Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 532.526

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ЗАМКНУТЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ОТРЫВНЫХ ЗОН В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Б. В. Колосов, Э. Г. Шифрин

(Москва)

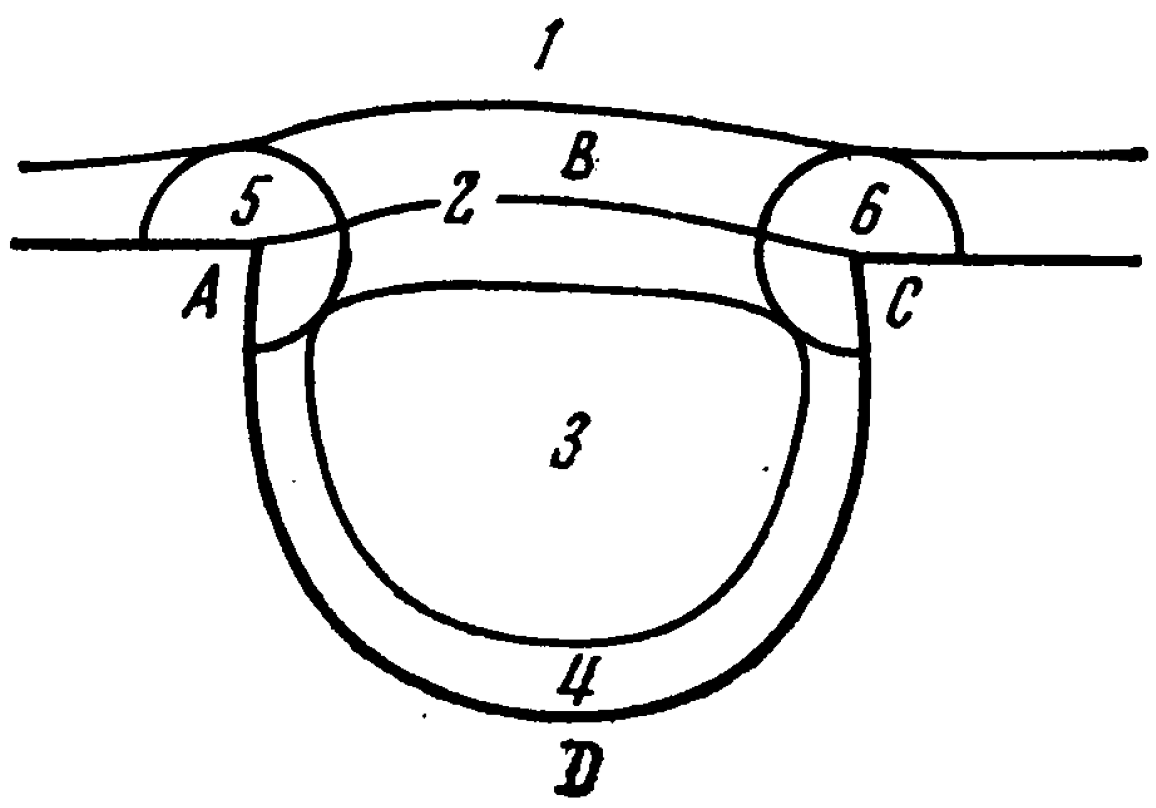
В [1] методом сращиваемых асимптотических разложений исследовалось обтекание впадины на поверхности тела вязкой несжимаемой жидкостью при больших числах Рейнольдса. Для уравнений пограничного слоя в главном приближении, описывающих движение жидкости вблизи границы отрывной зоны, была сформулирована необычная, с точки зрения общей теории, краевая задача. Ниже изучаются вопросы единственности решения этой краевой задачи применительно к двум приближениям уравнений пограничного слоя.

Рассмотрим обтекание вязкой несжимаемой жидкостью впадины на поверхности тела, вызывающей образование отрывной зоны конечных размеров (фиг. 1). Будем считать эту зону — область циркуляционного течения — развитой (т. е. не дробящейся бесконечно и не исчезающей при $\mathrm{Re} \to \infty$). Согласно [1], общую картину течения можно представить следующим образом. Набегающий поток (область *1* поступательного движения) отделяется линией тока ABC от области циркуляционного движения. По теореме Прандтля — Бэтчелора [2] предельное состояние течения вязкой несжимаемой жидкости в этой области при $\mathrm{Re} \to \infty$ (если оно существует) есть течение невязкой жидкости с постоянной завихренностью ω (коэффициент вязкости предполагается постоянным). При достаточно больших числах Re на границе области *3* постоянной завихренности существуют пограничные слои: слой смешения (область *2*) и пристеночный пограничный слой (область *4*). В [1] принималось также, что для описания течения в окрестностях угловых точек (области *5*, *6*), подчиняющегося полным уравнениям Навье — Стокса, в главном приближении могут быть использованы решения уравнений невязкой жидкости [3]. Эти решения предназначаются для склейки пограничных слоев *2*, *4*.

