eta(x) = -\infty \text{ при } x < -a, \quad \eta(x) = \infty \text{ при } x > a$$

Входящие в левые части этих уравнений интегралы следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Остановимся на двух частных случаях системы уравнений (1.6). Пусть тонкое усиливающее покрытие отсутствует, что эквивалентно выполнению условия $h = 0$. Тогда из последнего уравнения этой системы вытекает, что $q(x) \equiv 0$ при $|x| > a$, а из первого уравнения — $\tau(x) \equiv 0$ при $|x| < \infty$. В этом случае система (1.6) переходит в одно уравнение

$$\vartheta_2 \int_{-a}^a \frac{q(\xi) d\xi}{\xi - x} = -f'(x), \quad |x| < a$$

совпадающее с известным интегральным уравнением классической контактной задачи о вдавлении штампа в упругую полуплоскость [12–14].

Пусть теперь усиливающий слой настолько гибкий, что можно пренебречь его изгибной жесткостью, т. е. положить $D = 0$. Кроме того, пусть вместо вдавления штампа в усиленную полуплоскость на некотором отрезке верхней грани усиливающего покрытия приложена горизонтальная нагрузка произвольной интенсивности. Для определенности будем считать, что эта нагрузка представляет собой горизонтальную сосредоточенную в точке $(0, h)$ силу величины P . Тогда, как говорилось выше, усиливающий слой будет деформироваться как стержень, находясь в одноосном напряженном состоянии. В этом случае из последнего уравнения системы (1.6), имеющего место на всей оси, вытекает, что $q(x) \equiv 0$ при $|x| < \infty$. С другой стороны, первое уравнение системы (1.6) переходит в следующее:

$$\vartheta_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(\xi) d\xi}{\xi - x} = \frac{1}{hE_1} [\sigma(x) + PH(x)] \quad (-\infty < x < \infty)$$

где $H(x)$ — известная функция Хевисайда. Этим интегро-дифференциальным уравнением описывается известная задача Мелана [3].

Таким образом, решение рассматриваемой задачи свелось к решению системы уравнений (1.6), которая в частных случаях переходит в известные уравнения.

Очевидно, что к системе (1.6) должны быть добавлены некоторые условия, вытекающие из равновесия штампа.

Легко видеть, что давление $p(x)$ под штампом определяется формулой

$$(1.9) \quad p(x) = q(x) + Df^{IV}(x), \quad |x| < a$$

Конкретизируя ограничения, накладываемые на функцию $f(x)$, потребуем, чтобы она имела до четвертого порядка включительно конечные производные на отрезке, причем первая производная в интервале $(-a, a)$ удовлетворяла условию Гёльдера. В дальнейшем на функцию $f(x)$ будут наложены еще некоторые ограничения, которые в совокупности оставляют все же достаточно большой произвол для ее выбора.

Далее будет рассматриваться только случай симметричного нагружения штампа, поскольку в случае кососимметричного нагружения получаются вполне аналогичные результаты.

Легко видеть, что в рассматриваемом случае функция $\sigma(x)$ четная, а функция $g(x)$ нечетная.

Теперь из последних двух уравнений системы (1.6) при помощи формулы обратного преобразования Гильберта [15] и первого уравнения этой же системы с учетом свойств четности только что указанных функций по-

лучим уравнение на полупрямой (a, ∞)

$$(1.10) \quad \left(1 - \frac{\vartheta_0^2}{\pi^2}\right) q(x) = -\frac{2\mu}{\pi^2} \int_a^\infty \frac{\xi g(\xi) d\xi}{\xi^2 - x^2} + \frac{\lambda\vartheta_0}{\pi^2} \sigma(x) + \frac{2k}{\pi^2} F_+(x) \quad (a < x < \infty)$$

Здесь

$$(1.11) \quad F_+(x) = \int_0^a \frac{\xi f'(\xi) d\xi}{\xi^2 - x^2}$$

Чтобы получить второе аналогичное уравнение, заметим, что из первого уравнения (1.6) опять при помощи формулы обратного преобразования Гильберта имеем

$$(1.12) \quad \tau(x) = \frac{\vartheta_0^2}{\pi^2} \tau(x) - \frac{\vartheta_0\mu}{\pi^2} g(x) - \frac{\lambda}{\pi^2} r(x), \quad r(x) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\sigma(\xi) d\xi}{\xi - x} \quad (|x| > a)$$

где учтено третье уравнение системы (1.6). Можно показать, что

$$(1.13) \quad r(x) = \vartheta_0 Q(x) + \lambda \Sigma(x), \quad Q(x) = \int_{\eta(x)}^x q(\xi) d\xi, \quad \Sigma(x) = \int_{\eta(x)}^x \sigma(\xi) d\xi$$

Приняв во внимание (1.12) и (1.13), получим второе искомое уравнение, которое вместе с (1.10) составляет систему разрешающих уравнений

$$(1.14) \quad \begin{aligned} q(x) &= -\lambda_0 \int_a^\infty \frac{\xi g(\xi) d\xi}{\xi^2 - x^2} + \mu_0 \sigma(x) + \nu_0 F_+(x) \\ \tau(x) &= -\lambda_1 g(x) + \mu_0 \int_x^\infty q(\xi) d\xi + \mu_1 \int_x^\infty \sigma(\xi) d\xi, \quad a < x < \infty \\ \lambda_0 &= \frac{2\mu}{\theta}, \quad \mu_0 = \frac{\lambda\vartheta_0}{\theta}, \quad \nu_0 = \frac{2k}{\theta}, \quad \lambda_1 = \frac{\vartheta_0\mu}{\theta}, \quad \mu_1 = \frac{\lambda^2}{\theta}, \quad \theta = \pi^2 - \vartheta_0^2 \end{aligned}$$

Таким образом, в случае симметричного нагружения штампа неизвестные контактные напряжения $q(x)$ и $\tau(x)$ под тонким усиливающим покрытием на интервале $a < x < \infty$ и, следовательно, также на интервале $-\infty < x < -a$ определяются из системы сингулярных интегродифференциальных уравнений (1.14), содержащей функции $g(x)$ и $\sigma(x)$, связанные с функциями $q(x)$ и $\tau(x)$ посредством формул (1.7) и (1.8).

Приступим к выводу уравнений, из которых будут определяться неизвестные контактные напряжения $q(x)$ и $\tau(x)$ под усиливающим покрытием на интервале $(-a, a)$. С этой целью заметим, что на основании первых двух уравнений системы (1.6) и свойств четности функций $q(x)$ и $\tau(x)$ можем записать

$$(1.15) \quad \begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{\tau(\xi) d\xi}{\xi - x} - \vartheta_0 q(x) &= -\lambda T(x) - f_1(x), \quad T(x) = \int_x^a \tau(\xi) d\xi \\ \int_{-a}^a \frac{q(\xi) d\xi}{\xi - x} + \vartheta_0 \tau(x) &= -kf'(x) - f_2(x), \quad -a < x < a \\ f_1(x) &= \lambda \int_a^\infty \tau(\xi) d\xi + 2 \int_a^\infty \frac{\xi \tau(\xi) d\xi}{\xi^2 - x^2}, \quad f_2(x) = 2x \int_a^\infty \frac{q(\xi) d\xi}{\xi^2 - x^2} \end{aligned}$$

Очевидно, что функции $T(x)$ и $f_1(x)$ четные, а функция $f_2(x)$ нечетная.

