

## ОПТИМАЛЬНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ МАЯТНИКА

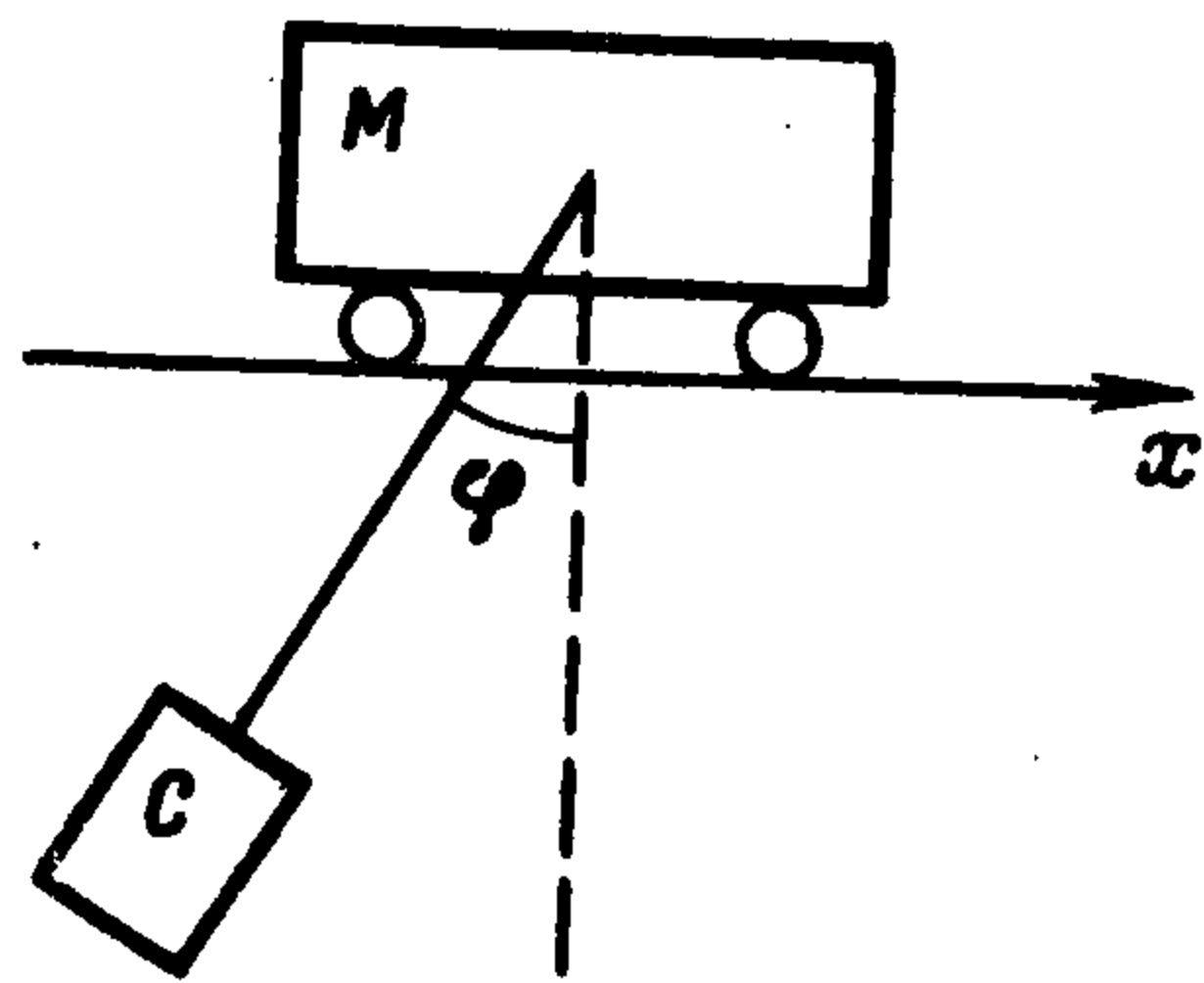
Ф. Л. Черноусько

(Москва)

Рассматривается управляемая механическая система в виде висящего груза (маятника), точка подвеса которого может двигаться по горизонтальной прямой со скоростью, ограниченной по величине. Построен оптимальный закон движения точки подвеса, при котором маятник перемещается на заданное расстояние за кратчайшее время, причем в начале и в конце движения маятник покоится, т. е. происходит гашение колебаний.

