Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 532.529

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ

О. В. Воинов, А. Г. Петров

(Москва)

Рассматривается произвольный безвихревой поток идеальной несжимаемой жидкости, содержащей большое число сферических пузырьков газа. Введены два способа осреднения точных характеристик движения пузырьков и жидкости — по объему жидкости и по центрам пузырьков. Получены формулы, связывающие средние величины двух разных типов. На основании точной краевой задачи для потенциала скоростей сформулирована краевая задача для среднего потенциала. В частном случае безграничной жидкости при малой концентрации пузырьков уравнение для потенциала совпадает с полученным в [1].

Показано, что динамические уравнения для средних характеристик движущих пузырьков с точностью до произведения объемной концентрации на относительную скорость пузырьков получить невозможно без рассмотрения характера взаимного расположения пузырьков и микроструктуры среды.

Сформулированы замкнутые уравнения движения жидкости с пузырьками. Найдены условия применимости модели жидкости с «вмороженными» пузырьками.

Подробный обзор работ по уравнениям движения жидкости с пузырьками имеется в [1].

1. Точная «микроскопическая» задача. Два способа осреднения. В потенциальном потоке идеальной несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности, движется произвольная поверхность S_0, а также сферы S_α $(\alpha = 1, 2, \ldots)$. Для заданных радиусов R_α и координат $\mathbf{q}_\alpha$ центров сфер, а также скоростей $R_\alpha^{\cdot}$, $\mathbf{q}_\alpha^{\cdot}$ однозначно определяется поле скоростей жидкости $\nabla\Phi$. Потенциал находится из решения задачи Неймана

$$\Delta\Phi = 0; \quad \Phi \to 0, \quad r \to \infty \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}\bigg|_{S_0} = v_n, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n}\bigg|_{S_\alpha} = -R_\alpha^{\cdot} + \mathbf{q}_\alpha^{\cdot}\mathbf{n}_\alpha$$

Здесь v_n — нормальная скорость смещения поверхности S_0, направление нормали — внешнее к жидкости.

Пусть характерный размер l поверхности S_0 намного больше, чем $\max R_\alpha = R_+$. Можно определить размер a, удовлетворяющий условиям $R_+ \ll a \ll l$, и произвести осреднение основных величин в шаре радиуса a.

В пренебрежении плотностью газа по сравнению с плотностью жидкости ρ средняя плотность среды ρ_* равна

$$\rho_* = \int\limits_{\Omega_f} \rho\Pi(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,d^3x', \quad \Pi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1/V, & |\mathbf{x}| \leqslant a \\ 0, & |\mathbf{x}| > a \end{cases}, \quad V = {}^4/_3\pi a^3 \tag{1.2}$$

Здесь Ω_f — весь объем, занимаемый жидкостью; Ω_f ограничен поверхностями S_0, S_α. Плотность ρ_* выражается через объемную концентрацию пузырей c

$$\rho_* = \rho(1-c), \quad c = \sum_\alpha \Pi(\mathbf{x}-\mathbf{q}_\alpha) V_\alpha, \quad V_\alpha = \frac{4}{3}\pi R_\alpha^3 \tag{1.3}$$

Для функций $g(\mathbf{x})$, определенных в Ω_f, и дискретных функций g_α, заданных в центрах пузырей $\mathbf{q}_\alpha$, определим операции усреднения следующим образом:

$$\langle g\rangle = \frac{1}{1-c}\int_{\Omega_f} \Pi(\mathbf{x}-\mathbf{x}') g(\mathbf{x}') d^3x', \quad \overline{g_\alpha} = \frac{1}{c}\sum_\alpha \Pi(\mathbf{x}-\mathbf{q}_\alpha) V_\alpha g_\alpha \tag{1.4}$$

Предполагается, что распределение пузырьков в пространстве и основные кинематические характеристики $\mathbf{q}_\alpha$, R_α, $R_\alpha^{\boldsymbol{\cdot}}$, $\mathbf{q}_\alpha^{\boldsymbol{\cdot}}$ таковы, что существует размер осреднения a, на расстоянии порядка которого средние величины (1.2) — (1.4) мало меняются. Это, в частности, означает, что в любом шаре радиуса a, в котором производится осреднение, число пузырьков достаточно велико.

Очевидно, что тогда результат осреднения не будет зависеть от формы области, в которой производится осреднение, и от конкретного вида осредняющей функции $\Pi(\mathbf{x})$. Шар выбран для упрощения выкладок.

Изменение плотности среды (1.2) со временем целиком определяется нормальной составляющей скорости жидкости $\mathbf{v}'$ на ее границе

$$\frac{\partial\rho_*}{\partial t} = \int_{\partial\Omega_f} \rho\Pi(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\mathbf{v}'\mathbf{n}dS = \int_{\Omega_f} \rho v_i'(\mathbf{x}')\frac{\partial}{\partial x_i'}\Pi(\mathbf{x}-\mathbf{x}') d^3x' \tag{1.5}$$

Выражая производную по x_i' от Π через производную по x_i, получим из (1.2) и (1.5) уравнение сохранения массы среды

$$\partial\rho_*/\partial t + \operatorname{div}\rho_*\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = \langle\mathbf{v}'\rangle \tag{1.6}$$

Уравнение неразрывности для газовой фазы получим, дифференцируя по времени обе части второй формулы (1.3)

$$\frac{\partial c}{\partial t} = 3c\frac{R^{\boldsymbol{\cdot}}}{R} - \operatorname{div} c\mathbf{u}, \quad \frac{R^{\boldsymbol{\cdot}}}{R} = \left(\overline{\frac{R_\alpha^{\boldsymbol{\cdot}}}{R_\alpha}}\right), \quad \mathbf{u} = \overline{\mathbf{q}_\alpha^{\boldsymbol{\cdot}}} \tag{1.7}$$

Из (1.3), (1.6), (1.7) следует

$$\operatorname{div}[\mathbf{v} + c(\mathbf{u}-\mathbf{v})] = 3cR^{\boldsymbol{\cdot}}/R \tag{1.8}$$

Таким образом, введенный способ осреднения по формулам (1.3), (1.4), как и следовало ожидать, дает известные уравнения (1.6), (1.7).