Умножив первое уравнение системы (1.15) на мнимую единицу i и сложив со вторым уравнением, после некоторых элементарных выкладок придем к одному уравнению

$$(1.16) \quad \int_{-1}^1 \frac{\chi_0(s) ds}{s-t} - i\vartheta_0 \chi_0(t) = -i\lambda a \int_t^1 \tau_0(s) ds - F_0(t) \quad (-1 < t < 1)$$

$$\chi_0(t) = q_0(t) + i\tau_0(t), \quad q_0(t) = \frac{aq(at)}{P}, \quad \tau_0(t) = \frac{a\tau(at)}{P}$$

$$F_0(t) = \frac{aF(at)}{P} \quad (|t| < 1); \quad F(x) = kf'(x) + f_2(x) + if_1(x) \quad (|x| < a)$$

С другой стороны, условие равновесия штампа дает соотношение

$$(1.17) \quad \int_{-1}^1 q_0(t) dt = A, \quad A = 1 + \frac{2Df'''(a)}{P}$$

Таким образом, в случае симметричного нагружения штампа неизвестные контактные напряжения $q(x)$ и $\tau(x)$ под тонким усиливающим покрытием на интервале $(-a, a)$ определяются, после того как на интервалах $(-\infty, -a)$ и (a, ∞) они уже определены из системы (1.14), из сингулярного интегро-дифференциального уравнения (1.16), которое должно рассматриваться вместе с условием (1.17).

Отметим, что вследствие свойств четности входящих в (1.16) функций

$$(1.18) \quad \overline{\chi_0(-t)} = \chi_0(t), \quad \overline{F_0(-t)} = -F_0(t) \quad (|t| < 1)$$

Исходную систему уравнений (1.6) можно преобразовать также к уравнениям другого вида.

А именно, поскольку первое уравнение этой системы имеет место на всей оси, то при помощи преобразования Фурье функцию $\tau(x)$ можно выразить через функцию $q(x)$. В результате получим

$$(1.19) \quad \tau(x) = -\vartheta_0 \int_{-\infty}^{\infty} L(\xi-x) q(\xi) d\xi \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$L(u) = \frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{u} - \alpha_1 [\text{Ci}(\alpha_1 u) \sin \alpha_1 u - \text{si}(\alpha_1 u) \cos \alpha_1 u] \right\}, \quad \alpha_1 = \frac{\lambda}{\pi}$$

Здесь $\text{Ci}(x)$ и $\text{si}(x)$ — интегральный косинус и синус соответственно [16].

После подстановки выражения $\tau(x)$ из (1.19) в остальные два уравнения системы (1.6) имеем

$$(1.20) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\xi) d\xi}{\xi-x} - \vartheta_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} L(\xi-x) q(\xi) d\xi = \varphi(x) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\varphi(x) = -kf'(x) \quad \text{при } |x| < a, \quad \varphi(x) = \mu g(x) \quad \text{при } |x| > a$$

Отсюда опять при помощи преобразования Фурье находим

$$(1.21) \quad q(x) = \frac{\mu}{\pi} \left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_a^{\infty} \right) R(\xi-x) g(\xi) d\xi - F(x), \quad (|x| > a)$$

$$R(u) = \frac{A}{u} - \frac{B}{\theta} \{ \sin(\beta_1 u) \text{Ci}(\beta_1 u) - \cos(\beta_1 u) [\pi + \text{si}(\beta_1 u)] \}$$

$$A = \frac{\pi}{\theta}, \quad B = \frac{\lambda\pi^2}{\theta} + \lambda, \quad \beta_1 = \frac{\lambda\pi}{\theta}, \quad F(x) = \frac{k}{\pi} \int_{-a}^a R(\xi-x) \times$$

$$\times f'(\xi) d\xi$$

Итак, контактные напряжения $q(x)$ под усиливающим покрытием при $|x| > a$ могут определяться также из интегро-дифференциального уравнения (1.21).

Чтобы получить второе уравнение для определения $q(x)$ на интервале $(-a, a)$, уравнение (1.20) при $|x| < a$ представим в виде

$$\int_{-a}^a \frac{q(\xi) d\xi}{\xi - x} - \theta_0^2 \int_{-a}^a L(\xi - x) q(\xi) d\xi =$$

$$= -kf'(x) - \left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_a^{\infty} \right) \frac{q(\xi) d\xi}{\xi - x} + \theta_0^2 \left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_a^{\infty} \right) L(\xi - x) q(\xi) d\xi$$

Приняв во внимание приведенное выше выражение функции $L(u)$, приходим ко второму искомому уравнению

$$(1.22) \quad \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{s-t} + \alpha_0 Q_0(s-t) \right] q_0(s) ds = H_0(t) \quad (|t| < 1)$$

$$Q_0(u) = \text{Ci}(a\alpha_1 u) \sin(a\alpha_1 u) - \text{si}(a\alpha_1 u) \cos(a\alpha_1 u), \quad q_0(t) = \frac{aq(at)}{P}$$

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_1 a \theta_0^2}{\theta}, \quad k_0 = \frac{k\pi^2}{\theta}, \quad H_0(t) = \frac{aH_*(at)}{P}$$

$$H_*(x) = -kof'(x) - \left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_a^{\infty} \right) \left[\frac{1}{\xi - x} + \frac{\alpha_0}{a} Q_0\left(\frac{\xi - x}{a}\right) \right] \times$$

$$\times q(\xi) d\xi \quad (|x| < a)$$

При этом решение интегрального уравнения (1.22) должно удовлетворять условию (1.17), а также условию, вытекающему из моментного равновесия штампа

$$\int_{-1}^1 t q_0(t) dt = A_0, \quad A_0 = \frac{M - 2D [af'''(a) - f''(a)]}{aP}$$

Итак, контактные напряжения $q(x)$ под усиливающим покрытием на интервале $(-a, a)$ могут определяться, после того как они уже определены при $|x| > a$ из интегро-дифференциального уравнения (1.21), также из интегрального уравнения (1.22), ядро которого представлено в виде суммы ядра Коши и непрерывного ядра, порожденного функцией $Q_0(u)$.

Важно отметить, что из (1.22) при помощи (1.9) непосредственно получится интегральное уравнение относительно давления под штампом $p(x)$. Это уравнение, очевидно, имеет ту же самую структуру, что и уравнение (1.22).

В дальнейшем будем в основном останавливаться только на решениях системы (1.14) и уравнения (1.16), поскольку они удобнее для построения нужного решения в простом виде и быстрее приводят к цели.

Обсудим один важный частный случай поставленной задачи. Так как тангенциальные контактные напряжения под штампом отсутствуют и толщина усиливающего слоя весьма мала, то с достаточной точностью можно утверждать, что эти напряжения будут весьма малыми величинами также на линии соединения усиливающего слоя с упругой полуплоскостью. Тогда будем иметь контактную задачу о вдавливании штампа в упругую полосу малой толщины, свободно лежащую на упругом основании. При этом предполагается, что полоса соприкасается с основанием по всей своей длине.

Запишем разрешающие уравнения в указанном частном случае. Очевидно, что эта задача математически эквивалентна выполнению условий

$$(1.23) \quad \frac{dv_2}{dx} = f'(x), \quad |x| < a; \quad D \frac{d^2v_2}{dx^2} = M(x), \quad |x| > a$$

$$v_2(x) = -\vartheta_2 \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{1}{|x-\xi|} q(\xi) d\xi$$

Далее, рассматривая только случай симметричного нагружения штампа и поступая вполне аналогично изложенному выше, на основании (1.23) находим, что контактные напряжения $q(x)$ под усиливающим покрытием на интервале (a, ∞) определяются из сингулярного интегро-дифференциального уравнения

$$(1.24) \quad q(x) = -\frac{2\mu}{\pi^2} \int_a^{\infty} \frac{\xi g(\xi) d\xi}{\xi^2 - x^2} + \frac{2k}{\pi^2} F_+(x) \quad (a < x < \infty)$$

где функция $F_+(x)$ дается формулой (1.11). Эти же напряжения под усиливающим покрытием на интервале $(-a, a)$ будут определяться из интегрального уравнения

$$(1.25) \quad \int_{-1}^1 \frac{q_0(s) ds}{s-t} = -G_0(t) \quad (|t| < 1)$$

$$q_0(t) = aq(at) / P, \quad G_0(t) = aG(at) / P$$

$$G(x) = kf'(x) + 2x \int_a^{\infty} \frac{q(\xi) d\xi}{\xi^2 - x^2} \quad (|x| < a)$$

При этом, как и раньше, решение интегрального уравнения (1.25) получится после того, как известно решение уравнения (1.24), и должно удовлетворять условию (1.17).

