Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 531.36

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОЦЕССОВ НА ЗАДАННОМ ПРОМЕЖУТКЕ ВРЕМЕНИ

К. А. Абгарян

(Москва)

Дается дополнение и уточнение постановки задачи об устойчивости процессов на заданном промежутке времени, опубликованной в [1, 2]. Уточнение касается случая, когда заданный промежуток конечен: при этом возникает потребность наложения на область предельных отклонений более жестких ограничений. По характеру ограничения возмущений параметров процесса предлагаемая постановка, как и исходная, примыкает к работе [3]. На основании возможности преобразования линейной дифференциальной системы к диагональному виду устанавливаются необходимые и достаточные условия устойчивости линейного процесса и некоторые условия устойчивости и неустойчивости нелинейного процесса по линейному приближению. Показано применение для тех же целей преобразования линейной системы к системе, «близкой» к диагональной.

1. Выбор области предельных отклонений. Область предельных отклонений вводится посредством класса K_Δ^ω $n \times n$-матриц $G(t) = (G_1 G_2 \ldots G_n)$ над полем комплексных чисел, удовлетворяющих на промежутке $\Delta = [t_0, T)$, где T — число, превосходящее t_0, или символ ∞, условиям: $\det G(t) \neq 0$ и эрмитова норма столбцов $G_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ совпадает с положительной функцией $\omega(t)$, т. е. $\| G_j(t) \| = \sqrt{(G_j, G_j)} = \omega(t)$.

Область предельных отклонений представляется в следующем виде:

$$(G^{-1}(t)\, x,\ G^{-1}(t)\, x) \leqslant \rho^2, \quad G(t) \in K_\Delta^\omega \tag{1.1}$$

Здесь x — столбцовая матрица отклонений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ параметров, характеризующих исследуемый процесс, от номинальных значений, ρ — некоторое положительное число.

В левой части соотношения (1.1) стоит эрмитова форма координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которая при любом x принимает только вещественные неотрицательные значения. Геометрически соотношение (1.1) в пространстве координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при каждом фиксированном t представляет собой n-мерный эллипсоид, ограниченный поверхностью

$$(G^{-1}(t)\, x, \quad G^{-1}(t)\, x) = \rho^2 \tag{1.2}$$

со следующими свойствами.

Каждый из $2n$ лучей $x = \pm G_\sigma(t)\, s$ $(\sigma = 1, 2, \ldots, n;\ s > 0)$, где G_σ $(\sigma = 1, 2, \ldots, n)$ — столбцы матрицы G, пересекает поверхность (1.2) один раз при значении параметра $s = \rho$.

Точки пересечения этих лучей с поверхностью (1.2) находятся от начала координат $(x = 0)$ на расстоянии $\rho_\omega = \omega\rho$.

Плоскость $x = G_i s_i + G_j s_j$ $(i \neq j)$, порожденная какой-нибудь парой столбцов матрицы G, пересекается с поверхностью (1.2) по эллипсу, описываемому уравнениями

$$x = G_i s_i + G_j s_j, \qquad s_i^2 + s_j^2 = \rho^2 \tag{1.3}$$

Лучи $G_i s_i$ и $G_j s_j$ расположены симметрично относительно главных осей эллипса (1.3) и направлены по диагоналям прямоугольника, стороны которого касаются эллипса (1.3) в его вершинах $\pm {}^1/_2 \sqrt{2}\,(G_i \pm G_j)$.

Полуоси эллипсоида (1.2) $a_i = \sqrt{\mu_i \rho}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где μ_i — собственные значения эрмитовой матрицы $G^* G$, причем $0 < a_i < \sqrt{2}\omega\rho$.

В $n + 1$-мерном пространстве координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и времени t равенство (1.2) определяет некоторую трубку (ρ_ω-трубку), каждое сечение которой гиперплоскостью $t = t^*$ представляет собой эллипсоид с указанными выше свойствами. С течением времени может меняться произвольно ориентация главных осей этого эллипсоида и сам он может деформироваться (т. е. могут меняться размеры его полуосей), но при этом строго определенные значения принимает расстояние от начала координат до точек пересечения с поверхностью эллипсоида всех лучей $\pm G_\sigma(t)\, s$; в частности, при $\omega = \mathrm{const}$ это расстояние остается неизменным.