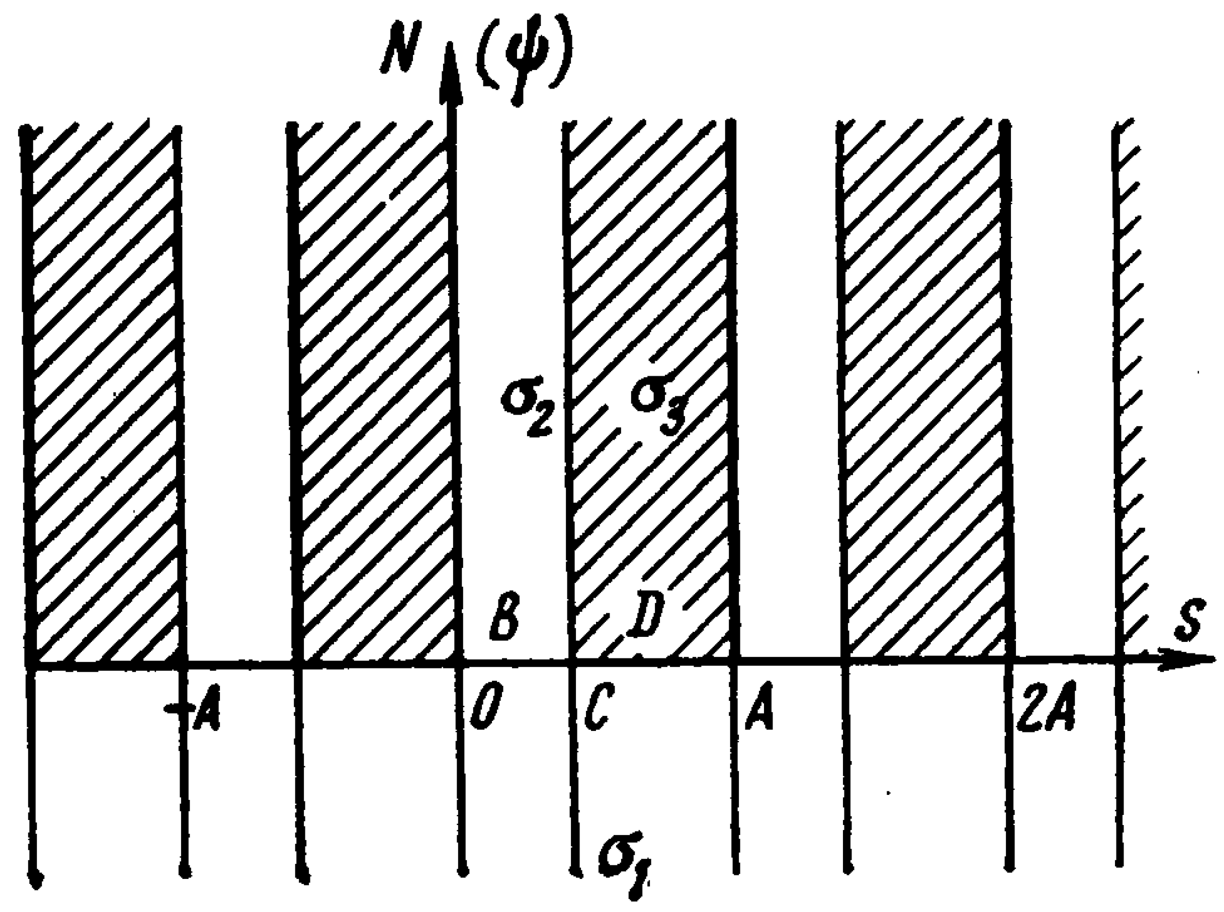
Введем в областях *2*, *4* (фиг. 1) координаты пограничного слоя s, $N = n / \varepsilon$ (s — длина дуги контура $ABCDA$, отсчитываемая от точки A, n — длина текущей нормали к $ABCDA$, внешней по отношению к области *3*, $\varepsilon = \mathrm{Re}^{-1/2}$). В этих координатах вязкий слой, заключенный между контуром $ABCDA$ и границей области *3*, отобразится на полуполосу $\sigma_1 = \{0 \leqslant s \leqslant s_A, N \leqslant 0\}$ (фиг. 2), которая в силу цикличности течения во впадине может быть периодически продолжена по s на всю отрицательную полуплоскость; часть слоя смешения, лежащая над разделяющей линией тока ABC (фиг. 1), отобразится на полуполосу $\sigma_2 = \{0 \leqslant s \leqslant s_C, N >$

$> 0\}$, а стенка впадины — на полуполосу $\sigma_3 = \{s_C < s < s_A, N > 0\}$ (заштрихованную на фиг. 2). Очевидно, что $\sigma_2 \cup \sigma_3$ можно периодически продолжить по s на всю положительную полуплоскость. (Плоскость с выброшенными полуполосами (см. фиг. 2) назовем областью σ.)

Цикличность течения выражается в периодичности граничных условий. На прямых вида $s = ks_A$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$ распределения скоростей по N одинаковы, причем для $N \geqslant 0$ они определяются профилем скорости набегающего пограничного слоя в точке A, который можно считать из-



Фиг. 1



Фиг. 2

вестным. Кроме того, на отрезках оси s $[ks_A + s_C \leqslant s < (k + 1)s_A]$ скорость течения обращается в нуль (условие прилипания).