Отметим, что интегро-дифференциальное уравнение (1.24) можно свести к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с непрерывным ядром. На этом, однако, здесь останавливаться не будем.

2. Сведение основных разрешающих уравнений к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений и их исследование. Способ решения полученных в п. 1 разрешающих уравнений основывается на их сведении к вполне или квазивполне регулярным бесконечным системам линейных алгебраических уравнений. С этой целью сначала обратимся к системе уравнений (1.14). Исходя из (1.5), положим

$$(2.1) \quad q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{x^{2n+2}}, \quad \tau(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{x^{2n+1}} \quad (a < x < \infty)$$

где $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. Приняв во внимание соотношения (1.7), (1.8) и (1.11), отсюда

получим

$$(2.2) \quad g(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n(4n^2-1)x^{2n-1}}, \quad \sigma(x) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{nx^{2n}}, \quad (x > a)$$

$$\int_x^{\infty} \sigma(\xi) d\xi = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n(2n-1)x^{2n-1}}, \quad \int_x^{\infty} q(\xi) d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(2n+1)x^{2n+1}}$$

$$F_+(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{x^{2n}} \quad (x > a); \quad b_n = \int_0^a \xi^{2n-1} f'(\xi) d\xi \quad (n=1, 2, \dots)$$

Далее введем в рассмотрение функцию

$$I(x) = \int_a^{\infty} \frac{\xi g(\xi) d\xi}{\xi^2 - x^2} \quad (x > a)$$

Будем иметь

$$I(x) = \int_a^x \frac{\xi g(\xi) d\xi}{\xi^2 - x^2} + \int_x^{\infty} \frac{\xi g(\xi) d\xi}{\xi^2 - x^2} = -\frac{1}{x^2} \int_a^x \frac{\xi g(\xi) d\xi}{1 - \xi^2/x^2} +$$

$$+ \int_x^{\infty} \frac{\xi g(\xi) d\xi}{\xi^2(1 - x^2/\xi^2)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2n}} \int_a^x \xi^{2n-1} g(\xi) d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} \int_x^{\infty} \frac{g(\xi) d\xi}{\xi^{2n-1}}$$

Учитывая первое равенство из (2.2), находим

$$(2.3) \quad I(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2n}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m a^{2n-2m+1}}{2m(4m^2-1)(2n-2m+1)} \quad (x > a)$$

Подставив выражения (2.1)–(2.3) в систему (1.14) и приравнявая соответствующие коэффициенты, придем к системе бесконечного числа линейных уравнений

$$(2.4) \quad x_m + \frac{\lambda_0 a^3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} K_{m,n}^{(11)} n x_n + \frac{\mu_0 a^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} K_{m,n}^{(12)} n y_n = c_m^{(1)}$$

$$y_m + \frac{\mu_1 a^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} K_{m,n}^{(21)} n y_n + \sum_{n=1}^{\infty} K_{m,n}^{(22)} n x_n = c_m^{(2)}, \quad m=1, 2, \dots$$

Здесь

$$K_{m,n}^{(11)} = [n(4n^2-1)(2m-2n+3)]^{-1} \quad (m, n=1, 2, \dots)$$

$$K_{m,n}^{(12)} = 0, \quad n=1, 2, \dots, m, m+2, m+3, \dots; \quad K_{m,n}^{(12)} = (m+1)^{-1},$$

$$n=m+1$$

$$K_{m,n}^{(21)} = 0, \quad n=1, 2, \dots, m, m+2, m+3, \dots; \quad K_{m,n}^{(21)} =$$

$$= [(m+1)(2m+1)]^{-1}, \quad n=m+1$$

$$K_{m,n}^{(22)} = 0, \quad n=1, 2, \dots, m-1, m+2, \dots; \quad K_{m,n}^{(22)} = -\mu_0(2m+1)^{-1},$$

$$n=m$$

$$K_{m,n}^{(22)} = \lambda_1 a^2 [2(m+1)(4m^2+8m+3)]^{-1}, \quad n=m+1$$

$$A_n = a^{2n} x_n, \quad B_n = a^{2n} y_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$b_{m+1} = a^{2m+1} c_m, \quad c_m = \int_0^1 u^{2m+1} f'_u(au) du \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

$$c_m^{(1)} = -\nu_0 a c_m, \quad c_m^{(2)} = 0 \quad (m=1, 2, \dots)$$

Отметим, что коэффициенты $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ должны удовлетворять дополнительному соотношению

$$(2.5) \quad \left(\lambda_0 a - \frac{\mu_0 \lambda_1}{\mu_1} \right) \frac{x_1}{3} - \lambda_0 a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{(n+1)(4n^2+8n+3)(2n-1)} = \\ = -\frac{2\nu_0}{a} c_0$$

которое может рассматриваться как некоторое ограничение на функцию $f(x)$.

Обратимся теперь к интегро-дифференциальному уравнению (1.16). Его сведение к бесконечной системе линейных уравнений основывается на следующих интегральных соотношениях:

$$(2.6) \quad w(x) P_n^{(\gamma-1/2, -\gamma-1/2)}(x) + \frac{\operatorname{ctg} \pi \gamma}{\pi} \int_{-1}^1 w(t) P_n^{(\gamma-1/2, -\gamma-1/2)}(t) \frac{dt}{t-x} = \\ = (2 \sin \pi \gamma)^{-1} P_{n-1}^{(1/2-\gamma, 1/2+\gamma)}(x) \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$(2.7) \quad w(x) + \frac{\operatorname{ctg} \pi \gamma}{\pi} \int_{-1}^1 w(t) \frac{dt}{t-x} = 0 \quad (w(x) = (1-x)^{\gamma-1/2} (1+x)^{-\gamma-1/2})$$

Здесь $\{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ($\operatorname{Re}(\alpha, \beta) > -1$) — многочлены Якоби [16], ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$.

Справедливость соотношения (2.7) непосредственно следует из того, что функцией $w(x)$ дается решение известной контактной задачи В. А. Абрамова [12].

Соотношение (2.6) также известно и непосредственно следует из формул (16), (20) и (21), содержащихся в [16], стр. 172. Эти формулы содержатся также в [17].

Следует отметить, что вывод интегральных соотношений (2.6) и (2.7) приведен также в работах [18–20]. (То, что соотношения (2.6) и (2.7) ранее были установлены в работах [18–19], по-видимому, не было известно Г. Я. Попову, получившему в работе [20] эквивалентные им соотношения.)

Интегро-дифференциальное уравнение (1.16) при условии (1.17) представим в виде

$$(2.8) \quad \chi_0(t) + \frac{\operatorname{ctg} \pi \gamma}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\chi_0(s) ds}{s-t} = \frac{\lambda a}{\vartheta_0} \int_t^1 \tau_0(s) ds - \frac{i}{\vartheta_0} F_0(t) \quad (|t| < 1)$$

где положено $\pi^{-1} \operatorname{ctg} \pi \gamma = i / \vartheta_0$. Положив далее $\gamma = -i\alpha$, получим

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\pi + \vartheta_0}{\pi - \vartheta_0} = \frac{1}{2\pi} \ln(3 - 4\nu)$$

Согласно свойству функции $\chi_0(t)$ из (1.18) можно положить

$$(2.9) \quad \chi_0(t) = [w_0(t)]^{-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} u_n P_{2n}^{(\alpha)}(t) + i \sum_{n=1}^{\infty} v_n P_{2n-1}^{(\alpha)}(t) \right], \quad |t| < 1 \\ w_0(t) = (1-t)^{1/2+i\alpha} (1+t)^{1/2-i\alpha}, \quad P_n^{(\alpha)}(t) = P_n^{(-1/2-i\alpha, -1/2+i\alpha)}(t)$$

где $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ — неизвестные вещественные коэффициенты, подлежащие определению.