На поверхности разрыва, движущейся со скоростью D, условие сохранения массы

$$[(1-c)(\mathbf{vn}-D)] = 0 \tag{1.9}$$

Здесь квадратными скобками обозначен скачок функции.

Если разрыв движется вместе с пузырьками, т. е. $D = \mathbf{un}$, то (1.9) принимает вид

$$[\mathbf{vn} + c(\mathbf{u}-\mathbf{v})\mathbf{n}] = 0 \tag{1.10}$$

Формула (1.10) справедлива, например, на поверхности, разделяющей области жидкости с пузырьками и жидкости без пузырьков.

2. Уравнения для средних кинематических характеристик. Потенциал, являющийся решением задачи (1.1), при помощи основного тождества для гармонических функций можно представить в виде суммы

$$\Phi = \sum_\alpha \Phi_\alpha, \quad 4\pi\Phi_\alpha = \int_{S_\alpha} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right) dS, \quad \alpha = 0, 1, \ldots \tag{2.1}$$

Здесь функция Φ_0 равна интегралу по поверхности S_0 движущегося тела. Каждая функция Φ_α — гармоническая всюду вне поверхности S_α. При $\alpha = 1, 2, \ldots$ функция Φ_α представляется в виде

$$\Phi_\alpha = -\frac{R_\alpha{}^2 R_\alpha{}^\cdot}{|\mathbf{x} - \mathbf{q}_\alpha|} + \frac{1}{2} R_\alpha{}^3 w_{\alpha i}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{q}_\alpha|} + \delta\Phi_\alpha \tag{2.2}$$

Вектор $\mathbf{w}_\alpha$, входящий в (2.2), равен разности скорости пузыря $\mathbf{q}_\alpha{}^\cdot$ и «наведенной» в центр пузыря $\mathbf{q}_\alpha$ скорости потока

$$\mathbf{w}_\alpha = \mathbf{q}_\alpha{}^\cdot - \nabla\Phi_\alpha'|_{\mathbf{x}=\mathbf{q}_\alpha}, \quad \Phi_\alpha'(\mathbf{x}) = \sum_{\beta\neq\alpha}\Phi_\beta(\mathbf{x}) \tag{2.3}$$

Остаточный член $\delta\Phi_\alpha$ в (2.2) при помощи теоремы Вейса для сферы [2] можно представить в следующем виде:

$$\delta\Phi_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{r_\alpha{}^*}{R_\alpha}\int_0^1 [\Psi(\mathbf{r}_\alpha{}^*) - \Psi(\mathbf{r}_\alpha{}^* t)]\, dt \tag{2.4}$$

$$\Psi = \Phi_\alpha'(\mathbf{x}) - \Phi_\alpha'(\mathbf{q}_\alpha) - \frac{\partial\Phi_\alpha'}{\partial x_i}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{q}_\alpha} r_{\alpha i} \approx \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi'}{\partial x_i \partial x_j} r_{\alpha i} r_{\alpha j}$$

$$\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{x} - \mathbf{q}_\alpha, \quad \mathbf{r}_\alpha{}^* = \frac{R_\alpha{}^2}{r_\alpha{}^2}(\mathbf{x} - \mathbf{q}_\alpha)$$

Из формулы (2.4) находим оценку для остаточного члена в (2.2)

$$\delta\Phi_\alpha = \frac{R_\alpha{}^5}{9}\frac{\partial^2\Phi'}{\partial x_i\partial x_j}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{q}_\alpha}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{q}_\alpha|} + O\left(\frac{R_\alpha{}^5}{r_\alpha{}^4}\right)$$

Формулы (2.1) — (2.3) определяют непрерывные в Ω_f функции Φ, $\nabla\Phi$, а также дискретные функции Φ_α, $\nabla\Phi_\alpha'$, заданные в центрах сфер $\mathbf{q}_\alpha$. Все эти функции, являющиеся кинематическими характеристиками среды, однозначно определяются из решения краевой задачи (1.1), если известны дискретные функции R_α, $R_\alpha{}^\cdot$, $\mathbf{q}_\alpha{}^\cdot$ и нормальная скорость границы S_0.

В соответствии с определением (1.4) все эти характеристики можно осреднить, причем средние $\langle\Phi\rangle$, $\langle\nabla\Phi\rangle$, $\overline{\Phi_\alpha'}$, $\overline{\nabla\Phi_\alpha'}$ должны определяться через средние от заданных характеристик R_α, $R_\alpha{}^\cdot$, $\mathbf{q}_\alpha{}^\cdot$ и c. Ниже будет получена краевая задача для $\langle\Phi\rangle$ и дан способ расчета среднемассовой скорости $\langle\nabla\Phi\rangle$ через $\langle\Phi\rangle$ и заданные средние характеристики.

