Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 531.36 + 534

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ ВОЗМУЩЕННЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ В КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЯХ

Л. Д. Акуленко

(Москва)

Развивается метод Пуанкаре для исследования критических случаев в существенно нелинейных автономных системах с одной степенью свободы, рассматриваются ситуации, приводящие к расщеплению траекторий; на основе первого метода Ляпунова исследуются вопросы устойчивости стационарных режимов. Рассматривается пример автовращательной системы, близкой к консервативной.

В работах, посвященных анализу движений в окрестности порождающего семейства периодических или вращательных движений невозмущенной системы, рассматриваются, как правило, относительно простые случаи, когда уравнения для параметров семейства, определяющие стационарный режим, в первом приближении допускают простые вещественные корни [1–6]. Значительно меньше внимания уделено исследованию более тонких и сложных случаев, когда указанные корни кратны или некоторые уравнения определяющей системы удовлетворяются тождественно [1,7–11].

1. Постановка задачи. Рассматривается широкий класс автономных систем с одной степенью свободы и медленно меняющимися параметрами вида

$$q^{\bullet} = Q(q, p, x, \varepsilon), \quad p^{\bullet} = P(q, p, x, \varepsilon), \quad x^{\bullet} = \varepsilon X(q, p, x, \varepsilon) \tag{1.1}$$

Здесь p, q — обобщенные координаты, x — вектор параметров системы, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ — малый неотрицательный параметр. Функции Q, P и X предполагаются достаточно гладкими в некоторой рассматриваемой области изменения их аргументов, а также удовлетворяют необходимым условиям периодичности по вращающимся переменным q или p. Далее, $t \geqslant t_0$ — время, начальные условия не задаются.

При условии существования полного семейства периодических или вращательных решений при $\varepsilon = 0$ система (1.1) может быть приведена к общему стандартному виду с вращающейся фазой

$$a^{\bullet} = \varepsilon f(a, \psi, \varepsilon), \quad \psi^{\bullet} = \omega(a) + \varepsilon F(a, \psi, \varepsilon) \tag{1.2}$$

Здесь a — квазипостоянный вектор, $\omega(a)$ — частота колебаний или вращений, $\infty > \omega_1 \geqslant \omega \geqslant \omega_0 > 0$. Правые части периодичны по фазе ψ с постоянным периодом 2π и являются достаточно гладкими функциями своих аргументов для $|\psi| < \infty$ и $a \in [a_1, a_2]$, причем $\max_t |\Delta a| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Так как далее решение будет строиться в виде рядов, то правые части для простоты будут считаться аналитическими. Вообще это предположение не обязательно, так как точное решение может быть построено последовательными приближениями по целым или дробным степеням параметра ε без предположения об аналитичности [1]. Отметим, что требования гладкости для построения схемы последовательных приближений в критических случаях должны быть соответствующим образом усилены. Смысл этого замечания проясняется построениями п. 2, 3.

Построение решения непосредственно системы (1.2) с введением возмущенной частоты во избежание растущих вековых членов [1, 2] приводит к весьма громоздким построениям. Значительное упрощение исследования достигается предварительным построением периодической фазовой траектории $a(\psi, \varepsilon)$. Затем квадратурой получается искомое решение как функция времени [12].

Периодическая фазовая траектория описывается системой стандартного вида

$$\frac{da}{d\psi} = \varepsilon \frac{f(a, \psi, \varepsilon)}{\omega(a) + \varepsilon F(a, \psi, \varepsilon)} \tag{1.3}$$

Так как в рассматриваемой области $\omega \geqslant \omega_0 > 0$, то при $\varepsilon > 0$ достаточно малом между ψ и t осуществляется взаимнооднозначное соответствие

$$t - t_0 + \tau = \int_0^{\psi} [\omega(a(\psi', \varepsilon)) + \varepsilon F(a(\psi', \varepsilon), \psi', \varepsilon)]^{-1} d\psi' \tag{1.4}$$

Если построено периодическое периода 2π решение системы (1.3), то при помощи формулы (1.4) определяется искомое периода $T(\varepsilon)$ решение исходной системы (1.2) вида [12]

$$\psi = \frac{2\pi}{T(\varepsilon)}(t - t_0 + \tau) + \varepsilon\Psi\left(\frac{2\pi}{T(\varepsilon)}(t - t_0 + \tau), \varepsilon\right), \qquad \tau = \mathrm{const} \tag{1.5}$$

$$T = T(\varepsilon) = \int_0^{2\pi} [\omega(a(\psi, \varepsilon)) + \varepsilon F(a(\psi, \varepsilon), \psi, \varepsilon)]^{-1} d\psi \tag{1.6}$$

Здесь Ψ — периодическая периода T функция времени.