2. Определения. Для области предельных отклонений в форме (1.1) в работах [1,2] предложено следующее

Определение 1. Если в заданном классе K_Δ^ω существует такая матрица $G(t)$, что при достаточно малом $\rho > 0$ любое возмущение процесса, начальное значение $x_0 = x(t_0)$ которого удовлетворяет условию

$$(G^{-1}(t_0)\, x_0, G^{-1}(t_0)\, x_0) \leqslant \rho^2$$

на промежутке $\Delta = [t_0, T)$ удовлетворяет условию

$$(G^{-1}(t_0)\, x_0, \; G^{-1}(t_0)\, x_0) \leqslant \rho^2$$

то невозмущенный процесс устойчив на промежутке $[t_0, T)$. В противном случае — неустойчив.

Применительно к динамическим системам, описываемым уравнением вида

$$dx/dt = U(t)\, x + h(t, x) \tag{2.1}$$

где x — столбцовая матрица возмущений, U — квадратная матрица порядка n, непрерывная на $[t_0, T)$, h — столбцовая матрица, обладающая свойством

$$\frac{h(t, x)}{\|x\|} \underset{t}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при } x \to 0 \tag{2.2}$$

условия устойчивости и неустойчивости решения $x \equiv 0$ на промежутке $[t_0, \infty)$ по линейному приближению, которые вытекают из приведенной постановки, во многом аналогичны соответствующим результатам теории Ляпунова. В частности, при $U = \mathrm{const}$, если вещественные части всех собственных значений матрицы U отрицательны, то тривиальное решение уравнения (2.1) устойчиво, если же среди собственных значений матрицы U имеется хотя бы одно с положительной вещественной частью, то решение неустойчиво. В общем случае из устойчивости решения $x \equiv 0$ (на $[t_0, \infty)$) в смысле определения 1 следует устойчивость по Ляпунову; обратное имеет место не всегда.

Непосредственное применение понятия устойчивости в форме определения 1 в случае конечного промежутка ($T < \infty$) приводит к малоприемлемому результату. Так, при $U = \text{const}$ наличие у матрицы U хотя бы одного собственного значения с отрицательной вещественной частью может оказаться достаточным для устойчивости решения $x \equiv 0$ уравнения (2.1) на конечном промежутке в смысле определения 1 независимо от того, каковы ее остальные собственные значения. Это обстоятельство свидетельствует о том, что наложенные в определении 1 на область предельных отклонений ограничения, естественные в случае неограниченного промежутка времени, нуждаются в дополнении в случае конечного промежутка. В связи с этим предлагается следующая модификация определения 1, более предпочтительная в случае конечного промежутка времени.

Определение 2. Если в заданном классе K_Δ^ω существует такая матрица $G(t)$, совпадающая в момент $t = t_0$ с заданной постоянной матрицей G_0 класса $K_\Delta^{\omega(t_0)}$, что при достаточно малом $\rho > 0$ любое возмущение $x(t)$ процесса, начальное значение $x_0 = x(t_0)$ которого удовлетворяет условию

$$(G_0^{-1}x_0,\ G_0^{-1}x_0) \leqslant \rho^2 \tag{2.3}$$

на промежутке $\Delta = [t_0, T)$ удовлетворяет условию

$$(G^{-1}(t)x,\ G^{-1}(t)x) \leqslant \rho^2$$

то невозмущенный процесс устойчив на промежутке $[t_0, T)$. В противном случае — неустойчив.

Ниже приводятся некоторые условия процессов, описываемых уравнениями вида (2.1), в смысле определения 2.

3. Линейные системы. Имеем

$$dx/dt = U(t)x \tag{3.1}$$

где U — квадратная матрица порядка n, непрерывная на $[t_0, T)$.

Замена переменных

$$x = K(t)y, \quad K(t) = X(t)G_0Z(t) \quad \left(\frac{dX}{dt} = UX,\ X(t_0) = E\right) \tag{3.2}$$

где X — решение матричного уравнения, приведенного в скобках, E — единичная матрица, $G_0 = (g_1^\circ, g_2^\circ \ldots g_n^\circ)$ — заданная постоянная матрица класса $K_\Delta^{\omega(t_0)}$, Z — непрерывно дифференцируемая и невырожденная на $[t_0, T)$ диагональная матрица, приводит (3.1) к диагональному виду (см. [2])

$$dy/dt = \Lambda(t)y, \quad \Lambda(t) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \tag{3.3}$$