Прежде чем приступить к определению этих коэффициентов, приведем выражения интегралов

$$(2.10) \quad K_n(x) = \int_x^1 [w_0(y)]^{-1} P_n^{(\alpha)}(y) dy \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

При помощи формулы (38) из [16], стр. 175 сразу получим

$$(2.11) \quad K_n(x) = (2n)^{-1} (1-x)^{1/2-i\alpha} (1+x)^{1/2+i\alpha} P_{n-1}^{(1/2-i\alpha, 1/2+i\alpha)}(x) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Путем замены переменной $y = x + u(1-x)$ ($-1 \leq u \leq 1$) отдельно вычислим интеграл $K_0(x)$. Получим

$$\begin{aligned} K_0(x) &= \int_x^1 (1-y)^{-1/2-i\alpha} (1+y)^{-1/2+i\alpha} dy = \\ &= (1-x)^{1/2-i\alpha} (1+x)^{-1/2+i\alpha} \int_0^1 (1-u)^{-1/2-i\alpha} (1-uz)^{-1/2+i\alpha} du \quad \left(z = \frac{x-1}{x+1} \right) \end{aligned}$$

При помощи известного интегрального представления гипергеометрической функции (см. [21], стр. 123, формула (1)) после некоторых элементарных преобразований отсюда находим

$$(2.12) \quad K_0(x) = (1-2i\alpha)^{-1} (1-x)^{1/2-i\alpha} (1+x)^{1/2+i\alpha} F\left(1, 1; \frac{3}{2}-i\alpha; \frac{1-x}{2}\right)$$

Здесь же отметим, что на основании (2.9) условие (1.17) дает

$$(2.13) \quad u_0 = \frac{A}{\pi} \operatorname{ch} \pi \alpha.$$

Подставим теперь выражение функции $\chi_0(t)$ из (2.9) в уравнение (2.8) и учтем соотношения (2.6), (2.7), а также формулы (2.10) — (2.13). Следуя известной процедуре, в результате получим бесконечную систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} (2.14) \quad \bar{U}_m + \frac{\lambda a \operatorname{sh} \pi \alpha}{4\theta_0} (h_{2m}^2 m^{1-\delta})^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\delta} R_{m,n}^{(11)} U_n + \\ + \frac{i\lambda a \operatorname{sh} \pi \alpha}{2\theta_0} (h_{2m}^2 m^{1-\delta})^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1-\delta}}{2n-1} R_{m,n}^{(12)} V_n = d_m^{(1)} \\ V_m - \frac{i\lambda a \operatorname{sh} \pi \alpha}{4\theta_0} (h_{2m-1}^2 m^{1-\delta})^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\delta} R_{m,n}^{(21)} U_n + \\ + \frac{\lambda a \operatorname{sh} \pi \alpha}{2\theta_0} (h_{2m-1}^2 m^{1-\delta})^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1-\delta}}{2n-1} R_{m,n}^{(22)} V_n = d_m^{(2)} \quad (m = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Здесь ($\Gamma(x)$ — гамма-функция)

$$u_n = n^{1-\delta} U_n, \quad v_n = n^{1-\delta} V_n \quad (0 < \delta < 1/2) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$h_m = \sqrt{2} (m!)^{-1} \left| \Gamma\left(m + \frac{1}{2} + i\alpha\right) \right|$$

$$d_m^{(1)} = (h_{2m}^2 m^{1-\delta})^{-1} \int_{-1}^1 C(t) w_0(t) P_{2m-1}^{(1/2+i\alpha, 1/2-i\alpha)}(t) dt$$

$$d_m^{(2)} = (h_{2m-1}^2 m^{1-\delta})^{-1} \int_{-1}^1 C(t) w_0(t) P_{2m-2}^{(1/2+i\alpha, 1/2-i\alpha)}(t) dt, \quad (m = 1, 2, \dots).$$

$$C(t) = -\frac{\lambda a A \operatorname{sh} 2\pi\alpha}{2\pi\theta_0} \left[(1 - 2i\alpha)^{-1} \overline{w_0(t)} F\left(1, 1; \frac{3}{2} - i\alpha; \frac{1-t}{2}\right) - \right. \\ \left. - (1 + 2i\alpha)^{-1} w_0(t) F\left(1, 1; \frac{3}{2} + i\alpha; \frac{1-t}{2}\right) \right] - \frac{2 \operatorname{sh} \pi\alpha}{\theta_0} F_0(t)$$

$$R_{m,n}^{(j1)} = M_{2m-j, 2n-1} - N_{2m-j, 2n-1}; \quad R_{m,n}^{(j2)} = \\ = M_{2m-j, 2n-2} + N_{2m-j, 2n-2}, \quad j = 1, 2$$

$$M_{m,n} = \int_{-1}^1 (1-t^2) P_m^{(1/2+i\alpha, 1/2-i\alpha)}(t) P_n^{(1/2-i\alpha, 1/2+i\alpha)}(t) dt$$

$$N_{m,n} = \int_{-1}^1 (1-t^2) \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{2i\alpha} P_m^{(1/2+i\alpha, 1/2-i\alpha)}(t) P_n^{(1/2+i\alpha, 1/2-i\alpha)}(t) dt$$

Таким образом, решение интегро-дифференциального уравнения (1.16) при условии (1.17) сводится к решению бесконечной системы линейных уравнений (2.14).

В случае интегро-дифференциального уравнения (1.24), как и раньше, положим

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{x^{2n+2}} \quad (x > a)$$

Тогда соответствующая бесконечная система уравнений будет иметь вид

$$(2.15) \quad x_m + \frac{a^3 \mu}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n(4n^2-1)(2m-2n+3)} = \frac{2ak}{\pi^2} c_m \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Ее решение должно удовлетворять условию

$$(2.16) \quad \mu a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n(4n^2-1)(3-2n)} = -2kc_0$$

В случае интегрального уравнения (1.25) решение представим в виде

$$(2.17) \quad q_0(t) = (1-t^2)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} q_n^{(0)} T_{2n}(t) \quad (|t| < 1)$$

Здесь $\{T_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ — многочлены Чебышева первого рода.

Далее, приняв во внимание известное соотношение [16]

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(s) ds}{(s-x)\sqrt{1-s^2}} = \pi U_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

где $\{U_{n-1}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — многочлены Чебышева второго рода и подставив выражение $q_0(t)$ из (2.17) в уравнение (1.25), получим

$$(2.18) \quad q_n^{(0)} = -\frac{2}{\pi^2} \int_{-1}^1 G_0(t) U_{2n-1}(t) \sqrt{1-t^2} dt \quad (n = 1, 2, \dots)$$

При этом условии (1.17) дает $q_0^{(0)} = A/\pi$, из которого, как обычно [12-14], может определяться осадка штампа.

Это замечание не совсем точно. Здесь имеется в виду лишь определение некоторой постоянной, аналогичной той, которая входит в известное уравнение плоской контактной задачи о вдавливании штампа в упругую полуплоскость ([13], стр. 96, формулы (13) и (14))

$$\int_{-a}^a \ln \frac{1}{|x - \xi|} p(\xi) d\xi = \frac{c - f(x)}{\theta_2}$$

Если пренебречь неопределенной постоянной, фигурирующей в решении задачи Фламана и дающей абсолютно жесткое перемещение полуплоскости, то постоянная c будет совпадать с постоянной α (формула (3) на стр. 94 в [13]). Последнюю постоянную можно именовать осадкой штампа α , исходя из указанного интегрального уравнения Фредгольма первого рода, определить ее.