Вопросы устойчивости по Ляпунову периодических решений системы (1.2) решаются путем исследования устойчивости периодических фазовых траекторий системы (1.3) на основе теоремы Андронова — Витта [1]. А именно, если все характеристические показатели соответствующей системы с периодическими коэффициентами в вариациях

$$\frac{d\delta a}{d\psi} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{f(a, \psi, \varepsilon)}{\omega(a) + \varepsilon F(a, \psi, \varepsilon)}\right]\delta a, \qquad a = a(\psi, \varepsilon) \tag{1.7}$$

имеют отрицательные вещественные части, то решение исходной системы (1.2) орбитально устойчиво.

Переходим к построению периодического решения системы (1.3).

Предварительно изложим кратко идею метода малого параметра Пуанкаре. Этот метод построения решения заключается в том, что специальным образом подбирается начальное условие для квазипостоянного вектора a. А именно, величина a_0 и малая добавка v, обращающаяся в нуль при $\varepsilon = 0$, выбираются такими, чтобы выполнялись условия

$$a(\psi_0, a_0, v, \varepsilon) = a_0 + v = a(\psi_0 + 2\pi, a_0, v, \varepsilon) \tag{1.8}$$

Равенства (1.8) — необходимые и достаточные условия периодичности решения $a(\psi, a_0, v, \varepsilon)$ системы (1.3). Отметим, что начальное значение ψ_0 может быть выбрано произвольным. Далее, выражение для искомой функции

$$(1.9)\qquad a(\psi, a_0, v, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}(\psi, a_0)\,\varepsilon^i v^j, \qquad a_{00}(\psi, a_0) = a_0 = \mathrm{const}$$

подставляется в систему (1.3). С учетом (1.8) путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях $\varepsilon^i v^j$ на основании теорем Вейерштрасса о неявных функциях [13] получается выражение для неизвестной малой добавки $v = v(\varepsilon)$. Отметим, что v — вектор; поэтому выражение (1.9) понимается в следующем смысле:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}v^j = \sum_{j_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{j_n=0}^{\infty} a_{ij_1\ldots j_n} v_1^{j_1} \cdots v_n^{j_n}$$

где n — размерность вектора a. В результате выражения для $v(\varepsilon)$ и решения (1.9) определяются в виде рядов по целым или дробным степеням параметра ε.

Вопросы обоснования схемы построения решений в работе не рассматриваются.

2. Основные результаты. Как показано в [4], при условии

$$(2.1)\qquad \frac{1}{\omega(a_0)} \det\left(\frac{\partial R_1(a_0)}{\partial a_0}\right)\Big|_{a_0^*} \neq 0$$

где a_0^* — вещественный корень векторного уравнения

$$(2.2)\qquad R_1(a_0) \equiv \frac{1}{\omega(a_0)} \int_0^{2\pi} f(a_0, \psi, 0)\, d\psi = 0$$

периодическое решение системы (1.3) существует и единственно. Оно может быть построено в виде рядов или последовательными приближениями по целым степеням ε. Достаточное условие устойчивости состоит в том, чтобы корни характеристического уравнения первого приближения

$$(2.3)\qquad \det(\varepsilon(\partial R_1 / \partial a_0)^* - I\lambda) = 0$$

имели отрицательные действительные части.

Случаи, когда $\det(\partial R_1 / \partial a_0)^* = 0$, назовем особыми или критическими. Их полное исследование весьма затруднено, особенно для $n > 1$.