Лемма 1. С точностью до малых порядка cR/a справедливы формулы

$$\Phi(\mathbf{x}) = (1-c)\langle\Phi\rangle + c\overline{\Phi_\alpha{}'} + \sum_\alpha{}^\circ\Big(\Phi_\alpha(\mathbf{x}) - \frac{1}{V}\int\limits_{V\setminus V_\alpha}\Phi_\alpha(\mathbf{x}')\,d^3x'\Big)$$

(2.5)

$$\nabla\Phi(\mathbf{x}) = (1-c)\langle\nabla\Phi\rangle + c\overline{\nabla\Phi_\alpha{}'} + \sum_\alpha{}^\circ\Big(\nabla\Phi_\alpha(\mathbf{x}) - \frac{1}{V}\int\limits_{V\setminus V_\alpha}\nabla\Phi_\alpha(\mathbf{x}')\,d^3x'\Big)$$

Здесь V — шар радиуса a с центром в точке $\mathbf{x}$, V_α — шар радиуса R_α с центром в точке $\mathbf{q}_\alpha$ (область, занятая пузырьком), $V\setminus V_\alpha$ — область, состоящая из точек шара V за вычетом точек, принадлежащих шару V_α. Под суммой $\Sigma_\alpha{}^\circ$ понимается сумма только таких слагаемых, для которых $|\mathbf{q}_\alpha - \mathbf{x}| < a$. Все функции в (2.5) вычисляются в некоторой точке $\mathbf{x} \in \Omega_f$.

Смысл формул (2.5) состоит в том, что вся сумма (2.1) представляется в виде «сглаженной» функции и отклонения от нее, которое определяется точными значениями потенциалов $\Phi_\alpha(\mathbf{x})$, соответствующих сферам, расположенным вблизи точки $\mathbf{x}$. Заметим, что учет в суммах (2.5) слагаемых, для которых границы шаров V и V_α пересекаются, несуществен, так как их сумма дает малый вклад порядка cR/a.

Обе формулы (2.5) выводятся совершенно одинаково. Первую формулу можно вывести, исходя из определения среднего значения (1.4) и формулы (2.1)

$$(1-c)\langle\Phi\rangle = \frac{1}{V}\sum_\alpha\Big(\int\limits_{V\setminus V_\alpha}\Phi_\alpha(\mathbf{x}')\,d^3x' - \sum_{\beta\neq\alpha}{}^\circ\int\limits_{V_\beta}\Phi_\alpha(\mathbf{x}')\,d^3x'\Big)$$

Учитывая, что интеграл от гармонической функции по шару равен значению функции в центре шара, умноженному на объем шара, а также формулы (1.4) и (2.1), (2.3), найдем

$$c\overline{\Phi_\alpha{}'} = \frac{1}{V}\sum_\alpha\sum_{\beta\neq\alpha}{}^\circ\int\limits_{V_\beta}\Phi_\alpha(\mathbf{x}')\,d^3x'$$

Складывая две последние формулы и выполняя несложные преобразования, можно получить первую формулу (2.5). Таким образом, лемма 1 доказана.

В формулах (2.5) интегралы по области $V\setminus V_\alpha$ можно вычислить в точном виде при помощи разложения (2.2) и следующих формул

$$\int\limits_{V\setminus V_\alpha}\frac{1}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|}\,d^3x' = 2\pi\Big(a^2 - R_\alpha{}^2 - \frac{1}{3}|\mathbf{q}_\alpha - \mathbf{x}|^2\Big)$$

(2.6)

$$\int\limits_{V\setminus V_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_i'}\frac{1}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|}\,d^3x' = \frac{4\pi}{3}(q_{\alpha i} - x_i)$$

Соответствующие интегралы от мультиполей высших порядков равны нулю.

Лемма 1 позволяет установить важную связь между двумя типами средних величин $\langle\Phi\rangle$ и $\overline{\Phi_\alpha{}'}$. Для этого достаточно осреднить равенство (2.5)

(2.7) $$(1-c)(\overline{\Phi_\alpha{}'} - \langle\Phi\rangle) = \overline{Q_\alpha}$$

$$Q_\alpha(\mathbf{q}_\alpha) = \sum_{\beta\neq\alpha}{}^\circ\Big(\Phi_\beta(\mathbf{q}_\alpha) - \frac{1}{V}\int\limits_{V\setminus V_\beta}\Phi_\beta(\mathbf{x}')\,d^3x'\Big)$$

Здесь V — шар радиуса a с центром в то ке $\mathbf{q}_\alpha$.

Аналогичная формула справедлива и для градиента потенциала. При помощи (2.6) ее можно представить в виде

$$(2.8)\qquad (1-c)\left(\overline{\frac{\partial\Phi_\alpha'}{\partial x_i}}-v_i\right)=\overline{P_{\alpha i}},\quad v_i=\left\langle\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right\rangle$$

$$P_{\alpha i}=\frac{3}{8\pi}\sum_{\beta\neq\alpha}^{\circ}V_\beta\frac{\partial^2}{\partial q_{\beta i}\,\partial q_{\beta j}}\frac{1}{|q_\alpha-q_\beta|}w_{\beta j}$$

Оценки в (2.7) и (2.8) при помощи (2.2) и (2.6) позволяют заключить, что

$$(2.9)\qquad \overline{\Phi_\alpha'}-\langle\Phi\rangle=O\left(c\frac{R'}{R}a^2\right),\quad \overline{\nabla\Phi'}-\langle\nabla\Phi\rangle=O(c\overline{\mathbf{w}}_\alpha)$$

Поскольку параметр осреднения a является «бесконечно» малым, то средние $\overline{\Phi_\alpha'}$ и $\langle\Phi\rangle$ тождественно равны. Будут равны также и производные любого порядка от этих функций, если рассматривать эти функции как обобщенные. Напротив, средние скорости $\overline{\nabla\Phi_\alpha}'$ и $\langle\nabla\Phi\rangle$, вообще говоря, существенно различаются.