Рассматриваемая задача поставлена в связи с исследованием оптимальных режимов работы широко распространенных подъемно-транспортных машин типа мостовых кранов. Ранее подобные задачи в других постановках рассматривались, например, в работах [1-3]. Ограничение по скорости движения точки подвеса, принятое в данной работе, отвечает реальным характеристикам двигателя и приводит к ограничению на фазовые координаты.

1. Постановка задачи. Рассматриваемая механическая система представляет собой физический маятник, точка подвеса  $M$  которого может двигаться вдоль горизонтальной прямой  $Ox$  (фиг. 1). Обозначим через  $\varphi$  угол отклонения центра инерции груза  $C$  от вертикали, через  $x$  — координату



Фиг. 1

точки подвеса по оси  $x$ , отсчитанную от начального положения  $0$ , через  $g$  — ускорение силы тяжести, через  $m$  — массу груза, через  $I$  — его момент инерции относительно точки подвеса, через  $L$  — расстояние  $MC$  от точки подвеса до центра инерции. Считая колебания маятника малыми, запишем линейное уравнение колебаний под действием сил тяжести и сил инерции

(1.1)

$$I\varphi'' = -mgL\varphi + mLw$$

Точки означают производные по времени  $t$ , а  $w$  — ускорение точки подвеса. Скорость  $v$  точки подвеса по условию считаем ограниченной по величине постоянной  $v_0$ . Поэтому имеем соотношения

$$(1.2) \quad x' = v, \quad v' = w, \quad |v| \leq v_0$$

Движение системы начинается из покоя в момент  $t = 0$  и заканчивается в некоторый момент  $t = T$ , причем система снова покоится. Обозначая через  $a$  перемещение груза, запишем эти условия в виде

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \varphi(0) = \varphi'(0) = x(0) = v(0) = 0 \\ \varphi(T) = \varphi'(T) = v(T) = 0, \quad x(T) = a \end{aligned}$$

Направление оси  $x$  выбрано так, что  $a \geq 0$ . Соотношения (1.1) — (1.3) определяют уравнения движения системы, граничные условия и ограничения.

Уравнения (1.1) справедливы, если колебания малы, а связь груза с подвесом является удерживающей. Покажем, что и в случае недерживающей связи типа нити допущение малости колебаний позволяет применять рассматриваемую модель.

Величины  $F$ , период колебаний  $T_0$ , амплитуда колебаний  $\varphi_0$  по порядку величины соответственно равны  $mL^2$ ,  $L^{1/2}g^{-1/2}$ ,  $v_0g^{-1/2}L^{-1/2}$ . Условие малости колебаний имеет вид  $\varphi_0 \ll 1$ . В случае недерживающей связи груз может сходить со связи, в частности, при мгновенном изменении скорости подвеса, а при выходе на связь будет иметь место удар. Нетрудно показать, что время от момента схода до момента выхода на связь в случае малых колебаний по порядку величины составит

$$t_0 \sim v_0\varphi_0g^{-1} \sim T_0\varphi_0^2 \ll T_0$$

Таким образом, при условии малости колебаний  $\varphi_0 \sim v_0g^{-1/2}L^{-1/2} \ll 1$  движение в случае недерживающей связи будет с высокой степенью точности близко к движению при удерживающей связи.

Перейдем к безразмерным переменным, выбрав в качестве единицы скорости  $v_0$ , а в качестве единицы времени — величину  $T_0 = I^{1/2}(mgL)^{-1/2}$ , обратную частоте свободных колебаний маятника. Сделаем в (1.1) — (1.3) следующую замену:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} t &= T_0t', & x &= v_0T_0x', & v &= v_0v', & w &= v_0T_0^{-1}w' \\ \varphi &= v_0T_0^{-1}g^{-1}\varphi', & T &= T_0T', & a &= v_0T_0a' \quad (T_0 = I^{1/2}(mgL)^{-1/2}) \end{aligned}$$

В дальнейшем все рассмотрение проводится в безразмерных переменных, однако штрихи для удобства записи опускаем. Соотношения (1.1), (1.2) после замены (1.4) примут вид

$$(1.5) \quad \varphi'' + \varphi = w, \quad x' = v, \quad v' = w, \quad |v| \leq 1$$

а соотношения (1.3) не изменятся.