1°. Пусть a — скаляр, a_0^* — двукратный вещественный корень уравнения (2.2), принадлежащий рассматриваемой области. В этом случае искомое периодическое решение представляется рядом

$$(2.4)\qquad a(\psi, a_0, \varepsilon) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \delta^i a_i(\psi, a_0), \qquad \delta = \sqrt{\varepsilon}$$

Здесь a_i — неизвестные периодические коэффициенты, определяемые подстановкой (2.4) в (1.3) и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях δ. Эта процедура приводит к зацепляющейся последовательности явно интегрируемых уравнений и, в частности

$$(2.5)\qquad a_1 = \mathrm{const}; \quad a_2 = a_{20} + (\omega)_0^{-1} \int_0^{\psi} (f)_0\, d\psi, \quad a_{20} = \mathrm{const}.$$

Здесь постоянные интегрирования $a_1, a_{20}, \ldots$ определяются из условий периодичности последующих коэффициентов ряда, начиная с a_4. Для a_1 получается уравнение

$$\frac{a_1^2}{2}\left(\frac{d^2R_1}{da_0^2}\right)^* = (\omega)_0^{-2}\int_0^{2\pi}\left[(f)_0(F)_0-(\omega)_0\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)_0\right]d\psi \equiv L(a_0^*) \tag{2.6}$$

Здесь и далее выражения типа (f_0) означают, что аргументы $a = a_0^*$, $\varepsilon = 0$. Уравнение (2.6) допускает вещественные корни при $L\,(d^2R_1\,/\,da_0^2)^* \geqslant 0$. Пусть имеет место строгое неравенство. Тогда следующие соотношения для определения неизвестных постоянных a_{i0} $(i \geqslant 2)$ будут уже линейными с множителем $a^*_1\,(d^2R_1\,/\,da_0^2)\,^*$. В частности, для $i = 2$

$$\begin{aligned}
a_{20}^* = &-\left[a_1^*\left(\frac{d^2R_1}{da_0^2}\right)^*\right]^{-1} a_1^*\int_0^{2\pi}\left\{\left[-(f)_0\frac{(\omega'')_0}{(\omega)_0^2}+2(f)_0\frac{(\omega')_0^2}{(\omega)_0^3}-\right.\right.\\
&\left.-2\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)_0\frac{(\omega')_0}{(\omega)_0^2}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}\right)_0\frac{1}{(\omega)_0}\right]c(\psi)+a_1^{*2}\left[(f)_0\frac{(\omega'')_0(\omega')_0}{(\omega)_0^3}-\right.\\
&-(f)_0\frac{(\omega''')_0}{6(\omega)_0^2}-(f)_0\frac{(\omega')_0^3}{(\omega)_0^4}-\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)_0\left(\frac{(\omega'')_0}{2(\omega)_0^2}-\frac{(\omega')_0^2}{(\omega)_0^3}\right)-\\
&\left.-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}\right)_0\frac{(\omega')_0}{2(\omega)_0^2}+\left(\frac{\partial^3 f}{\partial a^3}\right)_0\frac{1}{6(\omega)_0}\right]-\left(\frac{\partial F}{\partial a}\right)_0\frac{(f)_0}{(\omega)_0^2}+\\
&+(F)_0(f)_0\frac{(\omega')_0}{(\omega)_0^3}-\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)_0\frac{(F)_0}{(\omega)_0^2}-\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)_0\frac{(\omega')_0}{(\omega)_0^2}+\\
&\left.+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial \varepsilon}\right)_0\frac{1}{(\omega)_0}\right\}d\psi, \qquad c(\psi)=(\omega)_0^{-1}\int_0^{\psi}(f)_0\,d\varphi
\end{aligned}$$

Выражения для следующих коэффициентов здесь не приводятся ввиду их громоздкости. Дальнейший анализ показывает, что фазовая траектория расщепляется на величину $O\,(\delta)$

$$a(\psi,\ a_0^*,\ \varepsilon) = a_0^* + \sum_{i=1}^{\infty}(\pm\delta)^i a_i(\psi,\ a_0^*)$$

Если $L\,(a_0^*) = 0$, то все нечетные коэффициенты a_1, $a_3\,(\psi), \ldots$ обращаются в нуль и разложение происходит по целым степеням параметра ε. Однако и в этом случае возникают дополнительные условия существования периодического решения, причем расщепление происходит на величину $O\,(\varepsilon)$, т. е. единственности возмущенного решения в известном смысле нет [1].

Аналогично при помощи подхода Пуанкаре могут быть получены достаточные условия существования периодического решения для случая произвольной кратности r. Утверждается, что разложения могут проводиться по различным дробным степеням параметра ε, т. е. по степеням $\delta_i\,(r) = \varepsilon^{1/r_i}$, где r_i — целое. При этом имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{k} r_i \leqslant r$$

где k — число различных разложений.