Если аналогично [1] предположить, что $\mathbf{w}_\beta$ мало меняется на расстоянии порядка a, то вектор $\mathbf{w}\approx\mathbf{w}_\beta$ можно вынести за знак суммы в (2.8)

$$(2.10)\qquad (1-c)\left(\overline{\frac{\partial\Phi_\alpha'}{\partial x_i}}-v_i\right)=c\overline{A}_{ij}w_j$$

$$cA_{ij}=\frac{3}{8\pi}\sum_{\beta\neq\alpha}^{\circ}V_\beta\frac{\partial^2}{\partial q_{\beta i}\partial q_{\beta j}}\frac{1}{|\mathbf{q}_\alpha-\mathbf{q}_\beta|}$$

Нетрудно видеть, что след тензора A_{ij} равен нулю

$$(2.11)\qquad A_{ii}=0$$

Основной вклад в сумму, входящую в (2.10), дают слагаемые, соответствующие пузырькам, расположенным вблизи $\mathbf{q}_\alpha$. Если V_β мало меняется внутри шара, то сумму слагаемых, соответствующих пузырькам, расположенным в достаточно удаленном от точки $\mathbf{q}_\alpha$ шаровом слое $r<|\mathbf{q}_\alpha-\mathbf{x}|<a$, можно приближенно заменить интегралом, который будет равен нулю.

Среднее значение A_{ij} зависит от характера взаимного расположения пузырей (микроструктуры). Если имеет место изотропия, то тензор $\bar{A}_{ij}$ шаровой. Тогда в силу (2.11) тензор $\bar{A}_{ij}=0$. Отсюда и из (2.10) следует, что в случае изотропии $\overline{\nabla\Phi_\alpha}'=\mathbf{v}$.

Пусть $f(\mathbf{x},\mathbf{x}',t)$ — плотность вероятности нахождения пузырька в точке $\mathbf{x}'$, если в точке $\mathbf{x}$ уже находится центр данного пузырька. Функция f характеризует взаимное расположение соседних пузырей и представляется в виде

$$(2.12)\qquad f(\mathbf{x},\mathbf{x}',t)=F(\mathbf{x},\mathbf{x}-\mathbf{x}',t)\,\alpha(\mathbf{x}')$$

Здесь $\alpha(\mathbf{x}')$ — число пузырьков в единице объема. Функция F при $r=|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\gg r_0$, где r_0 — среднее расстояние между пузырьками, равна единице (ослабление корреляции), является регулярной функцией по первому аргументу и изменяется на микроскопическом расстоянии по второму аргументу. Тензор $\bar{A}_{ij}$ в (2.10) выражается через плотность вероятности (2.12)

$$(2.13)\qquad \bar{A}_{ij}=\frac{3}{8\pi}\int\limits_{|x-x'|<a}F(\mathbf{x},\mathbf{x}-\mathbf{x}',t)\frac{\partial^2}{\partial x_i'\partial x_j'}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x'$$

Если линии уровня $F=\mathrm{const}$ — поверхности концентрических подобных эллипсоидов, то тензор $\bar{A}_{ij}$ вообще не зависит от конкретного вида корреляционной функции F. В этом случае можно показать, что

$$\overline{A}_{ij} = \frac{3}{8\pi}\int\limits_G \frac{\partial^2}{\partial x_i'\partial x_j'}\frac{1}{r}\,d^3x' = \frac{3}{8\pi}\int\limits_S n_i \frac{\partial}{\partial x_j'}\frac{1}{r}\,dS - \frac{1}{2}|\delta_{ij}$$

Здесь G — объем, ограниченный изнутри эллипсоидом с поверхностью S, а снаружи сферой радиуса a; интегралы не зависят от того, какой именно эллипсоид выбран из семейства подобных.

Компоненты тензора $\overline{A}_{ij}$ являются функциями пяти параметров: отношений главных осей эллипсоидов и трех углов Эйлера, задающих положение главных осей в пространстве. В зависимости от этих параметров компоненты тензора $\overline{A}_{ij}$ могут принимать как угодно большие значения.

При установившемся движении, например, при барботаже, естественно предположить, что A_{ij} — тензорная функция относительной скорости $\mathbf{w}$. Общий вид такой тензорной функции, удовлетворяющей условию (2.11), следующий:

$$A_{ij} = (3w_iw_j - w^2\delta_{ij})f\,(|\,\mathbf{w}\,|)$$

Лемма 2. С точностью до малых порядка $cR\,/\,a$ справедлива формула

$$\nabla\left((1-c)\langle\Phi\rangle + \overline{c\Phi_\alpha'}\right) = (1-c)\langle\nabla\Phi\rangle + c\overline{\nabla\Phi_\alpha'} - \frac{1}{2}c\overline{\mathbf{w}}_\alpha \tag{2.14}$$

Доказательство. Путем дифференцирования интегралов по параметру $\mathbf{x}$, от которого не зависит область интегрирования и преобразований подынтегральных функций, получим

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\int\limits_{\Omega_f}\Pi(x-x')\,\Phi(\mathbf{x}')\,d^3x' = \int\limits_{\Omega_f}\left[\Pi\frac{\partial\Phi}{\partial x_i'} - \frac{\partial}{\partial x_i'}(\Pi\Phi)\right]d^3x'$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_\alpha\int\limits_{V_\alpha}\Pi(x-x')\,\Phi_\alpha'(\mathbf{x}')\,d^3x' = \sum_\alpha\int\limits_{V_\alpha}\left[\Pi\frac{\partial\Phi_\alpha'}{\partial x_i'} - \frac{\partial}{\partial x_i'}(\Pi\Phi_\alpha')\right]d^3x'$$

Пользуясь определением средних (1.4) и приводя последние интегралы к поверхностным, можно найти

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(1-c)\langle\Phi\rangle = (1-c)\left\langle\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right\rangle - \sum_\alpha\Pi(\mathbf{x}-\mathbf{q}_\alpha)\int\limits_{S_\alpha}\Phi(\mathbf{x}')\,n_i\,dS \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(c\overline{\Phi_\alpha'}) = c\,\overline{\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi_\alpha'} + \sum_\alpha\Pi(\mathbf{x}-\mathbf{q}_\alpha)\int\limits_{S_\alpha}\Phi_\alpha'(\mathbf{x}')\,n_i dS$$

Равенства (2.15) записаны с точностью до слагаемых, соответствующих шарам V_α, границы которых пересекают поверхность сферы радиуса a с центром в точке $\mathbf{x}$. Эти слагаемые дают малый вклад порядка cR/a.