1) *Задача оптимального быстрогодействия.* Пусть расстояние  $a > 0$  фиксировано. Требуется найти закон изменения  $w(t)$  и соответствующий ему  $v(t)$  так, чтобы удовлетворялись все соотношения (1.3), (1.5) и время движения  $T$  было минимальным.

2) *Задача о максимальном перемещении.* Пусть время движения  $T$  фиксировано. Требуется найти законы  $w(t)$ ,  $v(t)$  так, чтобы удовлетворялись все соотношения (1.3), (1.5) и путь  $a$ , пройденный маятником, был максимальным.

Задачи 1, 2, очевидно, связаны между собой следующим образом. Если в результате решения задачи 2 полученная зависимость максимального пути от времени  $a(T)$  будет монотонно возрастающей (а это окажется именно так), то решение задачи 1 для некоторого  $a = a_*$  будет совпадать с решением задачи 2 для  $T = T_*$ , определяемого из соотношения  $a(T_*) = a_*$ . Поэтому ниже будет сначала решаться задача 2.

2. *Интегрирование уравнений.* Проинтегрируем первые два уравнения (1.5), считая  $v(t)$ ,  $w(t)$  заданными функциями и удовлетворяя начальным условиям (1.3) при  $t = 0$ . Подставим полученный результат в граничные

условия (1.3) при  $t = T$

$$(2.1) \quad \int_0^T w(\xi) \sin(\xi - T) d\xi = 0, \quad \int_0^T w(\xi) \cos(\xi - T) d\xi = 0,$$

$$\int_0^T v(\xi) d\xi = a$$

Для решения задачи 2 нужно найти такие функции  $v(t)$ ,  $w(t)$ , связанные уравнением  $v' = w$ , чтобы удовлетворялись соотношения (2.1), условия  $v(T) = v(0) = 0$  и ограничение  $|v(t)| \leq 1$  при всех  $0 \leq t \leq T$  и чтобы функционал  $a$ , определяемый равенством (2.1), был максимальным. Все перечисленные уравнения, неравенства и функционал линейны по  $v$ ,  $w$ . Следовательно, решение задачи реализуется на ограничениях, т. е.  $|v(t)| = 1$  при почти всех  $t$  в интервале  $[0, T]$ .

Поэтому будем искать скорость  $v(t)$  в виде кусочно-постоянной функции, принимающей значения  $\pm 1$ . Обозначим через  $n$  число ненулевых интервалов постоянства  $v(t)$ , через  $t_i$  — длину  $i$ -го интервала, через  $u$  — значение  $v(t)$  на первом интервале. Таким образом, для скорости и ускорения  $w = v'$  имеем

$$(2.2) \quad v(0) = v(T) = 0, \quad u = \pm 1$$

$$v(t) = u(-1)^{i+1}, \quad \sum_{j=1}^{i-1} t_j < t < \sum_{j=1}^i t_j, \quad i = 1, \dots, n$$

$$w(t) = u \left[ \delta(t) - 2 \sum_{i=2}^n (-1)^i \delta \left( t - \sum_{j=1}^{i-1} t_j \right) + (-1)^n \delta(t - T) \right]$$

Через  $\delta$  обозначена дельта-функция. Величины  $t_i$  удовлетворяют условиям

$$(2.3) \quad \sum_{i=1}^n t_i = T, \quad t_i > 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Подставляя равенства (2.2) в соотношения (2.1), получим

$$(2.4) \quad \psi_1 \equiv \sin T - 2 \sum_{i=2}^n (-1)^i \sin \left( \sum_{j=i}^n t_j \right) = 0$$

$$\psi_2 \equiv \cos T - 2 \sum_{i=2}^n (-1)^i \cos \left( \sum_{j=i}^n t_j \right) + (-1)^n = 0$$

$$a = u \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} t_i$$

Задача 2 свелась к выбору целого  $n$ , величины  $u = \pm 1$  и чисел  $t_i$ , удовлетворяющих ограничениям (2.3), (2.4) и максимизирующих величину  $a$  из (2.4).