Решение этой краевой задачи для области σ, в соответствии с предложенной в [1] процедурой асимптотического разложения, должно непрерывно сращиваться с решениями задач о невязком течении в областях *1* и *3* при $N \to +\infty$ и $N \to -\infty$ соответственно.

Сформулированная краевая задача (поставленная впервые в [1]) нетипична для теории пограничного слоя формой области, в которой ищется решение, и характером граничных условий, в силу чего необходимо исследование условий ее однозначной разрешимости. Выяснение условий единственности решения в данном случае необходимо для правильной формулировки математической краевой задачи. Как будет показано ниже, граничное условие при $N \to -\infty$ в общем случае оказывается переопределяющим, а решение задачи в двух приближениях теории пограничного слоя (если оно существует) позволяет определить все ее неизвестные параметры — полное давление p_{03} и завихренность ω_3 в области *3*,— являющиеся асимптотикой решения при $N \to -\infty$.

То, что данная краевая задача (при условии ограниченности ее решения) в действительности не требует постановки граничного условия при $N \to -\infty$, можно показать на следующем примере. Воспользуемся тем, что при переходе к переменым s, ψ (ψ — функция тока) форма области σ и вид граничных условий не изменятся, а уравнения пограничного слоя преобразуются к виду уравнения теплопроводности (форма Мизеса [4]). Поэтому рассмотрим краевую задачу, аналогичную описанной выше, для уравнения теплопроводности.

Как оказалось, в этом случае существует единственная функция $w(s, \psi) \in C_{s,\psi}^{1,2}(\sigma)$, ограниченная в σ, удовлетворяющая в ней уравнению и граничным условиям ($\alpha(\psi)$ — известная ограниченная функция, $k = 0, \pm 1, \ldots$)

(1) $$w_s = w_{\psi\psi}$$

(2)
$$w(ks_A, \psi) = \begin{cases} \alpha(\psi), & \psi \geqslant 0 \\ w[(k+1)s_A, \psi], & \psi < 0 \end{cases}, \quad w(s, 0) = 0, \quad ks_A + s_C \leqslant s < (k+1)s_A$$

Для доказательства сведем задачу (1), (2) к интегральному уравнению. Для $\psi < 0$ воспользуемся формой решения задачи без начальных условий, т. е. решением уравнения теплопроводности, удовлетворяющим граничным условиям, заданным для всех $s > -\infty$ [5]

(3) $$w(s, \psi) = (4\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{s} \psi (s-\tau)^{-3/2} \exp\left[-\frac{\psi^2}{4(s-\tau)}\right] w(\tau, 0)\, d\tau$$

(4) $$w(s, 0) = \begin{cases} \mu(s), & ks_A \leqslant s \leqslant ks_A + s_C \\ 0, & ks_A + s_C < s < (k+1)s_A \end{cases}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Здесь соотношение (4) — граничное условие с неизвестной пока функцией $\mu(s)$. Обозначим $s_A \equiv A$, $s_C \equiv C$ и положим в (3) $s = 0$. Используя периодичность граничного условия (4), можно записать

(5) $$w(0, \psi) = (4\pi)^{-1/2}\psi \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^C \mu(\tau) F_k(\tau)\, d\tau, \qquad F_k(s) = (kA - s)^{-3/2} \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{\psi^2}{4(kA - s)}\right]$$

Предположим, что $\mu(s)$ непрерывна на отрезке $[0, C]$ и $\max|\mu(s)| = M$. Поскольку ряд

(6) $$\sum_{k=1}^{\infty} |\mu(s)| F_k(s) \leqslant M \sum_{k=1}^{\infty} (kA - C)^{-3/2}$$

сходится равномерно относительно s (а также и относительно ψ), то, меняя в (5) порядок суммирования и интегрирования, получаем для $\psi < 0$

(7) $$\varphi(\psi) \equiv w(0, \psi) = (4\pi)^{-1/2} \psi \int_0^C \mu(\tau) \sum_{k=1}^{\infty} F_k(\tau)\, d\tau$$

В полосе $0 \leqslant s \leqslant C$ решение задачи (1), (2) можно представить в виде интеграла Пуассона

(8) $$w(s, \psi) = (4\pi s)^{-1/2}\left(\int_{-\infty}^{0} \varphi(\xi) \exp\left[-\frac{(\psi-\xi)^2}{4s}\right] d\xi + \right.$$
$$\left. + \int_0^{+\infty} \alpha(\xi) \exp\left[-\frac{(\psi-\xi)^2}{4s}\right] d\xi \right)$$

В силу определения (7) функции $\varphi(\psi)$ и оценки (6) в (8) допустимо изменение порядка суммирования и интегрирования по ξ и интегрирования по ξ и τ. В результате, при $\psi = 0$ получаем из (8) интегральное уравнение

$$w(s,0)\equiv\mu(s)=(4\pi)^{-1}\int\limits_0^C\mu(\tau)K(s,\tau)\,d\tau+q(s) \tag{9}$$

$$K(s,\theta)\equiv s^{-1/2}\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{0}\xi(kA-\theta)^{-3/2}\exp\left[-\frac{\xi^2}{4s}\left(1+\frac{s}{kA-\theta}\right)\right]d\xi$$

$$q(s)\equiv(4\pi s)^{-1/2}\int\limits_0^{+\infty}\alpha(\xi)\exp\left(-\frac{\xi^2}{4s}\right)d\xi$$