Например, в случае штампа с плоским основанием $f(x) \equiv 0$ при помощи соотношения

$$\int_{-a}^a \ln \frac{1}{|x - \xi|} \frac{d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} = \pi \ln \frac{2}{a}$$

и условия равновесия штампа, находим $c = \alpha = P\theta_2 \ln 2 / a$. Эта же формула содержится в [13] (стр. 20, формула (73)), где α следует заменить на α / θ_2 .

Именно в изложенном смысле следует истолковать указанное выше замечание.

Отметим, что после некоторых элементарных выкладок будем иметь

$$(2.19) \quad G_0(t) = \frac{ak}{P} f'(at) + \frac{2}{aP} \sum_{m=0}^{\infty} X_m t^{2m+1}, \quad |t| < 1$$

$$X_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2m + 2n + 3} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

После того как коэффициенты $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ уже определены из бесконечной системы (2.15), коэффициенты $\{X_m\}_{m=0}^{\infty}$ будут определяться посредством них при помощи последней формулы. Отметим еще, что при конкретных расчетах в (2.19) можно ограничиться конечными рядами.

Следует заметить, что вместо интегро-дифференциального уравнения (1.16) можно было бы рассматривать интегральное уравнение (1.22). Легко показать, что ядро, порожденное функцией $Q_0(t)$, имеет квадратично суммируемые в квадрате $-1 < t, s < 1$ первые частные производные. На основании этого, как в [22, 23], можно доказать, что, представив решение уравнения (1.22) рядом по многочленам Чебышева первого рода, относительно неизвестных коэффициентов получим квазиполную бесконечную систему линейных уравнений. Однако при этом особенности контактных напряжений $q_0(t)$ и, следовательно, особенности давления под штампом $p_0(t) = ap(at) / P$ на концах отрезка $[-1, 1]$ будут иметь вид квадратного корня вместо особенностей, фигурирующих в формуле (2.9). Последнее обстоятельство объясняется применением разных математических аппаратов, а именно аппаратов ортогональных многочленов Чебышева и Якоби, которые в конечном итоге все же дают один и тот же тип особенностей (в виде квадратного корня).

Обратимся к исследованию полученных бесконечных систем уравнений. Сначала займемся бесконечной системой (2.4). С этой целью следует оценить суммы

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} |K_{m,n}^{(11)}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|2m - 2n + 3| n (4n^2 - 1)} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Поступив совершенно аналогично изложенному в [25], можно показать, что по крайней мере

$$(2.20) \quad S_m = O(m^{-1+\varepsilon}) \quad \text{при } m \rightarrow \infty$$

где ε — сколь угодно малое положительное число. Следовательно, бесконечная система (2.4) при любых значениях параметров λ_0, μ_0, μ_1 и a квазивполне регулярна, притом порядок убывания соответствующих сумм дается формулой (2.20).

Более того, можно показать, что бесконечная система (2.4) при условии

$$\max \left\{ \frac{\lambda_0 a^3}{6} \zeta(3) + \frac{\mu_0 a^2}{4}, \frac{\lambda_1 a^2}{60} + \frac{\mu_1 a^2}{12} + \frac{\mu_0}{3} \right\} < 1$$

вполне регулярна, где $\zeta(s)$ — функция Римана [21].

Отметим, что эти результаты можно уточнить.

Исследование на регулярность бесконечной системы (2.14) основывается на формуле асимптотического представления многочленов Якоби [17]

$$(2.21) \quad P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \varphi) \approx \frac{\cos(N_0 \varphi - \beta_0)}{\sqrt{\pi n (\sin^{1/2} \varphi)^{1/2+\alpha} (\cos^{1/2} \varphi)^{1/2+\beta}}} + O(n^{-1/2}), \quad n \rightarrow \infty$$

$$N_0 = n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2}, \quad \beta_0 = \frac{2\alpha + 1}{4} \pi, \quad 0 < \varphi < \pi$$

В этой формуле обычно предполагается, что α и β — вещественные числа, притом $\alpha, \beta > -1$. Однако анализ соответствующих результатов из [17] (стр. 222—224) показывает, что формула (2.21) справедлива также при комплексных α и β , удовлетворяющих условиям $\operatorname{Re}(\alpha, \beta) > -1$. Исходя из (2.21), для ядер $\{R_{m,n}^{(ij)}\}_{m,n=1}^{\infty}$ ($i, j = 1, 2$) бесконечной системы (2.14) можно получить асимптотические формулы при больших m и n . Эти формулы имеют совершенно одинаковую структуру, и для иллюстрации достаточно ограничиться одной из них, например, для ядра $R_{m,n}^{(11)}$

$$(2.22) \quad R_{m,n}^{(11)} \approx \frac{4}{\pi \sqrt{(2n-1)(2m-1)}} \left[\operatorname{ch}^2 \frac{\pi \alpha}{2} Q_{m,n}^{(11)} - \frac{i \operatorname{sh} \pi \alpha}{2} Q_{m,n}^{(12)} + \right. \\ \left. + \frac{i \operatorname{sh} \pi \alpha}{2} Q_{m,n}^{(21)} + \operatorname{sh}^2 \frac{\pi \alpha}{2} Q_{m,n}^{(22)} \right], \quad m, n \rightarrow \infty$$

$$Q_{m,n}^{(21)} = \int_0^\pi \sin 2nu \sin 2mu \psi(u) du, \quad Q_{m,n}^{(12)} = \int_0^\pi \sin 2nu \cos 2mu \psi(u) du$$

$$Q_{m,n}^{(21)} = \int_0^\pi \cos 2nu \sin 2mu l(u) du, \quad Q_{m,n}^{(22)} = \int_0^\pi \cos 2nu \cos 2mu l(u) du$$

$$\psi(u) = \sin u [1 - (\operatorname{tg}^{1/2} u)^{2i\alpha}], \quad l(u) = \sin u [1 + (\operatorname{tg}^{1/2} u)^{2i\alpha}]$$

Теперь рассмотрим суммы

$$S_m^{(11)} = m^\delta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\delta} |R_{m,n}^{(11)}| \quad (m = 1, 2, \dots)$$

При помощи формулы (2.22) и неравенства Бесселя из теории рядов Фурье можно показать [22], что $S_m^{(11)} = O(m^{-1/\delta})$ при $m \rightarrow \infty$. Эта же формула имеет место для других аналогичных сумм. Следовательно, при лю-

бых значениях параметров, входящих в бесконечную систему (2.14), эта система квазивполне регулярна.

Следует отметить, что обстоятельное исследование базисных свойств биортогональной системы функций в пространстве $L_2[-1,1]$ комплекснозначных функций, порожденной системой многочленов $\{P_n^{(1/2-i\alpha, 1/2+i\alpha)}(t)\}_{n=0}^{\infty}$, позволит доказать при некоторых значениях параметров также полную регулярность бесконечной системы (2.14).

3. Пример. Здесь подробнее остановимся на указанном выше частном случае обсуждаемой задачи, когда штамп вдавливается в упругую полосу малой толщины, свободно лежащую на упругой полуплоскости. Тогда в случае симметрично нагруженного штампа, симметричной же конфигурации, неизвестные нормальные контактные напряжения $q(x)$ под полосой будут определяться из уравнения (1.24) и (1.25), а давление $p(x)$ под штампом — формулой (1.9).