Можно потребовать, чтобы при этом все столбцы K_σ ($\sigma = 1, 2, \ldots, n$) матрицы K имели бы одну и ту же эрмитову норму $\alpha(t)$, т. е. чтобы

$$\| K_\sigma(t) \| = \alpha(t) > 0, \quad \sigma = 1, 2, \ldots, n,$$

Тогда Z и Λ определяются следующими формулами:

$$Z = \alpha(t)\,\mathrm{diag}\left(\frac{e^{i\theta_1}}{\|Xg_1^\circ\|}, \ldots, \frac{e^{i\theta_n}}{\|Xg_n^\circ\|}\right)$$

$$\mathrm{Re}\,\Lambda = \frac{d}{dt}\ln \mathrm{diag}\left(\frac{\|Xg_1^\circ\|}{\alpha}, \ldots, \frac{\|Xg_n^\circ\|}{\alpha}\right)$$

$$\mathrm{Im}\,\Lambda = -\,\mathrm{diag}\left(\frac{d\theta_1}{dt}, \ldots, \frac{d\theta_n}{dt}\right)$$

где θ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ — произвольные непрерывно дифференцируемые вещественные скалярные функции.

В дальнейшем будем полагать $\theta_j \equiv 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда, как легко видеть, $K(t_0) = G_0$ при $\alpha(t_0) = \omega(t_0)$. При таком выборе матрицы $K(t)$ пучок решений уравнения (3.1), удовлетворяющих условию (2.3), представляется соотношением

$$(H^{-1}(t)x,\ H^{-1}(t)x) \leqslant \rho^2, \quad t \in [t_0, T) \tag{3.4}$$

где $H = (H_1H_2 \ldots H_n)$ — квадратная матрица порядка n, определенная равенством

$$HH^* = K(t)\exp\left(\int_{t_0}^{t} 2\mathrm{Re}\,\Lambda\, dt\right) K^*(t) \tag{3.5}$$

при условии, что все столбцы H_σ $(\sigma = 1, 2, \ldots, n)$ при каждом t имеют одну и ту же норму $\omega_0(t)$.

Матрица $G(t) = (\omega(t)/\omega_0(t))H$, очевидно, принадлежит классу K_Δ^ω. Соответствующая ρ_ω-трубка

$$(G^{-1}(t)x,\ G^{-1}(t)x) = \rho^2 \tag{3.6}$$

характеризуется тем, что каждое ее сечение $t = t^*$ представляет собой эллипсоид, подобный эллипсоиду

$$(H^{-1}(t)x,\ H^{-1}(t)x) = \rho^2 \tag{3.7}$$

причем главные оси эллипсоидов (3.6) и (3.7) в пространстве координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ по направлению совпадают. Назовем эту ρ_ω-трубку союзной.

При $t = t_0$ имеем $H(t_0) = K(t_0) = G_0$, так что в этот момент союзная ρ_ω-трубка совпадает с оболочкой пучка решений (3.4). Поверхности (3.6) и (3.7) совпадают и при тех значениях t, когда $\omega_0(t) = \omega(t)$. Когда $\omega_0(t) < \omega(t)$ эллипсоид (3.7) оказывается заключенным внутри эллипсоида (3.6), а когда $\omega_0(t) > \omega(t)$, то, наоборот, эллипсоид (3.6) заключен в эллипсоид (3.7).

Итак, при $\omega_0(t) \leqslant \omega(t)$ все решения линейной системы из пучка (3.4) находятся в пределах союзной ρ_ω-трубки. Если же $\omega_0(t) > \omega(t)$, то непременно некоторые из решений пучка (3.4) будут проходить вне пределов союзной ρ_ω-трубки. Можно показать, что при $\omega_0(t) > \omega(t)$, какой бы ρ_ω-трубкой ни заменили союзную ρ_ω-трубку, всегда вне этой трубки окажутся некоторые из решений пучка (3.4), т. е. из тех решений линейной системы, которые в начальный момент t_0 находились внутри или на поверхности эллипсоида (2.3).

Из вышеизложенного следует

Теорема 3.1. Для устойчивости тривиального решения линейной системы (3.1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\omega_0(t) \leqslant \omega(t), \quad \forall\, t \in [t_0, T)$$

Эрмитова норма столбцов матрицы H определяется соотношением

$$\omega_0^2(t) \equiv \|H_s(t)\|^2 = \frac{1}{n} \sum_{\sigma=1}^{n} \exp\left[2\mu_\sigma(t)(t-t_0)\right] \alpha^2(t), \quad s = 1, 2, \ldots, n$$

$$\mu_\sigma(t) = \frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^{t} \operatorname{Re} \lambda_\sigma(t)\, dt$$

Учитывая это, можно сформулировать ряд более простых условий устойчивости и неустойчивости невозмущенного процесса.

Следствия. 1°. Пусть на промежутке $[t_0, T)$

$$\alpha(t) \leqslant \omega(t), \quad \mu(t) \leqslant 0 \quad (\mu(t) = \max_\sigma \mu_\sigma(t))$$

Тогда невозмущенный процесс (решение уравнения (3.1)) устойчив на $[t_0, T)$.