Исходя из (1.7), вычислим приближенно характеристический показатель λ в рассмотренном случае $r = 2$ и $L(a_0^*) \neq 0$, т. е. $a_1^* \neq 0$

$$\lambda = \frac{\varepsilon^{3/2}}{2\pi} a_1^* \left(\frac{d^2 R_1}{da_0^2}\right)^* + O(\varepsilon^2)$$

Отсюда следует, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ одна из ветвей решения устойчива, а другая неустойчива по Ляпунову. Для скалярной переменной a исследование устойчивости проводится аналогично в случае корня a_0^* произвольной кратности r.

2°. Рассмотрим теперь простой случай движений высших степеней. Пусть a — вектор, а система (2.2) удовлетворяется тождественно, т. е. независимо от a_0. Тогда при помощи изложенного метода для a_0 получаем следующую определяющую систему уравнений:

$$(2.7)\qquad R_2(a_0) \equiv (\omega)_0^{-2} \int_0^{2\pi} \left\{(\omega)_0 \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)_0 c(\psi, a_0)\right] - \right.$$
$$\left. - (f)_0 [(\omega)_0' c(\psi, a_0) + (F)_0]\right\} d\psi = 0$$

Если a_0^* — простой вещественный корень системы (2.7), т. е. $\det(\partial R_2 / \partial a_0)^* \neq 0$, то при достаточно малых значениях ε система (1.3) допускает единственное периодическое решение, обращающееся в a_0^* при $\varepsilon = 0$, которое может быть построено в виде ряда или последовательными приближениями по целым степеням параметра. В случае, когда a — скаляр, для кратного вещественного корня a_0^* уравнения (2.7) построение периодического решения может быть осуществлено способом, аналогичным рассмотренному выше в п. 1°. Ввиду громоздкости соответствующие выкладки не приводятся.

Вообще, исследование движений произвольной степени s ($s = 1, 2, \ldots$) приводит к следующей определяющей системе:

$$(2.8)\qquad R_1(a_0) = R_2(a_0) = \ldots = R_{s-1}(a_0) \equiv 0$$
$$R_s(a_0) \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{1-s} \int_0^{2\pi} \{f(a, \psi, \varepsilon) / [\omega(a) + \varepsilon F(a, \psi, \varepsilon)]\} d\psi = 0$$

которая, по предположению, удовлетворяется не тождественно относительно a_0. Здесь в последнюю систему для a подставляется выражение в виде ряда по целым степеням ε, коэффициенты которого определяются явно из соответствующих уравнений [1, 12]. Это простой случай движений высших степеней. Если система (2.8) допускает вещественный корень a_0^*, то аналогично изложенному выше могут быть построены простые и кратные решения высших степеней.

Отметим, что большой интерес представляет более общая задача построения периодического решения, когда система (2.8) такова, что $\operatorname{rang}(\partial R_s / \partial a_0)^*$ меньше n-размерности вектора a. Принципиально проблема может быть решена методом Пуанкаре, однако практическое, конструктивное построение решения в общем случае сопряжено с трудностями выбора разложения.

Устойчивость по Ляпунову простых решений высших степеней определяется знаком вещественных частей корней характеристического уравнения, найденного с соответствующей точностью: $\det\,[(\partial R_s\,/\,\partial a_0)^* - I\lambda] = 0$. Если a — скаляр, то периодическая траектория асимптотически устойчива, а решение системы (1.2) орбитально устойчиво, если выполняется неравенство

$$\int_0^{2\pi} (\omega + \varepsilon F)^{-2} \left[\frac{\partial f}{\partial a}(\omega + \varepsilon F) - f\left(\omega' + \varepsilon \frac{\partial F}{\partial a}\right)\right] d\psi < 0$$

и $\varepsilon > 0$ достаточно мало.

3. Исследование автовращательных движений. Рассмотрим автовращения системы с одной степенью свободы, близкой к консервативной, являющейся частным случаем (1.1) [5]

$$x^{\cdot\cdot} + Q(x) = \varepsilon q(x, x^{\cdot}, \varepsilon) \tag{3.1}$$

Здесь x — обобщенная координата, $x^{\cdot}$ — скорость; предполагается, что функции Q и q периодичны по x с постоянным периодом 2π, причем «потенциальная энергия» системы

$$U(x) = \int_0^x Q(\varphi)\, d\varphi$$

также является периодической функцией. В частности, если $Q(x) = \nu^2 \sin x$ ($\nu = \text{const}$), то это — система типа «маятника».