Функцию $f(x)$, характеризующую основание штампа, возьмем в виде многочлена

$$(3.1) \quad f(x) = \sum_{p=0}^N a_p x^{2p}$$

произвольной, но фиксированной степени $2N$, при помощи которого с любой точностью можно аппроксимировать наперед заданную функцию $f(x)$ из упомянутого выше класса. В дальнейших рассуждениях фиксируя значение полудлины участка контакта штампа с усиленной полуплоскостью, положим $a = 1$. При этом бесконечная система линейных алгебраических уравнений (2.15) и дополнительное условие (2.16), эквивалентные интегро-дифференциальному уравнению (1.24), в случае функции $f(x)$ из (3.1) примут соответственно вид

$$(3.2) \quad x_m + \frac{\mu}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n(4n^2-1)(2m-2n+3)} = -\frac{2k}{\pi^2} c_m \quad (m=1, 2, \dots)$$

$$(3.3) \quad \mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n(4n^2-1)(3-2n)} = -2kc_0$$

Здесь

$$(3.4) \quad c_m = 2 \sum_{p=1}^N \frac{pa_p}{2(m+p)+1} \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

Функция $q(x)$ — контактное напряжение под усиливающим покрытием вне штампа — будет задаваться формулой

$$(3.5) \quad q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{x^{2n+2}} \quad (1 < x < \infty)$$

продолженной четным образом на интервал $(-\infty, -1)$.

Согласно (3.4) решение бесконечной системы (3.2) можно представить формулой

$$(3.6) \quad x_m = -\frac{4k}{\pi^2} \sum_{p=1}^N pa_p x_m^{(p)} \quad (m=1, 2, \dots)$$

где $x_m^{(p)}$ ($m = 1, 2, \dots$; $p = 1, 2, \dots, N$) — решение бесконечной системы

$$(3.7) \quad x_m^{(p)} + \frac{\mu}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^{(p)}}{n(4n^2-1)(2m-2n+3)} = \frac{1}{2(m+p)+1} \quad \begin{matrix} (m=1, 2, \dots; \\ p=1, 2, \dots, N) \end{matrix}$$

Условие (3.3) запишется в виде

$$(3.8) \quad \frac{\mu}{\pi^2} \sum_{p=1}^N p a_p Y_p = \sum_{p=1}^N \frac{p a_p}{2p+1}, \quad Y_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^{(p)}}{n(4n^2-1)(3-2n)} \quad (p=1, 2, \dots)$$

Итак, один из коэффициентов a_p ($p = 1, 2, \dots, N$) нужно определить из соотношения (3.8), а остальные коэффициенты будут задаваться произвольно. Это соотношение, как уже говорилось, обеспечивает возможность представления функции $q(x)$ формулой (3.5).

После того как известно решение (3.6) бесконечной системы (3.2), решение интегрального уравнения (1.25) вследствие (2.17) — (2.19) после некоторых алгебраических выкладок представится формулой

$$(3.9) \quad q(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[\frac{P + 2E_1 I f'''(1)}{\pi} - \sum_{m=1}^{\infty} q_m T_{2m}(x) \right] \quad (-1 < x < 1)$$

$$q_m = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} H_{m,n} S_n \quad (m=1, 2, \dots)$$

$$H_{m,n} = \int_{-1}^1 t^{2n+1} U_{2m-1}(t) \sqrt{1-t^2} dt \quad (n=0, 1, 2, \dots; m=1, 2, \dots)$$

$$S_n = \begin{cases} k(n+1)a_{n+1} + X_n, & n=0, 1, 2, \dots, N-1 \\ X_n, & n=N, N+1, \dots \end{cases}$$

$$X_n = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x_p}{2n+2p+3}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

причем коэффициенты x_p ($p = 1, 2, \dots$) задаются формулой (3.6). Очевидно, что должно быть $q(x) > 0$ при $-1 < x < 1$. Отсюда вытекает, что вдавливающая штамп сила P не может быть произвольной и должна быть подчинена некоторому ограничению, например следующему:

$$(3.10) \quad P + 2E_1 I f'''(1) > \pi \max_{|x| \leq 1} \left| \sum_{m=1}^{\infty} q_m T_{2m}(x) \right|$$

Для числовых расчетов примем $h = 0.05$. Тогда момент инерции поперечного сечения усиливающего покрытия $I = bh^3/12$, где b — ширина сечения (равная единице в случае плоской деформации) имеет значение $I = 10.417 \cdot 10^{-6}$.

Пусть упругая полуплоскость изготовлена из свинца с модулем упругости $E_2 = 0.17 \cdot 10^6$ кг/см² и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.42$, а усиливающее покрытие — соответственно из материалов: а) алюминий катаный: $E_1 = 0.69 \cdot 10^6$ кг/см²; б) алюминиевая бронза, литье: $E_1 = 1.05 \cdot 10^6$ кг/см²; в) хромникелевая сталь: $E_1 = 2.1 \cdot 10^6$ кг/см² (коэффициент Пуассона материала усиливающего слоя здесь не играет роли).

Что касается конкретного вида функции $f(x)$, то, исходя из (3.1), рассмотрим три случая: $N = 2$, $N = 3$, $N = 4$. Во всех этих случаях положим $a_2 = a_3 = a_4 = 1$.

Коэффициент a_1 соответственно этим случаям будет определяться из условия (3.8), а коэффициент a_0 можно не задавать, поскольку он не входит в формулу (3.9).

Вычисления были проведены на ЭВМ «Наири». Согласно этим вычислениям значения коэффициента a_1 соответственно указанным случаям таковы:

а	-2.5542	-6.7000	-12.3565
б	-2.5464	-6.6713	-12.2911
в	-2.5275	-6.6016	-12.1327

Методом Гаусса соответственно указанным значениям N была решена урезанная система уравнений (3.7) с восемью неизвестными. Затем при помощи этих решений и только что приведенных значений коэффициента a_1 , по формуле (3.6) были вычислены значения коэффициентов x_m ($m = 1, 2, \dots, 8$). При этом оказалось, что в каждом из фиксированных случаев а — в при увеличении значения N эти коэффициенты сначала заметно возрастают, а потом заметно убывают. С другой стороны, при фиксированном N эти же коэффициенты в каждом случае довольно быстро возрастают. Первая из указанных закономерностей иллюстрируется в таблице, для случая в

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
N	147.2	156.4	166.4	142.1	109.0	74.3	43.3	17.8
	469.7	530.4	596.7	525.8	411.7	285.1	168.0	69.5
	969.5	1133.7	1328.4	1198.4	953.7	668.3	397.4	165.7

Следует отметить, что коэффициентами x_m фактически обусловлено влияние усиливающего слоя в законе распределения контактных напряжений (3.9).

Затем были вычислены коэффициенты q_m , $H_{m,n}$ и S_n , входящие в формулу (3.9), и значения функции $q(x)$ по формулам (3.9) и (3.5) в некоторых точках своего интервала изменения. При этом было найдено минимальное значение P , удовлетворяющее условию (3.10) во всех обсуждаемых здесь случаях, а именно: $P_{\min} = 3.6140 \cdot 10^6$ кг. Для иллюстрации ниже приведены значения функции $q(x)$, вычисленные по формулам (3.9) и (3.5) в случае в и при $N = 3$

x	0	0.1	0.3	0.5	0.7
$q(x)$	561525	580890	742616	1105032	4779174

x	1.01	1.02	1.04	1.06	1.08	1.1	1.6	2.1	2.6	3.01	3.6
$q(x)$	2793	2557	2158	1835	1572	1357	124	32	12	6	3

Значения функции $q(x)$ в случаях а, в в тех же точках остаются величинами примерно такого же порядка.