Формула (2.14) получается, если сложить равенства (2.15) и воспользоваться тем, что

$$\Phi - \Phi_\alpha' = \Phi_\alpha, \quad \int\limits_{S_\alpha}\Phi_\alpha\mathbf{n}dS = \frac{1}{2}\mathbf{w}_\alpha$$

Из леммы 2 с учетом оценок (2.9) сразу вытекает важное следствие.

$$\mathbf{v} = \nabla\langle\Phi\rangle + \frac{1}{2}c\mathbf{w} + O(c^2w), \quad \mathbf{w} = \mathbf{u} - \nabla\langle\Phi\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle\nabla\Phi\rangle \tag{2.16}$$

Здесь v имеет смысл среднемассовой скорости среды, которая входит в уравнение сохранения массы (1.8).

Подставляя (2.16) в уравнение неразрывности (1.8), получим уравнение для среднего потенциала

(2.17) $$\nabla\{(1-{}^3/_2 c)\nabla\langle\Phi\rangle\} = 3cR^{\cdot}/R - {}^3/_2\nabla(c\mathbf{u}) + O(c^2)$$

На границе твердого тела S_0 необходимо выполнение условия

(2.18) $$\mathbf{vn} = v_n \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial n}\langle\Phi\rangle = v_n + \frac{1}{2}c(v_n - \mathbf{un})$$

Итак, доказана

Теорема. Пусть Φ — решение краевой задачи (1.1), $\langle\Phi\rangle$ и $\mathbf{v} = \langle\nabla\Phi\rangle$ — функции, получаемые осреднением потенциала Φ и его градиента согласно (1.4), c — функция, определяемая (1.3), $R^{\cdot} / R$ и u — функции, определяемые (1.7). Тогда $\langle\Phi\rangle$ удовлетворяет уравнению (2.17), граничному условию (2.18) и условию (1.9) на скачке, а v определяется по формуле (2.16).

Таким образом, если концентрация c, средняя скорость движения пузырьков $\mathbf{u}$ и средняя характеристика изменения их объемов $R^{\cdot} / R$ известны, то задача вычисления среднемассовой скорости сводится к решению краевой задачи (2.17), (2.18), после чего скорость $\mathbf{v}$ определяется по формуле (2.16).

Если справедливо предположение, при котором верна формула (2.10), то из леммы 2 можно получить более точное соотношение, чем (2.16)

(2.19) $$v_i = \nabla_i\langle\Phi\rangle + {}^1/_2 cw_i - c^2\bar{A}_{ij}w_j / (1-c)$$

справедливое при любых значениях объемной концентрации пузырьков c.

Подставляя (2.19) в (1.8), можно записать вместо (2.17) более точное уравнение.

Если, кроме того, относительное расположение пузырьков в среднем изотропно, то, как показано выше, $\bar{A}_{ij} = 0$, и формула (2.19) и уравнение для $\langle\Phi\rangle$ существенно упрощаются.

Формула (2.19) справедлива и в частном случае, когда центры пузырьков находятся в узлах квазипериодической решетки. Для таких структур тензор $\bar{A}_{ij}$ можно выразить через параметры решетки.

Формулы (2.16) и (2.17) ранее получены в [1] другим способом. В отличие от данной работы при выводе дополнительно предполагалось, что R_α, $R_\alpha^{\cdot}$, $\mathbf{w}_\alpha$ — регулярные функции координат (т. е. изменяются на макроскопическом масштабе), а твердые границы отсутствуют. Предположение [1], что почти для всех пузырьков

(2.20) $$\left.\frac{\partial\Phi_\alpha'}{\partial x_i}\right|_{x=\mathbf{q}_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_i}\langle\Phi\rangle$$

справедливо приближенно, с погрешностью $\sim cw$. Действительно, из (2.10) и (2.19) следует, что

(2.21) $$\overline{\nabla_i\Phi_\alpha'} = \nabla_i\langle\Phi\rangle + {}^1/_2 cw_i + c\bar{A}_{ij}w_j$$

и предположение (2.20) оказывается справедливым в тривиальном случае $\mathbf{w} = 0$ или если одновременно определитель матрицы $\delta_{ij} + 2\bar{A}_{ij}$ равен нулю и вектор $\mathbf{w}$ является собственным для матрицы $\bar{A}_{ij}$. Причем при изотропной структуре или близкой к ней (2.20) выполняется только в случае $\mathbf{w} = 0$.

Пример 1. Рассмотрим задачу о поле скоростей при движении облака пузырей в безграничной жидкости. Пусть концентрация c пузырей в объеме шара радиуса l постоянна и снаружи шара равна нулю, а скорости всех пузырей одинаковы и равны $\mathbf{u}$. Уравнение (2.17) принимает вид $\Delta \langle\Phi\rangle = 0$.