2.° Если в какой-нибудь точке $\bar{t} \in [t_0, T)$

$$\alpha(\bar{t}) \geqslant \omega(\bar{t}), \quad \frac{1}{n} \sum_{\sigma=1}^{n} \exp\left[2\mu_\sigma(\bar{t})(\bar{t}-t_0)\right] > 1$$

то невозмущенный процесс (решение уравнения (3.1)) неустойчив на $[t_0, T)$.

Невозмущенный процесс назовем асимптотически устойчивым на $[a, \infty)$, если он устойчив на $[a, \infty)$ (в смысле определения 2) и для любого $t_0 \in [a, \infty)$ существует такое $\rho = \rho(t_0) > 0$, что все возмущения $x(t)$ процесса, удовлетворяющие условию (2.3), обладают свойством $\lim \|x(t)\| = 0$ при $t \to \infty$.

3°. Пусть на промежутке $[t_0, \infty)$

$$\alpha(t) \leqslant \omega(t), \quad \mu(t) < -b, \quad b = \text{const} > 0$$

Тогда невозмущенный процесс (решение уравнения (3.1)) асимптотически устойчив на $[t_0, \infty)$.

4°. Пусть на промежутке $[t_0, \infty)$

$$\omega(t) / \alpha(t) \leqslant N, \quad N = \text{const} \geqslant 0$$

и, начиная с некоторого $t^* > t_0$

$$\mu(t) \geqslant b, \quad b = \text{const} > 0$$

Тогда невозмущенный процесс (решение уравнения (3.1)) неустойчив на $[t_0, \infty)$.

Пример. Линейная система с постоянными коэффициентами ($U = \text{const}$). Пусть, для простоты, U — матрица простой структуры с собственными значениями ν_1, $\nu_2, \ldots, \nu_n$ (среди которых могут быть и равные) и соответствующими собственными векторами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. В этом случае фундаментальная матрица линейного уравнения (3.1) имеет вид

$$X = \sum_{j=1}^{n} \exp[\nu_j (t - t_0)] P_j$$

где P_j — матрица ортогонального проектирования n-мерного пространства R на подпространство R_j, порожденное собственным вектором γ_j.

В соответствии с этим

$$\mu_\sigma(t) = \frac{1}{t - t_0} \ln \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{n} \exp[\nu_j (t - t_0)] P_j g_\sigma^\circ \right\| \Big/ \alpha(t) \right\}$$

Из последнего выражения видно, что устойчивость или неустойчивость процесса зависят от ν_i и наперед заданных G_0 и $\omega(t)$ (функция $\omega(t)$ ограничивает выбор функции $\alpha(t)$). Ограничимся здесь рассмотрением наиболее простого случая, когда $G_0 = (\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_n)$. При этом

$$\mu_\sigma(t) = \operatorname{Re} \nu_\sigma + \frac{1}{t - t_0} \ln \frac{\omega(t_0)}{\alpha(t)}, \quad \sigma = 1, 2, \ldots, n$$

Предполагая, что $\omega(t)$ — дифференцируемая функция, положим $\alpha(t) \equiv \omega(t)$. Тогда невозмущенный процесс будет устойчивым на $[t_0, T)$, если

$$\max_\sigma \operatorname{Re} \nu_\sigma + \frac{1}{t - t_0} \ln \frac{\omega(t_0)}{\omega(t)} \leqslant 0$$

асимптотически устойчивым на $[t_0, \infty)$, если

$$\max_\sigma \operatorname{Re} \nu_\sigma + \frac{1}{t - t_0} \ln \frac{\omega(t_0)}{\omega(t)} < -b$$

и неустойчивым на $[t_0, T)$, если

$$\frac{1}{n} \sum_{\sigma=1}^{n} \exp[2(t - t_0) \operatorname{Re} \nu_\sigma] > \frac{\omega^2(t)}{\omega^2(t_0)}$$

4. Нелинейные системы. Устойчивость на конечном промежутке по линейному приближению. Рассмотрим нелинейный процесс, который представлен тривиальным решением $x \equiv 0$ уравнения (2.1). Без ограничения общности в случае $T < \infty$ можно предполагать, что невырожденность и дифференцируемость матрицы K преобразования уравнения линейного приближения (уравнения (3.1)) к виду (3.3) имеют место на замкнутом промежутке $[t_0, T]$.