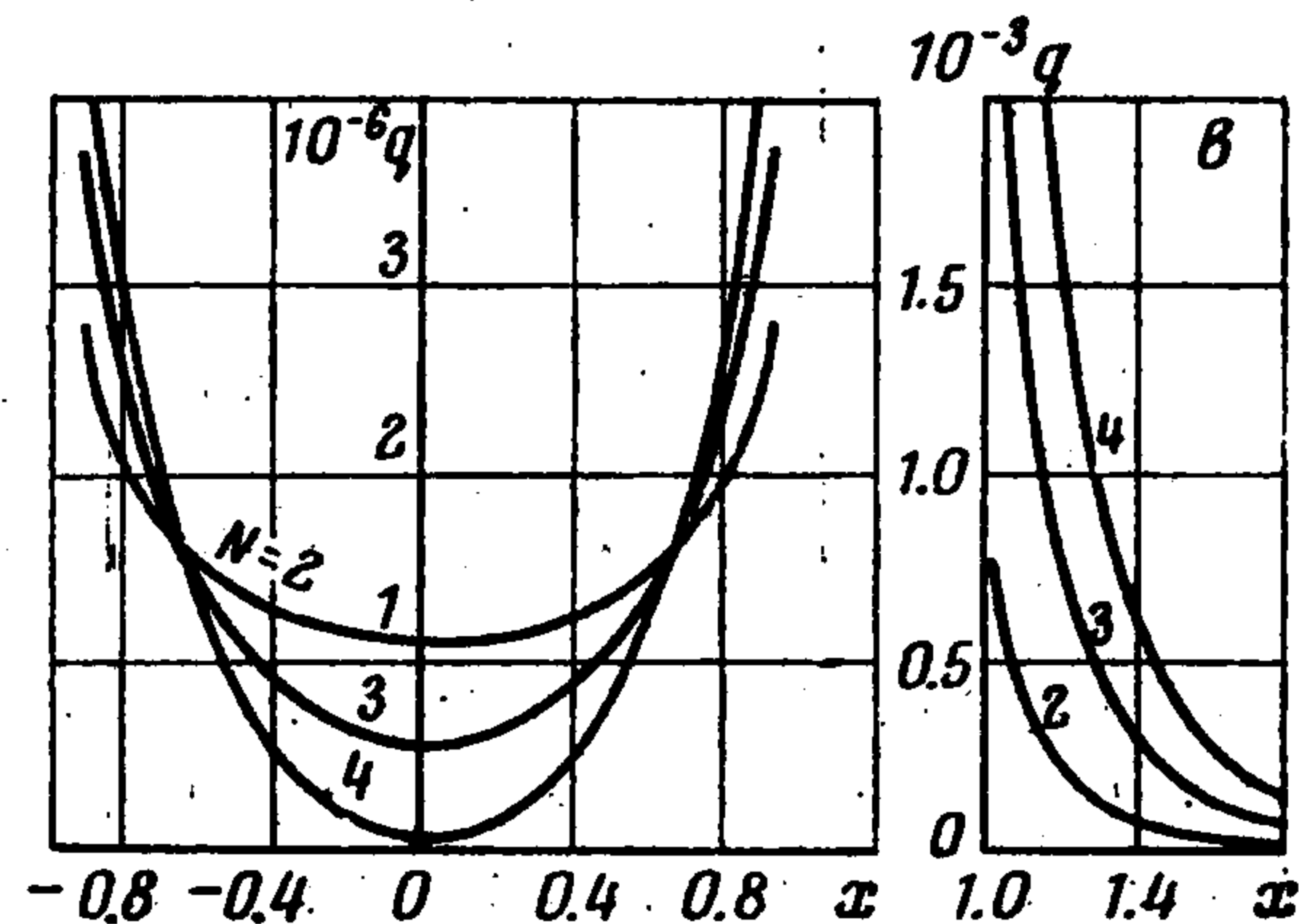
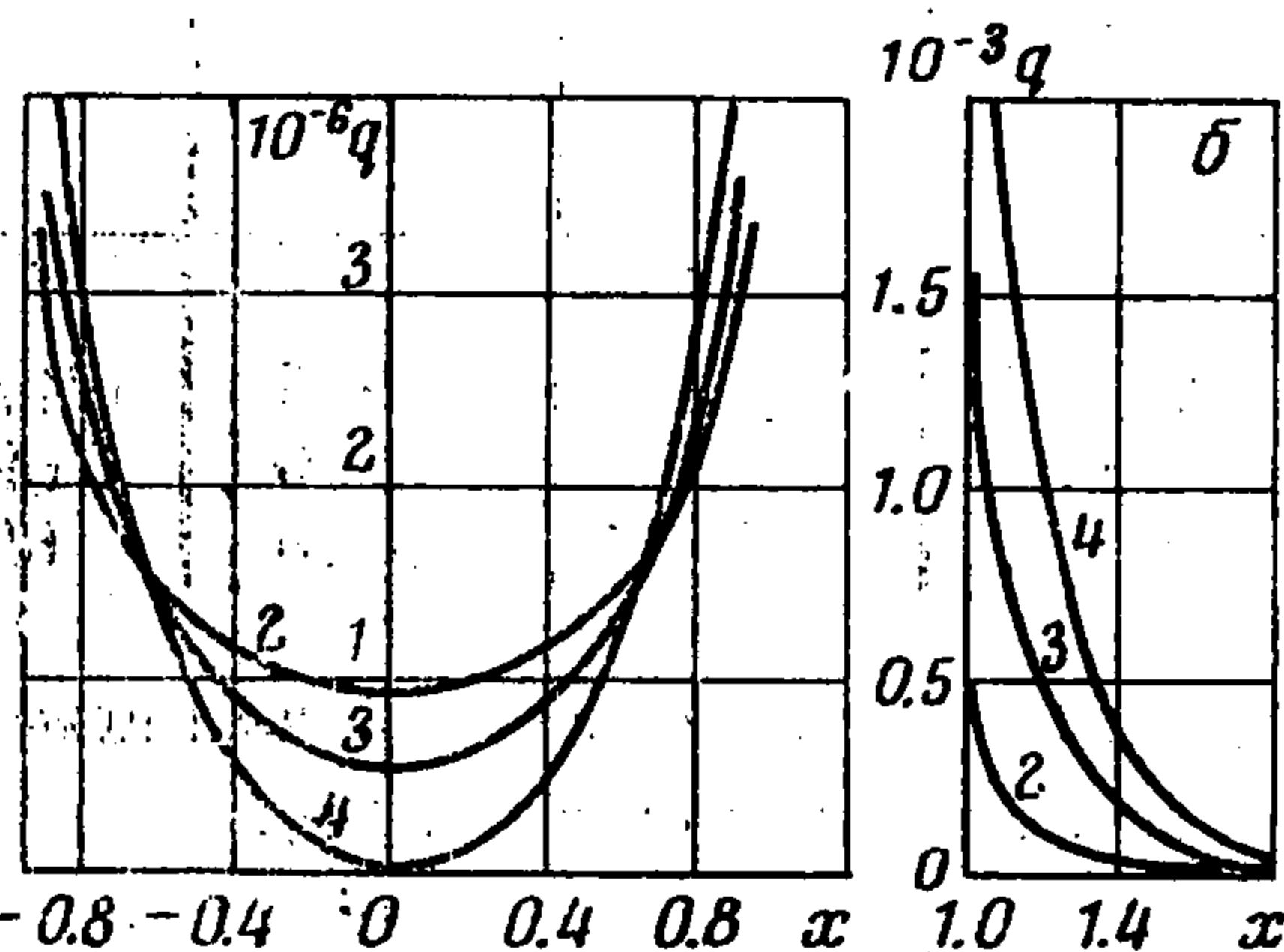
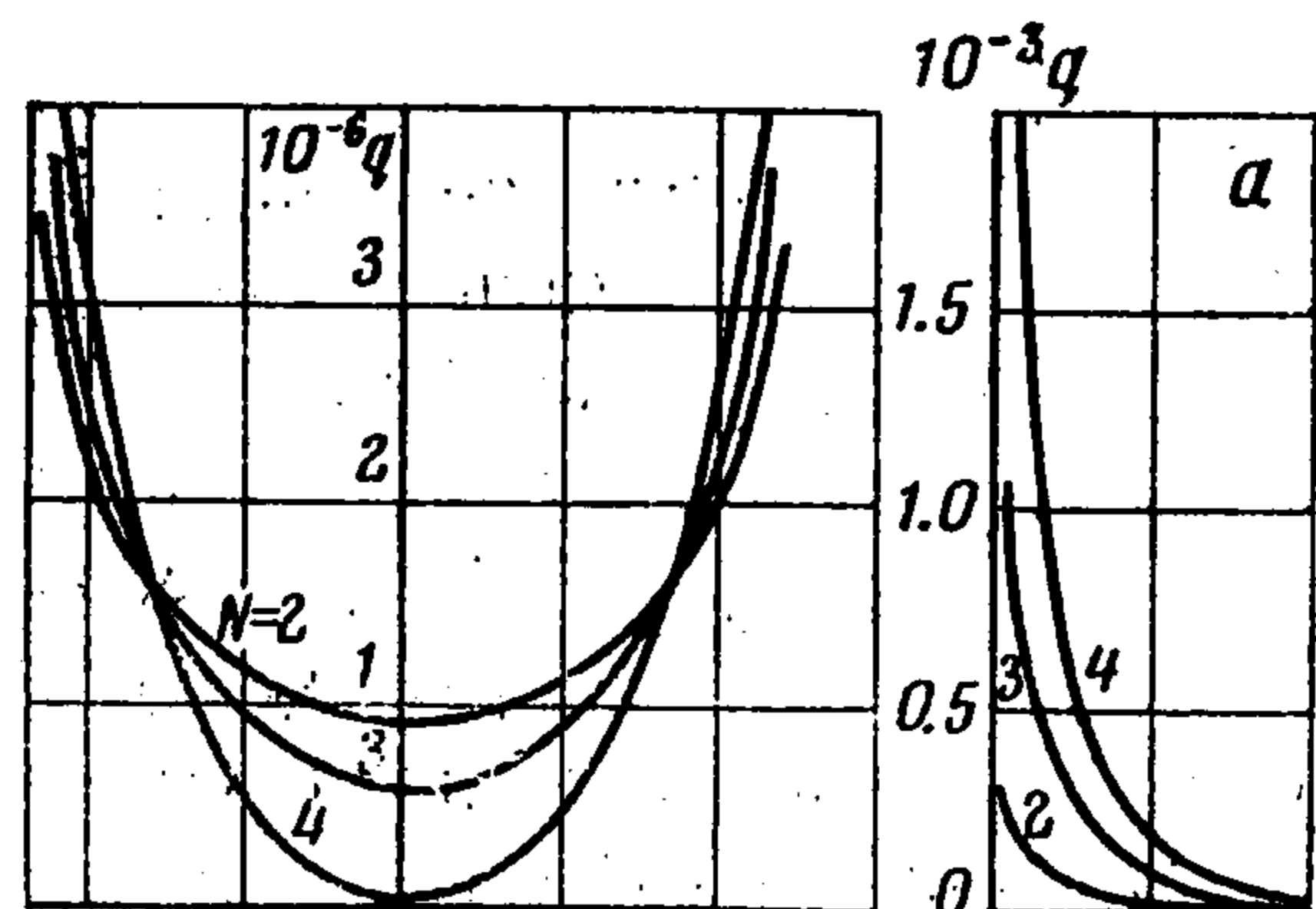
Дальнейший анализ этих числовых результатов показывает, что значения функции $q(x)$, когда $|x| < 1$, в каждом отдельном случае при возрастании аргумента по абсолютной величине быстро возрастают, стремясь к бесконечности при $x \rightarrow 1$. При переходе через точку $x = 1$ происходит резкое падение значений этой функции.