Из определения ядра $K(s,\theta)$ ясно, что

$$K(s,\theta)=(4s)^{1/2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(kA-\theta)^{-1/2}}{kA+s-\theta}<M_1\sqrt{s} \tag{10}$$

т. е. интегральный оператор в (9) непрерывен по s и, следовательно, решения (9) непрерывны на отрезке $[0, C]$. Это оправдывает сделанное ранее предположение о непрерывности $\mu(s)$. Из (10) вытекает, что норма $K(s,\psi)$ ограничена в $L_2(\sigma)$, и поэтому (9) — уравнение Фредгольма второго рода. Согласно общей теории, характеристическое множество операторов Фредгольма не более чем счетно [6], а в силу (9) оно параметрически зависит от A и C. Следовательно, число $\lambda=4\pi$ может быть характеристическим не более счетного числа раз (в зависимости от значений A и C), в силу чего решение (9), а с ним и задачи (1), (2) единственно почти при любых конечных значениях A и C. Последнее означает, что условия при $\psi\to+\infty$, функция $\alpha(\psi)$ и условие периодичности решения однозначно определяют решение в отрицательной полуплоскости, в частности при $\psi\to-\infty$.

Рассмотрим краевую задачу о течении в слоях *2* и *4* в двух приближениях теории пограничного слоя.

Представим тангенциальную u, нормальную v составляющие скорости и давление p в виде следующих асимптотических разложений по $\varepsilon=\mathrm{Re}^{-1/2}$:

$$u(s,n;\varepsilon)=u_0(s,N)+\varepsilon u_1(s,N),\quad v(s,n;\varepsilon)=\varepsilon v_0(s,N)+$$
$$+\varepsilon^2v_1(s,N),\quad p(s,n;\varepsilon)=p_0(s,N)+\varepsilon p_1(s,N)$$

Тогда уравнения движения с точностью до членов порядка ε включительно можно записать следующим образом [7]:

$$u_0u_{0_s}+v_0u_{0_N}+p_{0_s}-u_{0_{NN}}+\varepsilon(u_1u_{0_s}+u_0u_{1_s}-\varkappa Nu_0u_{0_s}+ \tag{11}$$
$$+v_1u_{0_N}+v_0u_{1_N}+\varkappa u_0v_0-\varkappa Np_{0_s}+p_{1_s}-u_{1_{NN}}-\varkappa u_{0_N})=0$$
$$p_{0_N}+\varepsilon(p_{1_N}-\varkappa u_0^2)=0,\quad u_{0_s}+v_{0_N}+\varepsilon(u_{1_s}+v_{1_N}+\varkappa Nv_{0_N}+$$
$$+\varkappa v_0)=0$$

где $\varkappa(s)$ — текущая кривизна контура $ABCDA$ (линий тока невязкого течения).

Примечание. Равенства нулю в (11) — это равенства сумме членов разложения уравнений Навье — Стокса по степеням ε порядка ε^2 и выше.

Учитывая это, добавим в последнее уравнение системы (11) внепорядковые члены $\varkappa\varepsilon^2Nv_{1_N}$ и $\varkappa\varepsilon^2v_1$ и обозначим $(1+\varkappa\varepsilon N)(v_0+\varepsilon v_1)\equiv V$,

$u_0 + \varepsilon u_1 \equiv U$. Тогда это уравнение приобретет вид $U_{\dot{s}} + V_N = 0$. Введем функцию тока $\psi_N = U$, $-\psi_s = V$ и перейдем к переменным Мизеса s, ψ. В результате первые два уравнения в (11) преобразуются в уравнение в частных производных второго порядка параболического типа

$$(u_0^2/2)_s + \varepsilon u_{1_s} = u_0 (u_0^2/2)_{\psi\psi} + f_0(s) + \varepsilon [u_0 u_{1_{\psi\psi}} + b(u_{0_\psi}) u_{1_\psi} + d(u_0, u_{0_\psi}, u_{0_{\psi\psi}}) u_1 + g(s, \psi, u_{0_\psi}) \varkappa + f_1(s)] \tag{12}$$

где $f_0(s)$, $f_1(s)$ — непрерывные функции, определяемые параметрами течения на границах области *2* ($\psi \to \pm\infty$). Граничные условия аналогичны (2)

$$U(0, \psi) = U(A, \psi) = \alpha_0(\psi) + \varepsilon\alpha_1(\psi), \quad \psi \geqslant 0 \tag{13}$$

$$U(s, 0) = 0, \quad C < s < A \tag{14}$$

Правая часть (13) — профиль скоростей пограничного слоя на стенке AA' в точке A; при $\psi < +\infty$ функция $\alpha_0(\psi)$ ограничена, а $\alpha_1(\psi)$ растет как ψ. Этими же свойствами при $\psi \to \pm\infty$ обладают функции $u_0(s, \psi)$ и $u_1(s, \psi)$ соответственно.