На границе шара средний потенциал непрерывен, а нормальная производная согласно (1.10) терпит скачок. С точностью до малых порядка c скачок равен

$$[\partial \langle\Phi\rangle / \partial n] = -\,{}^3/_2\,[c\mathbf{u}\mathbf{n}] = {}^3/_2\, c\mathbf{u}\mathbf{n}$$

Решение задачи имеет вид

$$\langle\Phi\rangle = -\,{}^1/_2\, cur\cos\theta,\quad v = 0 \qquad \text{при } r < l$$
$$\langle\Phi\rangle = -\,{}^1/_2\, cu\,(l^3 / r^2)\cos\theta,\quad \mathbf{v} = \nabla\langle\Phi\rangle \text{ при } r \geqslant l$$

Здесь r, θ — сферические координаты с началом в центре шара, θ — угол, отсчитываемый от направления вектора скорости $\mathbf{u}$. Потенциал $\langle\Phi\rangle$ при движении сферического облака пузырей отличается от потенциала при движении твердой сферы радиуса l на множитель c.

В работах [3,4] рассматривалось движение эллипсоидального облака пузырей, причем предполагалось, что центры пузырей находятся в узлах кубической решетки. Методом Лоренца вычислены средняя скорость жидкости, индуцируемая в центр пузыря $\overline{\nabla\Phi_\alpha'}$, и скорость подъема облака в тяжелой жидкости малой вязкости. Эти же результаты можно получить изложенным выше методом, если учесть, что структура кубической решетки изотропна и $\overline{\nabla\Phi_\alpha'} = \langle\nabla\Phi\rangle$. Задача сводится к решению внутренней и внешней задачи Неймана для эллипсоида.

Пример 2. Пусть с некоторой площадки S горизонтальной плоскости поднимаются вертикально вверх пузыри с постоянной скоростью u, заполняя цилиндрический столб с основанием S. Краевая задача для среднего потенциала имеет вид: $\Delta\langle\Phi\rangle = 0$; $\partial\langle\Phi\rangle/\partial x = -{}^1/_2\, cu$ на S; $\langle\Phi\rangle \to 0$, $r \to \infty$. В этом случае производные потенциала непрерывны на границе цилиндрического столба. Имеет место аналогия между полем скоростей жидкости вне пузырьковой среды и полем скоростей при истечении идеальной несжимаемой жидкости из отверстия S со скоростью ${}^1/_2\, cu$.

3. Уравнения движения жидкости с пузырьками. Для вычисления рассмотренных выше средних по объему величин необходимо знать скорости движения пузырьков $\mathbf{q}_\alpha^{\cdot}$ и скорости изменения радиусов $R_\alpha^{\cdot}$.

Пусть r_0 — расстояние от рассматриваемого пузырька до ближайшего соседнего — значительно превосходит радиус пузырька R. С точностью до малых порядка не ниже $(R / r_0)^6$ справедливы уравнения движения пузырька в неоднородном потоке [5–7], создаваемом движением остальных пузырьков и твердых тел

$$q_{\alpha i}^{\cdot\cdot} = 3\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_\alpha'}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial\Phi_\alpha'}{\partial x_i} - 2\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{3R_\alpha^{\cdot}}{R_\alpha}\left(q_{\alpha i}^{\cdot} - \frac{\partial\Phi_\alpha'}{\partial x_i}\right) \tag{3.1}$$

$$R_\alpha^{\cdot\cdot} R_\alpha + \frac{3}{2} R_\alpha^{\cdot 2} - \frac{1}{4}\,|\mathbf{q}_\alpha^{\cdot} - \nabla\Phi_\alpha'|^2 = \frac{p_g - p_\alpha'}{\rho} - \frac{2\sigma}{\rho R_\alpha}$$

$$p_\alpha' + \rho\,(\partial\Phi_\alpha' / \partial t + {}^1/_2 (\nabla\Phi_\alpha')^2 + U) = \mathrm{const}$$

Здесь U — потенциал массовых сил. Эта система дает $4N$ уравнений движения, где N — число пузырей в системе. Вычисление Φ_α' для каждой конфигурации пузырьков представляет кинематическую задачу.

Важно оценить, с какой точностью возможно осреднение уравнений движения пузырьков (3.1). Пусть параметры движения мало меняются на расстоянии порядка r_0. Тогда средние по центрам пузырьков значения для любых величин, входящих в (3.1), можно выразить через плотность вероятности (2.12). Например, средний потенциал Φ_α' и среднюю по центрам скорость $\overline{\nabla\Phi_\alpha'}$ с учетом (2.2) и (2.3) можно представить в виде

$$\overline{\Phi_\alpha'} = \Phi_0 + \int\limits_\Omega f(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)\left(-\frac{R^2R^{\cdot}}{r} + \frac{R^3w_i}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r}\right)d^3x' \tag{3.2}$$

$$\overline{\nabla\Phi_\alpha'} = \nabla\Phi_0 + \int\limits_\Omega f(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)\left(-R^2R^{\cdot}\nabla\frac{1}{r} + \frac{R^3w_i}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\nabla\frac{1}{r}\right)d^3x'$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \overline{\nabla\Phi_\alpha'}$$

Здесь $\mathbf{w}$ — скорость относительного движения пузырьков.

Интегральные представления (3.2) позволяют установить связь между средним градиентом потенциала и градиентом от среднего потенциала

$$\overline{\nabla_i\Phi_\alpha'} = \nabla_i(\overline{\Phi_\alpha'}) + {}^1/_2\, cw_i + c\bar{A}_{ij}w_j \tag{3.3}$$

которое в силу оценки (2.9) совпадает с полученным выше соотношением (2.21). Тензор $\overline{A_{ij}}$ определяется по формуле (2.13).