Будем рассматривать далее только вращательные движения системы (3.1), т. е. движения, для которых $x^{\cdot} \geqslant \alpha > 0$ или $x^{\cdot} \leqslant \alpha < 0$. На основании знакоопределенности фазовой траектории $x^{\cdot} = y(x, \varepsilon)$ может быть построено вращательное решение системы (3.1) при помощи методики, развитой в [5]. Период такого движения находится квадратурой

$$T(\varepsilon) \equiv \frac{2\pi}{\omega} = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{|y(x, \varepsilon)|} \tag{3.2}$$

а максимум и минимум скорости достигаются периодически для значений x, определяемых из уравнения $Q(x) = \varepsilon q(x, y(x, \varepsilon), \varepsilon)$.

Для построения искомой фазовой траектории $y(x, \varepsilon)$ воспользуемся интегральным уравнением (3.3) и необходимым и достаточным условием периодичности y (3.4)

$$\frac{y^2}{2} + U(x) = \varepsilon \int_0^x q(\varphi, y, \varepsilon)\, d\varphi + E_0 + v \tag{3.3}$$

$$\int_0^{2\pi} q(x, y, \varepsilon)\, dx = 0 \tag{3.4}$$

Здесь $E_0 = \text{const}$ — невозмущенная энергия системы; $v = \text{const}$, причем $v = 0$ при $\varepsilon = 0$. Согласно методу Пуанкаре

$$(3.5)\qquad y = y(x, E_0, v, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^i v^j y_{ij}(x, E_0),$$

$$y_{00} \equiv y_0 = \pm\sqrt{2}\,[E_0 - U(x)]^{1/2}$$

Подставляя разложение (3.5) в (3.3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon^i v^j$, находим искомые функции $y_{ij}(x, E_0)$. Подставляя найденное выражение $y(x, E_0, v, \varepsilon)$ в (3.4), определяем неизвестный параметр E_0 и $v = v(\varepsilon)$. При $\varepsilon = 0$ получим $v(0) = 0$, а невозмущенная энергия должна удовлетворять уравнению

$$(3.6)\qquad R_1(E_0) \equiv \int_0^{2\pi} q(x, y_0(x, E_0), 0) \equiv r(2\pi, E_0) = 0$$

Случай, когда $E_0{}^*$ — простой вещественный корень (3.6), удовлетворяющий условию вращательности: $E_0{}^* > \max U(x)$ по $x \in [0, 2\pi)$, исследован в [5]. Рассмотрим критические случаи.

1°. *Построение фазовых траекторий в случае кратных корней.* Пусть $E_0{}^*$ — допустимый двукратный корень уравнения (3.6). Тогда периодическое решение уравнения (3.3) представляется рядами

$$(3.7)\qquad y = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i y_i(x, E_0{}^*), \quad v = \sum_{i=1}^{\infty} \delta^i v_i$$

Здесь $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, а для коэффициентов рядов получим, в частности, $y_1 = v_1 / y_0$, где $v_1 = \pm\sqrt{b_1 / a}$, $a = (d^2R_1 / dE_0{}^2)$ *

$$b_1 = \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)_0 y_0^{-1} r(x) + \left(\frac{\partial q}{\partial \varepsilon}\right)_0\right] dx$$

Здесь и далее зависимость r от известного числа $E_0{}^*$ не указывается. Предположим, что $b_1 / a > 0$. Тогда все последующие коэффициенты v_i $(i \geqslant 2)$ определяются из линейных уравнений вида $av_i = b_i$, где b_i — некоторые известные постоянные. Например

$$b_2 = \int_0^{2\pi} \left\{\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)_0 y_0^{-1}\left[\int_0^x \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)_0 y_0^{-1} d\varphi - \left(r(x) - \frac{v_1^2}{2} y_0^{-2}\right) y_0^{-2}\right] + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}\right)_0 \left(r(x) - \frac{v_1^2}{2} y_0^{-2}\right) y_0^{-2} + \left(\frac{\partial^2 q}{\partial y\, \partial \varepsilon}\right)_0 y_0^{-1}\right\} dx$$

Аналогично вычисляются коэффициенты для $i > 2$. Таким образом, если $E_0{}^*$ — двукратный корень, то при $b_1 / a > 0$ фазовая траектория расщепляется на величину порядка δ

$$y(x, \varepsilon) = y_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (\pm\delta)^i y_i(x), \quad \delta = \sqrt{\varepsilon}$$

причем единственности в общепринятом смысле нет [1].