При выводе граничного условия для $\psi < 0$ необходимо рассмотреть изменения профиля скоростей U в ε-окрестностях угловых точек A и C (области *5*, *6*, фиг. 1). Эти изменения определяются разностями

$$U(C + \varepsilon, \psi) - U(C - \varepsilon, \psi) \equiv \beta_C(\psi) + \varepsilon\gamma_C(\psi),$$
$$U(A + \varepsilon, \psi) - U(A - \varepsilon, \psi) \equiv \beta_A(\psi) + \varepsilon\gamma_A(\psi)$$

(т. е. разностями значений U на выходе из каждой из областей и входе в нее). Согласно [3], $\beta_C(\psi) = \beta_A(\psi) \equiv 0$. Кроме того, в соответствии с [1, 3] будем считать, что полная асимптотика уравнений Навье — Стокса в угловой точке такова, что функции $\gamma_C(\psi)$ и $\gamma_A(\psi)$ ограничены и полностью определяются локальной задачей о течении в областях *5* и *6* (фиг. 1), а следовательно, по выходе из этих областей можно поставить задачу о продолжении пограничного слоя. Таким образом, если обозначить $U^0(s, \psi)$ — непрерывную в $\sigma_1 \cup \sigma_2$ часть решения рассматриваемой задачи, то третьим граничным условием будет

$$U(0, \psi) = U^0(A, \psi) + \gamma_C(\psi) + \gamma_A(\psi), \quad \psi < 0 \tag{15}$$

Выясним условия единственности решения задачи (12) — (15) в области $\sigma_1 \cup \sigma_2$.

Теорема. В области $\sigma_1 \cup \sigma_2$ существует единственное решение задачи

$$L_{s,\psi}(w) \equiv a(s, \psi) w_{\psi\psi} + b(s, \psi) w_\psi + c(s, \psi) w - w_s = q(s, \psi) \tag{16}$$

$$w(0, \psi) = h(\psi), \quad \psi \geqslant 0; \quad w(0, \psi) = w(A, \psi) + \gamma_C(\psi) + \gamma_A(\psi), \quad \psi < 0; \quad w(s, 0) = 0, \quad C < s < A \tag{17}$$

если выполняются следующие предположения:

1) коэффициенты a, b, c в $\sigma_1 \cup \sigma_2$ ограничены, непрерывны и удовлетворяют условиям Гёльдера

$$|a(s, \psi') - a(s, \psi)| \leqslant M_1 |\psi' - \varphi|^{\lambda_1}, \quad |a(s', \psi) - a(s, \psi)| \leqslant M_1 |s' - s|^{\lambda_1}$$

$$|b(s, \psi') - b(s, \psi)| \leqslant M_1 |\psi' - \psi|^{\lambda_1}, \quad |c(s, \psi') - c(s, \psi)| \leqslant M_1 |\psi' - \psi|^{\lambda_1}, \quad \lambda_1 > 0$$

2) $a(s, \psi)$ для любых $(s, \psi) \in \sigma_1 \cup \sigma_2$ удовлетворяет неравенству $a(s, \psi) \geqslant \mu > 0$

3) производные a_ψ, $a_{\psi\psi}$, b_ψ существуют в $\sigma_1 \cup \sigma_2$, ограничены, непрерывны и удовлетворяют условию Гёльдера по ψ;

4) функция $q(s, \psi)$ непрерывна в $\sigma_1 \cup \sigma_2$ и при $0 \leqslant s \leqslant A$ удовлетворяет оценке

$$|q(s, \psi)| \leqslant M_2 |\psi|^{\lambda_2}, \quad \lambda_2 > 0 \tag{18}$$

5) функция $h(\psi)$ непрерывна при $0 \leqslant \psi \leqslant +\infty$ и также удовлетворяет оценке (18); $\gamma_C(\psi)$, $\gamma_A(\psi)$ ограничены и непрерывны.

Доказательство. Условия 1), 2) теоремы обеспечивают существование единственного фундаментального решения $Z(s, \psi; \tau, \xi)$ однородного уравнения (16) в слое $\overline{H} = \{0 \leqslant s \leqslant C, -\infty \leqslant \psi \leqslant +\infty\}$ [8].

Покажем, что

$$w(s, \psi) = -\int_0^s d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} Z(s, \psi; \tau, \xi) q(\tau, \xi) d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} Z(s, \psi; \tau, \xi) \times \tag{19}$$

$$\times \Phi(\xi) d\xi \equiv V_1(s, \psi) + V_2(s, \psi)$$

— решение уравнения (16) в слое $\overline{H}$, удовлетворяющее начальному условию

$$w(0, \psi) = \Phi(\psi) \equiv \begin{cases} h(\psi), & \psi \geqslant 0 \\ \varphi(\psi), & \psi < 0 \end{cases} \tag{20}$$

где $\varphi(\psi)$ непрерывна, удовлетворяет (18) и подлежит определению.