Для вывода соотношения (3.3) можно воспользоваться тем, что интегралы от слагаемых в интегралах (3.2) сходятся абсолютно при $r \to 0$, вид функции f не существен на малых расстояниях $r \leqslant a$ и ее можно заменить всюду на функцию $\alpha(\mathbf{x}')$.

Производную по x можно вынести из-под знака интеграла

$$\nabla\Phi_0 + \int\limits_\Omega f\left(-R^2R^{\cdot}\nabla\frac{1}{r}\right)d^3x' = \nabla\left(\Phi_0 + \int\limits_\Omega f\left(-R^2R^{\cdot}\frac{1}{r}\right)d^3x'\right) \tag{3.4}$$

Напротив, интеграл в (3.2) от слагаемого вида $\nabla_i\nabla_j(1/r)$, вообще говоря, расходится при $r \to 0$ и его значение существенно зависит от вида функции f при $r \to 0$.

При помощи (2.12) этот интеграл можно представить в виде

$$\int\limits_\Omega f\frac{R^3w_j}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{r}d^3x' = \frac{\partial}{\partial x_j}\int\limits_\Omega f\frac{R^3w_j}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r}d^3x' - \tag{3.5}$$

$$-\int\limits_\Omega\frac{\alpha R^3w_j}{2}\frac{\partial F}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r}d^3x'$$

Далее можно воспользоваться тождеством

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\int\limits_{r\leqslant a}F\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r}d^3x' = \int\limits_{r\leqslant a}\frac{\partial F}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r}d^3x' + \int\limits_{r\leqslant a}F\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{r}d^3x' +$$

$$+\int\limits_{r=a}F\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r}n_jdS$$

Интеграл, стоящий в левой части последней формулы — малая величина порядка a. Первый интеграл справа отличается от последнего интеграла (3.5) на множитель ${}^1/_2\,\alpha R^3w_j$, так как производные от F равны нулю вне сферы радиуса a. Второй интеграл, согласно формуле (2.13) с точностью до множителя, равен тензору $\bar{A}_{ij}$. Наконец, интеграл по сфере $r = a$ легко вычисляется, так как на сфере $F = 1$. В результате находим

$$-\int\limits_\Omega\frac{\alpha R^3w_j}{2}\frac{\partial F}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r}d^3x' = \left(\bar{A}_{ij} + \frac{1}{2}\delta_{ij}\right)cw_j$$

Подставляя найденное соотношение в (3.5), при помощи формул (3.2) и (3.4) получим (3.3).

Тензор $\overline{A_{ij}}$, входящий в (3.3), определяется видом корреляционной функции F, задающей в среднем взаимное расположение ближайших пузырей. Например, если поверхности уровня $F = \text{const}$ — концентрические сферы (изотропия), то из (2.13) следует, что $\overline{A_{ij}} = 0$. Если поверхности уровня — подобные концентрические эллипсоиды, то тензор $\overline{A_{ij}}$ отличен от нуля и в силу свойства (2.11) не сводится к шаровому.

Как доказано в п. 2, в зависимости от параметров эллипсоидов компоненты тензора $\bar{A}_{ij}$ могут принимать любые значения, и последнее слагаемое с $\bar{A}_{ij}w_j$ в (3.3) может быть величиной того же порядка, что и $^1/_2\, cw_i$. Значит, средняя скорость внешнего неоднородного потока $\overline{\nabla\Phi_\alpha'}$ зависит от того, как в среднем расположены относительно один другого соседние пузыри, и в слагаемых порядка $c\mathbf{w}$ может принимать произвольные значения в зависимости от микроскопического строения системы пузырей в жидкости. Причем эти значения будут обязательно меняться со временем. Например, если скорости центров пузырьков являются значениями регулярной функции $\mathbf{u}$ в соответствующих точках, то поверхности уровня $F = \text{const}$ будут меняться со временем в соответствии с афинным преобразованием малого элемента среды.

Скорость деформации малого элемента среды определяется тензором скоростей деформаций $^1/_2\,(\nabla_j u_i + \nabla_i u_j)$ и может быть установлена связь между изменением тензора $\bar{A}_{ij}$ и тензором скоростей деформаций. Таким образом, в этом случае изотропное распределение пузырьков (поверхности уровня — сферы) в последующие моменты времени в соответствии с деформациями элемента среды превращается в существенно анизотропное распределение (поверхности уровня — эллипсоиды). Это происходит всегда, если $\operatorname{grad}\mathbf{u} \neq 0$, поэтому учесть члены порядка $c\mathbf{w}$ в формуле (3.3) невозможно без рассмотрения эволюции системы.

Можно заключить, что при осреднении уравнений движения (3.1) все члены порядка $c\mathbf{w}$ должны быть опущены, так как их учет невозможен без рассмотрения задачи о среднем взаимном расположении соседних пузырьков и его эволюции со временем. Для того чтобы учесть члены вида $c\mathbf{w}$ в уравнениях движения, необходимо рассматривать какие-то дополнительные параметры, характеризующие микроструктуру.

Предположим, что внешний поток $\mathbf{v}'$ создается в основном за счет изменения радиусов пузырьков и движения границы твердого тела S, а вклад, создаваемый за счет поступательного перемещения пузырьков, относительно мал. При этом в интегралах (3.2) можно отбросить слагаемые, зависящие от $\mathbf{w}$. Оценки показывают, что такое приближение оправдано при $l\,|R^\cdot| \gg Rcw$, где l — масштаб области, в которой происходит изменение радиусов пузырьков.