Если $b_1(E_0^*) = 0$, то все $y_{2j-1}(x) \equiv 0$, $v_{2j-1} = 0$ ($j = 1, 2, \ldots$). Тогда, как и в п. 2, разложение проводится по целым степеням ε. Для определения коэффициента v_2 разложения (3.7) получается квадратное уравнение

$$a v_2^2 + b v_2 + c = 0, \quad b = 2(db_1 / dE_0)^*$$

$$c = \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{\partial^2 q}{\partial y \partial \varepsilon} \right)_0 y_0^{-1} r(x) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \right)_0 r^2(x) y_0^{-2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 q}{\partial \varepsilon^2} \right)_0 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial q}{\partial y} \right)_0 \left[\frac{1}{2} r(x) y_0^{-3} - y_0^{-1} \int_0^x \left(\left(\frac{\partial q}{\partial y} \right)_0 y_0^{-1} r(\varphi) + \left(\frac{\partial q}{\partial \varepsilon} \right)_0 \right) d\varphi \right] \right\} dx$$

Условие разрешимости его имеет вид $b^2 - 4ac \geqslant 0$; если имеет место строгое неравенство, то определяющие уравнения для последующих коэффициентов v_{2j} ($j \geqslant 2$) будут линейными вида $a v_{2j} = c_j$. Дальнейшее исследование проводится аналогично. Расщепление в рассмотренном случае происходит на величину порядка $\delta^2 = \varepsilon$, но единственности также нет.

Рассмотрим кратко случай трехкратного корня. Выясним условия, когда разложения имеют вид рядов (3.7), где $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$. Поставляя (3.7) и приравнивая коэффициенты, получим, в частности, $y_1 = v_1 / y_0$, где v_1 — вещественный корень уравнения: $6d\, v_1^3 + b_1 = 0$, где $d = (d^3 R_1 / dE_0^3)^*$. При $b_1(E_0^*) \neq 0$ последующие коэффициенты определяются из линейных уравнений вида: $dv_i + g_i = 0$ ($i \geqslant 2$), где g_i находятся последовательно, например

$$g_2 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^4 q}{\partial y^4} \right)_0 v_1^3 y_0^{-4} + 4 \left(\frac{\partial^2 q}{\partial y \partial \varepsilon} \right)_0 y_0^{-1} + \left(\frac{\partial^3 q}{\partial y^3} \right)_0 v_1^2 y_0^{-5} + \right.$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \right)_0 \left[4 y_0^{-2} r(x) - \frac{v_1^3}{2} y_0^{-6} \right] + 4 \left(\frac{\partial q}{\partial y} \right)_0 \left[y_0^{-1} \int_0^x \left(\frac{\partial q}{\partial y} \right)_0 y_0^{-1} d\varphi + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{v_1^3}{4} y_0^{-7} + y_0^{-1} r(x) + \frac{v_1^2}{2} y_0^{-5} \right] \right\} dx$$

Функции $y_i(x)$ последовательно определяются из (3.3); в частности

$$y_2 = (v_2 - y_1^2 / 2) y_0^{-1}, \quad y_3 = [r(x) + v_3 - y_1 y_2] y_0^{-1}$$

В случае $b_1^* = 0$ разложения могут проводиться как по степеням ε, так и $\sqrt{\varepsilon}$. Основной вывод исследования состоит в том, что кратные корни могут приводить к расщеплению фазовых траекторий и решений.