На основании следующих оценок, полученных в [8]

$$|Z(s, \psi; \tau, \xi)| < M_3{}^*{}_{,-1/2}, \quad \left|\frac{\partial Z(s, \psi; \tau, \xi)}{\partial \psi}\right| < M^*{}_{3,-1}, \tag{21}$$

$$\left|\frac{\partial^2 Z(s, \psi; \tau, \xi)}{\partial \psi^2}\right| < M^*{}_{3,-3/2},$$

$$\left|\frac{\partial Z(s, \psi; \tau, \xi)}{\partial s}\right| < M_3{}^*{}_{,-3/2}, \quad M_{3,\lambda} \equiv M_3 (s - \tau)^\lambda \exp\left[-\frac{\mu_1 (\psi - \xi)^2}{s - \tau}\right]$$

и условия 4) данной теоремы имеем

$$|J(s, \psi; \tau)| \equiv \left|\int_{-\infty}^{+\infty} Z(s, \psi; \tau, \xi) q(\tau, \xi) d\xi\right| < M_4, \quad |V_1(s, \psi)| < M_4 s$$

в силу чего $V_1(s, \psi)$ непрерывна в $\overline{H}$ и удовлетворяет нулевому начальному условию. Кроме того, вследствие (21) непрерывны по s, ψ и равномерно сходятся интегралы

$$\frac{\partial J}{\partial \psi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial Z}{\partial \psi} q(\tau, \xi) d\xi, \quad \frac{\partial^2 J}{\partial \psi^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi^2} q(\tau, \xi) d\xi,$$

$$\frac{\partial J}{\partial s} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial Z}{\partial s} q(\tau, \xi) d\xi$$

Отсюда, используя свойство функции $Z(s, \psi; \tau, \xi)$

$$\lim_{s \to \tau + 0} \int_{-\infty}^{+\infty} Z(s, \psi; \tau, \xi) q(\tau, \xi) d\xi = q(s, \psi)$$

получаем, что $V_1(s, \psi)$ удовлетворяет уравнению $L_{s,\psi}(V_1(s, \psi)) = q(s, \psi)$.

Аналогично устанавливается, что $V_2(s, \psi)$ удовлетворяет уравнению $L_{s,\varphi}(V_2(s, \psi)) = 0$ и начальному условию (20).

Из (19) при $s = C - 0$ получаем

$$w(C, \psi) = -\int_0^C d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} Z(c, \psi; \tau, \xi)\, q(\tau, \xi)\, d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} Z(C, \psi; 0, \xi)\, \Phi(\xi)\, d\xi \tag{22}$$

Условие 3) теоремы обеспечивает существование оператора $L^*_{\tau,\xi}$, сопряженного к $L_{s,\psi}$

$$L^*_{\tau,\xi}(v) \equiv \frac{\partial^2 (a(\tau, \xi) v)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial (b(\tau, \xi) v)}{\partial \xi} + c(\tau, \xi) v - \frac{\partial v}{\partial \tau}$$

и представление любого решения $w(s, \psi)$ однородного уравнения (16) в полуполосе $\bar{Q} = \{C \leqslant s < A, -\infty \leqslant \psi < 0\}$ в виде [5]

$$w(s, \psi) = \int_{-\infty}^{0} w(C, \xi)\, G(s, \psi; C, \xi)\, d\xi + \int_C^A w(\tau, 0) \times \frac{\partial [a(\tau, 0)\, G(s, \psi; \tau, 0)]}{\partial \xi}\, d\tau$$

$$G(s, \psi; \tau, \xi) \equiv Z(s, \psi; \tau, \xi) - v(s, \psi; \tau, \xi)$$

Функция $v(s, \psi; \tau, \xi)$ подчиняется условиям

1°. $v(s, \psi; \tau, \xi)$ определена в $\bar{Q}$ и для $\tau < s$ удовлетворяет уравнению $L^*_{\tau,\xi}(v) = 0$

2°. $\lim\limits_{s \to \tau} v(s, \psi; \tau, \xi) = 0$

3°. $v(s, 0; \tau, \xi) = Z(s, 0; \tau, \xi)$

Функцию $v(s, \psi; \tau, \xi)$ ищем в виде потенциала двойного слоя с неизвестной плотностью $\omega(s; \tau, \xi)$ [8]

$$v(s, \psi; \tau, \xi) = \int_\tau^s d\theta \int_{-\infty}^{0} P(Z(s; \psi; \theta, \zeta))\, \omega(\theta; \tau, \xi)\, d\zeta \tag{23}$$

$$P(Z(s, \psi; \tau, \xi)) \equiv \frac{\partial [a(\tau, \xi)\, Z(s, \psi; \tau, \xi)]}{\partial \xi} - b(\tau, \xi)\, Z(s, \psi; \tau, \xi) \tag{24}$$

Из (24) следует оценка [8] (M_5, λ, μ_2 — положительные постоянные)

$$|P(Z(s, \psi; \tau, \xi))| < M_5 (s - \tau)^{-1+\lambda} \exp\left[-\frac{\mu_2(\psi - \xi)^2}{s - \tau}\right] \tag{25}$$

Согласно [9], справедливо соотношение (теорема о скачке потенциала двойного слоя)

$$\lim_{\psi \to 0} v(s, \psi; \tau, \xi) = {}^1/_2\, \omega(s; \tau, \xi) + v(s, 0; \tau, \xi)$$