В пренебрежении малыми величинами порядка cw осредненные уравнения (3.1) примут вид

$$u_i^\cdot = 3\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) - 2\frac{\partial U}{\partial x_i} - 3\frac{R^\cdot}{R}(u_i - v_i) \tag{3.6}$$

$$RR^{\cdot\cdot} + \frac{3}{2}R^{\cdot 2} - \frac{1}{4}(\mathbf{u}-\mathbf{v})^2 = \frac{p_g - p}{\rho} - \frac{2\sigma}{\rho R}$$

$$p + \rho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + U\right) = \text{const},\quad \mathbf{v} = \nabla\varphi$$

Здесь точка означает дифференцирование по времени вдоль траектории пузырька.

Потенциал φ внешней скорости $\mathbf{v}$ определяется из решения краевой задачи

$$\Delta\varphi = 3\frac{R^{\cdot}}{R}c, \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = v_n \tag{3.7}$$

Здесь S — поверхность твердого тела, v_n — нормальная скорость движения поверхности.

Задача (3.7) отличается от задачи для уравнения (2.17) с граничными условиями (2.18) отсутствием слагаемых порядка $c\mathbf{w}$, учет которых при решении задачи движения пузырьков, как показано выше, некорректен. Заметим, что попытки учесть слагаемые вида $c\mathbf{w}$ делались во всех последних работах по уравнениям жидкости с пузырьками (см. обзор [1]). Однако без рассмотрения микроструктуры пузырьковой среды такой учет неправомерен. Слагаемое вида $c\mathbf{w}$ можно учитывать в выражении для средней по объему скорости жидкости после того, как решена задача движения пузырьков на основе уравнения (3.6), (3.7).

Для замыкания системы уравнений достаточно присоединить к (3.6) и (3.7) уравнение для изменения концентрации пузырьков (1.7) и зависимость давления газа в пузырьке p_g от характеристик его движения, в простейшем случае $p_g = p_g(R)$.

Очевидно, вывод о невозможности учета динамических членов в уравнениях с точностью до произведения концентрации частиц на относительную скорость $c\mathbf{w}$ без рассмотрения средних характеристик взаимного расположения ближайших частиц справедлив для произвольной многофазной среды, а не только для жидкости с пузырьками.

Учтем в уравнении движения пузырька (3.6) силу вязкого сопротивления

$$\begin{gathered} F_i = \frac{4}{3}\pi\rho R^3\frac{1}{\tau_0}w_i, \quad \tau_0 = \frac{R^2}{k\nu} \\ u_i^{\cdot} = 3\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) - 2\frac{\partial U}{\partial x_i} - \left(3\frac{R^{\cdot}}{R} + \frac{2}{\tau_0}\right)(u_i - v_i) \end{gathered} \tag{3.8}$$

Безразмерный коэффициент k, входящий в выражение для силы вязкого сопротивления, может принимать различные значения. При малых числах Рейнольдса $\mathrm{Re} = Rw/\nu \ll 1$ коэффициент k меняется от $k = 3$, согласно решению Адамара—Рыбчинского для движения пузырька в чистой жидкости, до $k = {}^9/_2$, согласно решению Стокса, если поверхность пузырька из-за наличия поверхностно-активных веществ «затвердевает». При больших числах Рейнольдса $\mathrm{Re} \gg 1$ для движения пузырька в чистой жидкости $k = 9$.

Введение в уравнение (3.8) вязкой силы означает предположение об аддитивности динамических и вязких сил, действующих на пузырек. Эта гипотеза, широко применяемая в гидродинамике многофазных сред, в общем случае неверна. Однако, она может быть обоснована, исходя из уравнений Навье — Стокса в предельном случае $\mathrm{Re} \to 0$, а также исходя из уравнений пограничного слоя на свободной поверхности при $\mathrm{Re} \gg 1$.

Пусть характерное время изменения средней скорости жидкой частицы $\mathbf{v}$ есть τ, причем не превосходит характерное время изменения радиуса. Тогда оценки членов уравнения (3.8) позволяют определить характерную величину относительной скорости $\mathbf{u} - \mathbf{v}$

$$|\mathbf{u}-\mathbf{v}| \ll |\mathbf{v}| \quad \text{при } \tau \gg R^2/(k\nu)$$
$$|\mathbf{u}-\mathbf{v}| \sim |\mathbf{v}| \quad \text{при } \tau \lesssim R^2/(k\nu) \tag{3.9}$$

Первое условие (3.9) есть условие «вмороженности» пузырьков в среду. Так, при обтекании потоком со скоростью $\mathbf{v}$ тела с характерным размером l вмороженными в среду будут пузырьки, для которых

$$R \ll \sqrt{k\nu l / v}$$

Эта же оценка справедлива и для течения в трубе, у которой сечение меняется на масштабе l.

Авторы благодарят Л. И. Седова за внимание к работе и ценные замечания. Авторы признательны П. А. Петросяну за обсуждение статьи.

Поступила 18 VI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гарипов Р. М.* Замкнутые уравнения движения жидкости с пузырьками. ПМТФ, 1973, № 6.
2. *Милн-Томсон Л. М.* Теоретическая гидродинамика. М., «Мир», 1964.
3. *Головин А. М., Левич В. Г., Толмачев В. В.* Гидродинамика системы пузырей в жидкости малой вязкости. ПМТФ, 1966, № 2.
4. *Головин А. М.* Уравнения Лагранжа для системы пузырей в жидкости при малой вязкости. ПМТФ, 1967, № 6.
5. *Воинов О. В., Петров А. Г.* Функция Лагранжа газового пузырька в неоднородном потоке. Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 5.
6. *Воинов В. В., Воинов О. В., Петров А. Г.* Гидродинамическое взаимодействие тел в идеальной несжимаемой жидкости и их движение в неоднородных потоках. ПММ, 1973, т. 37, вып. 4.
7. *Воинов О. В.* О силе, действующей на сферу в неоднородном потоке идеальной несжимаемой жидкости, ПМТФ, 1973, № 4.