Рассмотрим сначала отдельно простейшие случаи  $n = 1$  и  $n = 2$ .

В случае  $n = 1$  в соотношениях (2.4) нужно опустить суммы по  $i$  и эти соотношения дадут  $\sin T = 0$ ,  $\cos T = 1$ , откуда следует  $T = 2\pi k$ , где  $k$  — целое число. Из соотношения (2.3) получим  $t_1 = T$ , а из выражения (2.4) для  $a$  вытекает, что  $a = T$  при

$u = 1$ . Отметим, что всегда, очевидно,  $a \leq T$ , так как  $|v| \leq 1$ . Таким образом, рассматриваемый режим с  $n = 1$ ,  $t_1 = T$ ,  $u = 1$  является оптимальным для  $T = 2\pi k$  и доставляет функционалу  $a$  абсолютный максимум, равный  $T = 2\pi k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Движение точки подвеса происходит с постоянной скоростью  $v = 1$  при  $0 < t < T$ . На фиг. 2 изображена фазовая траектория маятника в плоскости  $\varphi, \dot{\varphi}$  для  $T = 2\pi$ . Траектория состоит из отрезков  $[0, 1]$  оси  $\dot{\varphi}$ , проходимых в противоположных направлениях в моменты  $t = 0$  и  $t = T$  включения и выключения двигателя, и из единичной окружности, отвечающей движению маятника в силу уравнения (1.5) при  $v = 1$ ,  $w = 0$ . В случае  $T = 2\pi k$  эта окружность описывается  $k$  раз.

В случае  $n = 2$  уравнения (2.4) дают

$$\sin T = 2 \sin t_2, \quad \cos T + 1 = 2 \cos t_2.$$

Возводя оба полученных уравнения в квадрат и складывая их, получим после упрощений  $\cos T = 1$ , т. е.  $T = 2\pi k$ . Так как в случае  $T = 2\pi k$  оптимальное управление в задаче 2 уже найдено, то режимы с  $n = 2$  не будут оптимальными ни при каких  $T$ .

В дальнейшем будем полагать

$$2.5) \quad T = 2\pi k + \tau, \quad 0 < \tau < 2\pi, \quad k = 0, \dots, 1,$$

и рассматривать режимы с  $n > 2$ .

3. Условия оптимальности. При фиксированном  $n > 2$  переменные  $t_i$  изменяются в открытой области (см. (2.3)), поэтому для отыскания максимума  $a$  при ограничениях (2.3), (2.4) составим функцию Лагранжа ( $\lambda, \mu_1, \mu_2$  — множители Лагранжа) и приравняем нулю ее частные производные

$$3.1) \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial t_1} = u + \lambda = 0, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial t_s} = u(-1)^{s+1} + \lambda - 2 \sum_{i=2}^s (-1)^i \times \\ \times \left[ \mu_1 \cos \left( \sum_{j=i}^n t_j \right) - \mu_2 \sin \left( \sum_{j=i}^n t_j \right) \right], \quad s = 2, \dots, n \\ (\Lambda = a + \lambda T + \mu_1 \psi_1 + \mu_2 \psi_2)$$