Отсюда, удовлетворяя условию 3°, получим для определения $\omega(s; \tau, \xi)$ интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\frac{1}{2}\omega(s; \tau, \xi) + \int_\tau^s d\theta \int_{-\infty}^{0} P(Z(s, 0; \theta, \zeta))\, \omega(\theta; \tau, \xi)\, d\zeta = Z(s, 0; \tau, \xi)$$

Будем искать его решение в виде ряда

$$\omega(s;\tau,\xi)=\sum_{m=1}^{\infty}\omega_m(s;\tau,\xi) \tag{26}$$

$$\omega_1=Z(s,0;\tau,\xi);\quad \omega_{m+1}=\int_{\tau}^{s}d\theta\int_{-\infty}^{0}P(Z(s,0;\theta,\zeta))\,\omega_m(\theta;\tau,\xi)\,d\zeta,$$

$$m=1,2,\ldots$$

Покажем равномерную сходимость ряда (24) при $s>\tau$. В силу (21) и (25) имеем (ниже $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция)

$$|\omega_1(s;\tau,\xi)|<M_3(s-\tau)^{-1/2}\exp\left[-\frac{\mu_1\xi^2}{s-\tau}\right]$$

$$|\omega_2(s;\tau,\xi)|<M_6^2\int_{\tau}^{s}(s-\theta)^{-1/2+\lambda}d\theta\int_{-\infty}^{+\infty}[(s-\theta)(\theta-\tau)]^{-1/2}\times$$

$$\times\exp\left[-\mu_3\left(\frac{\zeta^2}{s-\theta}+\frac{\xi^2}{\theta-\tau}\right)\right]d\zeta=M_6^2\sqrt{\frac{\pi}{\mu_3}}\frac{(s-\tau)^{\lambda}}{(1/2+\lambda)}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{\mu_3\xi^2}{s-\tau}\right]$$

$$|\omega_3(s;\tau,\xi)|<\frac{M_6^2\sqrt{\pi/\mu_3}}{(1/2+\lambda)}\int_{\tau}^{s}(s-\theta)^{\lambda-1/2}(\theta-\tau)^{\lambda+1/2}d\theta\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}[(s-\theta)(\theta-\tau)]^{-1/2}\exp\left[-\mu_3\left(\frac{\zeta^2}{s-\theta}+\frac{\xi^2}{\theta-\tau}\right)\right]d\zeta=$$

$$=M_6^3\frac{\pi(s-\tau)^{2\lambda+1/2}}{\mu_3(1/2+\lambda)}\exp\left[-\frac{\mu_3\xi^2}{s-\tau}\right]\int_0^1\eta^{\lambda+1/2}(1-\eta)^{\lambda-1/2}d\eta=$$

$$=M_6^3\frac{\pi}{\mu_3}\cdot\frac{\Gamma^2(\lambda+1/2)(s-\tau)^{2\lambda+1/2}}{\Gamma[2(\lambda+1/2)](2\lambda+1)}\exp\left[-\frac{\mu_3\xi^2}{s-\tau}\right]$$

Индукцией по m можно доказать, что для $m\geqslant 3$

$$|\omega_m(s;\tau,\xi)|<M_6^m\left(\frac{\pi}{\mu_3}\right)^{\frac{m-1}{2}}\frac{\Gamma^{m-1}(\lambda+1/2)(s-\tau)^l}{\Gamma[(m-1)(\lambda+1/2)](m-1)(\lambda+1/2)}\times \tag{27}$$

$$\times\exp\left[-\frac{\mu_3\xi^2}{s-\tau}\right]$$

$$l=\frac{(m-1)(2\lambda+1)-1}{2}$$

Поскольку $\Gamma[m(\lambda+1/2)]\geqslant[m(\lambda+1/2)]!]$ для $m(\lambda+1/2)>2$, то из (27) вытекает абсолютная и равномерная сходимость ряда (26) при $s>\tau$, а также оценка

$$|\omega(s;\tau,\xi)|<M_7(s-\tau)^{-1/2}\exp\left[-\frac{\mu_3\xi^2}{s-\tau}\right] \tag{28}$$

Из (23) и (28) с учетом (25) имеем

$$|v(s,\psi;\tau,\xi)|<M_8(s-\tau)^{\lambda}\exp\left[-\frac{\mu_3(\psi-\xi)^2}{s-\tau}\right]$$

и, следовательно, $v(s, \psi; \tau, \xi)$ удовлетворяет условию 2°. В силу условия 3) данной теоремы $L^*_{\tau,\xi}(Z(s, \psi; \tau, \xi)) = 0$ (см. [8]), и поэтому выполнение условия 1° очевидно. Таким образом, существование единственной функции Грина $G(s, \psi; \tau, \xi)$ установлено.