2°. *Исследование автовращений высших степеней.* Пусть имеет место критический случай, когда определяющее уравнение (3.6) удовлетворяется тождественно, т. е. независимо от E_0. Тогда на основании метода Пуанкаре, исходя из представлений (3.5) и уравнений (3.3), (3.4), получим следующее определяющее E_0 уравнение:

$$R_2(E_0) \equiv \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial q}{\partial y} \right)_0 y_0^{-1} r(x, E_0) + \left(\frac{\partial q}{\partial \varepsilon} \right)_0 \right] dx = 0$$

Если E_0^* — простой вещественный корень, удовлетворяющий условию вращательности, то периодическая фазовая траектория определяется единственным образом в виде ряда по целым степеням ε. Действительно, так как $d^k R_1 / dE_0{}^k = 0$ при любом E_0, получим линейные уравнения относительно неизвестных v_i ($i = 1, 2, \ldots$), определяемых, как и y_i, последовательно: $\alpha v_i + \beta_i = 0$, $\alpha = (dR_2 / dE_0)^* \neq 0$; в частности

$$\beta_1 = \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)_0 \left[-y_0^{-1} \int_0^x \left(\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)_0 y_0^{-1} r(\varphi) + \left(\frac{\partial q}{\partial \varepsilon}\right)_0 \right) d\varphi + \frac{1}{2} y_1^{-3} r^2(x) \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}\right)_0 y_0^{-2} r^2(x) + \left(\frac{\partial^2 q}{\partial y \partial \varepsilon}\right)_0 y_0^{-1} r(x) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 q}{\partial \varepsilon^2}\right)_0 \right\} dx = c$$

Если имеют место тождества $R_1 \equiv 0$, $R_2 \equiv 0$, но $R_3(E_0) = \beta_1(E_0) \not\equiv \not\equiv 0$, то вопрос существования и единственности искомой фазовой траектории определяется свойствами корней уравнения $\beta_1(E_0) = 0$. Этот случай исследуется аналогично изложенному. И вообще, исследование фазовых траекторий и движений произвольной степени s приводит к определяющей системе уравнений типа (2.8), где

$$R_s(E_0) \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{1-s} \int_0^{2\pi} q(x, y, \varepsilon)\, dx = 0$$

причем это уравнение понимается в определенном в п. 2 смысле.

Если $E_0{}^*$ — кратный корень, то кратные автовращения высших степеней исследуются аналогично случаю кратных корней для автовращений первой степени.

Устойчивость по Ляпунову фазовых траекторий при $\varepsilon > 0$ достаточно мал м определяется неравенством

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial q}{\partial y} dx < 0$$

Например, в случае простых автовращений высших степеней достаточным условием орбитальной устойчивости является выполнение неравенства $(dR_s / dE_0)^* < 0$. Аналогично п. 3 исследуется устойчивость в случае кратных корней.

В заключение отметим, что на основании известной фазовой траектории исследовательными приближениями или разложением в ряды по степеням δ может быть построено вращательное решение уравнения (3.1), вычислен период (3.2) и другие параметры установившегося движения [5].

Поступила 29 X 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
3. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. Изд-во МГУ, 1971.
4. *Акуленко Л. Д.* Стационарные движения в автономных системах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1968, т. 8, № 4.
5. *Акуленко Л. Д.* Исследование автовращательных движений некоторых систем с одной степенью свободы, близких к консервативным. Вестн. МГУ, Сер. физ., астрон., 1969, вып. 3.

6. *Акуленко Л. Д.* О резонансных колебательных и вращательных движениях. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.
7. *Кац А. М.* Вынужденные колебания нелинейных систем с одной степенью свободы, близких к консервативным. ПММ, 1955, т. 19, вып. 1.
8. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., «Наука», 1969.
9. *Акуленко Л. Д.* О резонансных движениях в существенно нелинейной системе с одной степенью свободы в критическом случае. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, т. 7, № 6.
10. *Акуленко Л. Д., Волосов В. М.* Резонансные вращения высших степеней. Вестн. МГУ, Сер. матем., механ., 1967, вып. 2.
11. *Проскуряков А. П.* Периодические решения квазилинейных автономных систем с одной степенью свободы в виде рядов по целым и дробным степеням параметра. Тр. междунар. симпозиума по нелинейным колебаниям, т. 1. Киев, Изд-во АН УССР, 1963.
12. *Акуленко Л. Д.* Исследование установившихся движений в возмущенных автономных системах с одной степенью свободы. Вестн. МГУ, Сер. физ., астрон., 1969, вып. 3.
13. *Еругин Н. П.* Неявные функции. Изд-во ЛГУ, 1956.