В каждом из рассматриваемых случаев при увеличении N значения функции $q(x)$ заметно убывают в некоторой окрестности середины интервала $(-1, 1)$. В окрестностях же конечных точек этого интервала наблюдается обратная закономерность, которая экстраполируется вне интервала $(-1, 1)$, распространяясь на значения функции $q(x)$ при $|x| > 1$. Когда же сравниваются различные случаи а — в при фиксированном значении N , то для значений функции $q(x)$ при $|x| < 1$ наблюдается обратная закономерность.

На основании описанных числовых результатов построены графики функции $q(x)$ соответственно случаям а — в (фиг. 2) при указанных выше значениях N . Для наглядного представления хода изменения этой функции при $|x| > 1$ соответствующие части графиков изображены в увеличенном масштабе.

Заметим, что графики контактного давления под штампом, определяемого формулой (1.9), могут быть легко построены.

Отметим, что если, приняв во внимание (3.1), положить $f(x) \equiv a_0$, т. е. рассмотреть случай штампа с плоским основанием, то согласно (3.2) и (3.4) все коэффициенты x_m будут равны нулю и, следовательно, под усиливающим покрытием вне штампа контактные напряжения тождественно равны нулю. С другой стороны, согласно (1.9) $p(x) \equiv q(x)$ ($|x| < 1$), и формула (3.9) в данном случае дает известное решение Садовского. Таким образом, в рамках принятых предположений усиливающее покрытие в случае штампа с плоским основанием не оказывает влияния на закон распределения контактного давления под штампом и, кроме того, под ним вне штампа контактные напряжения не возникают. Однако, по мере уклонения основания штампа от прямоли-



Фиг. 2

нейного, влияние усиливающего покрытия на закон распределения контактных напряжений становится значительным. Этот факт был отмечен выше и показан на графиках.

В заключение еще отметим, что представляет интерес исследование закономерностей изменения размеров контактного участка в зависимости от очертания основания штампа, а также от упругих и геометрических констант усиливающего покрытия и основания. На этом исследовании, однако, здесь останавливаться не будем. Оно может быть проведено известным способом [12-14].

Поступила 27 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П., Войновский-Кризгер С. Пластинки и оболочки, М., Физматгиз, 1963.
2. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М., «Наука», 1967.
3. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen. Ingr-Arch., 1932, Bd 3, Nr. 2, S. 123-129.
4. Жемочкин Б. Н., Сеницын А. П. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании (без гипотезы Винклера). М., Госстройиздат, 1947.
5. Горбунов-Посадов М. И. Балки и плиты на упругом основании. М., Машистройиздат, 1949.
6. Корнеев Б. Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. М., Госстройиздат, 1954.
7. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М., Физматгиз, 1960.
8. Шерман Д. И. Метод интегральных уравнений в плоских и пространственных задачах статической теории упругости (обзорный доклад). Труды Всес. съезда по теоретической и прикладной механике. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1962, стр. 405-467.

9. Ишкова А. Г., Корнеев Б. Г. Изгиб пластинок на упругом и упругопластическом основании (обзорный доклад). Тр. 2 Всес. съезда по теоретической и прикладной механике, вып. 3. Механика твердого тела. М., «Наука», 1966, стр. 157—176.
10. Александров В. М. Некоторые контактные задачи для балок, пластинок и оболочек. Инж. ж., 1955, т. 5, № 4.
11. Ефимов А. Б., Малый Б. И., Толкачева Н. М. Контактная задача для упругого тела с тонким покрытием. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 1.
12. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
13. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
14. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.
15. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 2, М., «Наука», 1966.
17. Сегё Г. Ортогональные многочлены. М., Физматгиз, 1962.
18. Tricomi F. G. On the finite Hilbert transformation. Quart. J. Math., 1951, vol. 2.
19. Карпенко Л. Н. Приближенное решение одного сингулярного уравнения при помощи многочленов Якоби. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
20. Попов Г. Я. Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления или трения. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
21. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 1. М., «Наука», 1965.
22. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Некоторые контактные задачи для полупространства, усиленного упругими накладками. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
23. Arutunyan N. Kh., Mkhitaryan S. M. Some contact problems for a semi-plane with elastic stiffeners. In: Trends in elasticity and thermoelasticity, Witold Nowacki Anniversary Volume, Groningen, Wolters — Noordhoff Publ., 1971, p. 3—20.