Имея в виду, что H — по-прежнему матрица, фигурирующая в соотношении (3.4), введем в рассмотрение функцию

$$V(t, x) = \frac{\omega_0^2(t)}{\omega^2(t)} (H^{-1}(t) x, H^{-1}(t) x)$$

Равенство $V(t, x) = \rho^2$ представляет союзную ρ_ω-трубку, ибо $H\omega/\omega_0 \in K_\Delta^\omega$.

Принимая во внимание (3.5), после замены переменных (3.2) получим

$$V(t, x) = \frac{\omega_0^2(t)}{\omega^2(t)}\left(\exp\left[-\int_{t_0}^{t} 2\operatorname{Re}\Lambda\, dt\right] y, y\right) \tag{4.1}$$

Из (2.1) находим

$$y = I(t)\left(\int_{t_0}^{t} \frac{Mh}{I(t')}\, dt' + y(t_0)\right), \quad M = K^{-1}, \quad I(t) = \exp\int_{t_0}^{t} \Lambda\, dt \tag{4.2}$$

Подставляя (4.2) в (4.1), имеем

$$V(t, x) = \frac{\omega_0^2(t)}{\omega^2(t)} V(t_0, x_0)[1 + \psi(t, y)] \tag{4.3}$$

где

$$\psi(t, y) = 2\operatorname{Re}\frac{y^*(t_0)}{\|y(t_0)\|}\int_{t_0}^{t} \frac{Mh}{I(t')\|y(t_0)\|}\, dt'$$

В силу условия (2.2) и невырожденности матрицы K на замкнутом промежутке $[t_0, T]$

$$\psi(t, y) \underset{t}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при } y \to 0 \tag{4.4}$$

Соотношения (4.3) и (4.4) позволяют сформулировать следующие теоремы.

Теорема 4.1. Если $\omega_0(t) < \omega(t)$ при $\forall t \in [t_0, T]$ $(T < \infty)$, то невозмущенный процесс (тривиальное решение уравнения (2.1)) устойчив на конечном промежутке $[t_0, T)$.

Теорема 4.2. Если $\omega_0(\bar{t}) > \omega(\bar{t})$ в какой-нибудь точке $\bar{t} \in [t_0, T)$, то невозмущенный процесс (тривиальное решение уравнения (2.1)) не обладает устойчивостью на промежутке $[t_0, T)$.

5. Условия устойчивости, приведенные выше, основаны на возможности преобразования линейной системы (3.1) к диагональному виду (3.3). Однако матрица такого преобразования в качестве сомножителя содержит фундаментальную матрицу X (см. (3.2)), точное выражение для которой в конечном виде далеко не всегда удается получить. В связи с этим представляется целесообразным построение условий устойчивости с использованием преобразования линейной системы к системе, близкой к диагональной. Способы построения матриц такого преобразования известны.

Введем в рассмотрение матрицу

$$G(t) = K(t)\, I(t)\, M_0\, G_0 I^{-1}(t)\, \Omega \qquad (M_0 = M(t_0))$$

Здесь K — невырожденная и дифференцируемая на $[t_0, T]$ квадратная матрица порядка n; Λ — диагональная матрица с диагональными элементами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, связанные друг с другом и с некоторой матрицей N соотношением $dK/dt = UK - K\Lambda + N$; Ω — нормирующая диагональная матрица, обеспечивающая выполнение условий $\|G_j(t)\| = \alpha(t) > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$ (G_j — столбцы матрицы G), причем $\Omega(t_0)$ — единичная матрица.

Имеет место

Теорема 5.1. Пусть на промежутке $[t_0, T < \infty)$

$$\alpha(t) \leqslant \omega(t), \quad \frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^{t'} [\mu_0(t') + \nu_{\max}(t')]\, dt' \leqslant -b$$

где $\mu_0(t)$ — действительная часть того собственного значения диагональной матрицы $\Lambda - \Omega^{-1}\, d\Omega/dt$, у которой она максимальна; $\nu_{\max}(t)$ — максимальное собственное значение эрмитовой матрицы

$$P = -\tfrac{1}{2}(G^{-1}NMG + G^*M^*N^*G^{*^{-1}})$$

Тогда невозмущенный процесс (тривиальное решение уравнения (2.1)) устойчив на промежутке $[t_0, T)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.3 на стр. 391 монографии [2].

Поступила 24 VI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абгарян К. А.* Одна постановка задачи об устойчивости процессов на заданном промежутке времени. Докл. АН СССР, 1973, т. 212, вып. 6.
2. *Абгарян К. А.* Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем. М., «Наука», 1973.
3. *Каменков Г. В., Лебедев А. А.* Замечания к статье «Об устойчивости движения на конечном интервале времени». ПММ, 1954, т. 18, вып. 4.