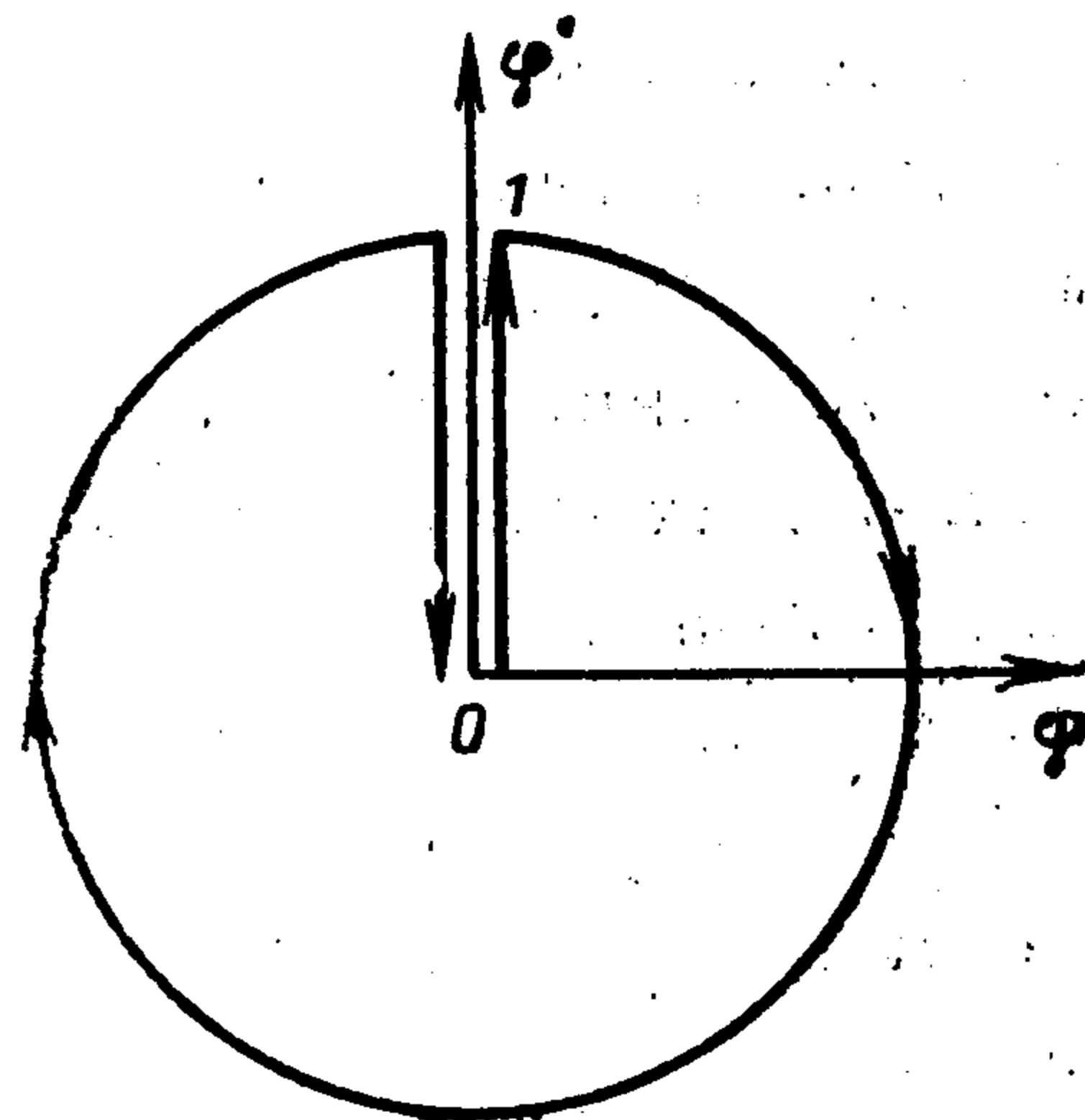
Множители  $\mu_1, \mu_2$  не могут одновременно равняться нулю, ибо при этом система (3.1) не будет удовлетворяться. Поэтому положим  $\mu_1 = \mu \cos \nu$ ,  $\mu_2 = \mu \sin \nu$ , где  $\mu > 0$  и  $\nu$  — новые постоянные. Составляя разности  $\partial \Lambda / \partial t_s - \partial \Lambda / \partial t_{s-1}$ , получим из системы (3.1) после подстановки

$$(3.2) \quad \cos \left( \nu + \sum_{j=s}^n t_j \right) = -\frac{u}{\mu}, \quad s = 2, \dots, n$$

Вычитая из  $s$ -го уравнения  $(s+1)$ -е уравнение системы (3.2), получим

$$(3.3) \quad \sin \frac{t_s}{2} \sin \left( \nu + \frac{t_s}{2} + \sum_{j=s+1}^n t_j \right) = 0, \quad s = 2, \dots, n-1$$