Введем в рассмотрение функцию $\varphi_C(\psi) \equiv w(C-0, \psi)$ для $-\infty \leqslant \psi < 0$, где $w(C-0, \psi)$ определяется (22). Аналогично доказательству (19) можно показать, что

$$w(s, \psi) = -\int_C^s d\tau \int_{-\infty}^0 G(s, \psi; \tau, \xi)\, q(\tau, \xi)\, d\xi + \int_{-\infty}^0 G(s, \psi; C, \xi) \times [\varphi_C(\xi) + \gamma_C(\xi)]\, d\xi$$

— решение уравнения (16) в полуполосе $\overline{Q}$, удовлетворяющее краевым условиям $w(C, \psi) = \varphi_C(\psi)$ при $-\infty \leqslant \psi < 0$, $w(s, 0) = 0$. Учитывая разрывность решения задачи (16), (17) при $s = A + 0$, $\psi < 0$, получим для определения $\varphi(\psi)$

$$\varphi(\psi) = \int_{-\infty}^0 K(\psi, \zeta; A, C)\, \varphi(\zeta)\, d\zeta + r(\psi; A, C) + \gamma_A(\psi) \tag{29}$$

Здесь

$$K(\psi, \zeta; A, C) \equiv Z(C, \psi; 0, \zeta) \int_{-\infty}^0 G(A, \psi; C, \xi)\, d\xi \tag{30}$$

$$\begin{aligned} r(\psi; A, C) \equiv & -\int_0^C d\tau \int_{-\infty}^0 G(A, \psi; C, \xi) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} Z(C, \psi; \tau, \zeta)\, q(\tau, \zeta)\, d\zeta \right) d\xi - \\ & - \int_C^A d\tau \int_{-\infty}^0 G(A, \psi; \tau, \xi)\, q(\tau, \xi)\, d\xi + \int_{-\infty}^0 G(A, \psi; C, \xi) \times \\ & \times \left(\int_0^{+\infty} Z(C, \psi; 0, \zeta)\, h(\zeta)\, d\zeta \right) d\xi + \int_{-\infty}^0 K(\psi, \zeta; A, C)\, \gamma_C(\zeta)\, d\zeta \end{aligned} \tag{31}$$

(произведенные изменения порядка интегрирования в (29), а также в первом и третьем слагаемых (31) оправданы первой оценкой (21)). Из (21) и (30) следует, что норма ядра $K(\psi, \zeta; A, C)$ ограничена в $L_2(\sigma_1 \cup \sigma_2)$, поэтому (29) — уравнение Фредгольма второго рода. Резольвента его ядра — мероморфная функция, полюсы которой — корни многочлена [6]

$$D(\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} c_n \nu^n, \quad c_0 = 1, \quad c_n = \int_0^{+\infty} B_{n-1}(\psi, \psi)\, d\psi, \quad n > 0$$

$$B_n(\psi, \zeta; A, C) = c_n K(\psi, \zeta; A, C) - n \int_0^{+\infty} K(\psi, \theta; A, C)\, B_{n-1} \times (\theta, \zeta; A, C)\, d\theta$$

Видно, что коэффициенты (а с ними и корни) многочлена $D(\nu)$ зависят параметрически от A и C. Поэтому число $\nu = 1$ может быть характеристическим не более чем на счетном множестве конечных значений A и C, и следовательно, решения уравнения (29) и задачи (16), (17) единственны почти при любых A и C.

Замечания. 1°. Коэффициенты в (12), зависящие от решения первого приближения $u_0(s, \psi)$ и его производных,— ограниченные, непрерывные функции, и поэтому удовлетворяют условиям 1), 3), доказанной теоремы. Функции $g(s, \psi, u_{0\psi})$ в (12) и $\alpha_0(\psi)$, $\alpha_1(\psi)$ в (13) удовлетворяют условиям 4), 5) соответственно, подчиняясь оценке (18) с $\lambda_2 = 1$. В силу (14) для уравнения (12) неравенство в условии 2) не выполняется. Однако, учитывая примечание, сделанное при выводе системы (11), можно заменить (14) на

$$U(s, 0) = O(\varepsilon^p) > 0 \quad (p \geqslant 2), \quad C < s < A \tag{32}$$

и считать условие 2) теоремы для (12) также выполненным.

2°. Согласно [10], исследование единственности решения краевой задачи для квазилинейного уравнения можно свести к аналогичному исследованию решения некоторого линейного уравнения при нулевых краевых условиях. Поэтому из доказанной теоремы в предположении существования решения задачи (12), (13), (15), (32) в первом приближении следует его единственность.

3°. Из доказанной теоремы с учетом (32) вытекают существование и единственность решения задачи (12) — (15) во втором приближении.

Поступила 24 I 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нейланд В. Я., Сычев В. В.* К теории течений в стационарных срывных зонах. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 1.
2. *Batchelor G. K.* On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number. J. Fluid Mech., 1956, vol. 1, p. 2.
3. *Матвеева Н. С., Нейланд В. Я.* Ламинарный пограничный слой вблизи угловой точки тела. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 4.
4. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика, т. 2. М., Физматгиз, 1963.
5. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1972.
6. Интегральные уравнения. Справочная математическая библиотека. М., «Наука», 1968.
7. *Ван-Дайк М.* Теория сжимаемого пограничного слоя во втором приближении. В сб.: Исследование гиперзвуковых течений. М., «Мир», 1964.
8. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа. Успехи матем. наук, 1962, т. 17, вып. 3 (105).
9. *Слободецкий Л. Н.* Теория потенциала для параболических уравнений. Докл. АН СССР, 1955, т. 103, № 1.
10. *Курант Р.* Дифференциальные уравнения с частными производными. М., «Наука», 1964.