Пусть для некоторого  $s$  имеем  $t_s > 2\pi$ . Тогда положим  $t_s^1 = t_s - 2\pi$ ,  $t_1^1 = t_1 + 2\pi$ , если  $u = 1$ , и  $t_s^1 = t_s - 2\pi$ ,  $t_2^1 = t_2 + 2\pi$ , если  $u = -1$ . Другими словами, интервалы длины  $2\pi$  переносим из  $s$ -го интервала в пер-



Фиг. 2

вый из интервалов, для которых скорость  $v = 1$ . Сделанная замена, как нетрудно видеть, не нарушит условий (2.3), (2.4), а максимизируемая величина  $a$  из (2.4) при этом не уменьшится. Поэтому после проведения указанных преобразований, не нарушая общности, можно полагать

$$(3.4) \quad \begin{aligned} 0 < t_s < 2\pi, \quad t_1 > 0, \quad 2 \leq s \leq n, \quad u = 1 \\ 0 < t_s < 2\pi, \quad t_2 > 0, \quad s \neq 2, \quad 1 \leq s \leq n, \quad u = -1 \end{aligned}$$

Пусть в случае  $n \geq 4$ ,  $u = -1$  оказалось  $t_2 = 2\pi l_2$ , где  $l_2 > 0$  — целое число. Тогда положим  $t_2^1 = 0$ ,  $t_4^1 = t_4 + 2\pi l_2$ , т. е. перенесем интервал  $t_2$  в  $t_4$ . После этого интервал  $t_2$  окажется нулевым, и его можно опустить, объединив интервалы  $t_1$  и  $t_3$  и уменьшив число  $n$  на два. Величины  $T$ ,  $a$  при этих преобразованиях не изменятся. Такие преобразования можно продолжать до тех пор, пока либо  $t_2$  перестанет быть кратным  $2\pi$ , либо окажется  $n < 4$ .

Поэтому равенство  $t_2 = 2\pi l_2$ ,  $l_2 = 1, 2, \dots$  необходимо рассмотреть лишь при  $n = 3$ . В этом случае, подставляя  $t_2 = 2\pi l_2$  в уравнения (2.4), получим

$$\begin{aligned} \sin T - 2 \sin t_3 + 2 \sin t_3 = 0, \quad \cos T - 2 \cos t_3 + \\ + 2 \cos t_3 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Отсюда вытекает  $T = 2\pi k$ , где  $k$  — целое число. Но при  $T = 2\pi k$  оптимальное управление уже найдено. Поэтому равенство  $t_2 = 2\pi l_2$  можно исключить из рассмотрения для всех  $n > 2$  и положить в дополнение к (3.4)

$$(3.5) \quad t_2 = 2\pi l_2 + \tau_2, \quad 0 < \tau_2 < 2\pi, \quad l_2 = 0, 1, \dots, u = -1$$

При условиях (3.4), (3.5) имеем  $\sin(t_s / 2) \neq 0$  при  $s \geq 2$ , и уравнения (3.3) дают

$$(3.6) \quad v + \frac{t_s}{2} + \sum_{j=s+1}^n t_j = l_s \pi, \quad s = 2, \dots, n-1$$

где  $l_s$  — целые числа. Вычитая из  $s$ -го уравнения (3.6)  $(s+1)$ -е, придем к равенствам

$$t_s + t_{s+1} = 2(l_s - l_{s+1})\pi, \quad s = 2, \dots, n-2$$

Отсюда получим, принимая во внимание ограничения (3.4), (3.5) для случаев  $u = 1$  и  $u = -1$

$$(3.7) \quad t_s = t_2, \quad s = 4, 6, 8, \dots; \quad t_s = 2\pi - t_2, \quad s = 3, 5, 7, \dots (s \leq n-1, u = -1)$$

$$(3.8) \quad t_s = \tau_2, \quad s = 4, 6, 8, \dots; \quad t_s = 2\pi - \tau_2, \quad s = 3, 5, 7, \dots (s \leq n-1, u = 1)$$

Заметим, что при преобразованиях от системы (3.1) к системам (3.7), (3.8) число уравнений сократилось от  $n$  до  $n-3$ . Опущенные уравнения могут служить для определения множителей Лагранжа.

Каждая из систем (3.7), (3.8) содержит один неизвестный параметр ( $t_2$  и  $\tau_2$  соответственно) и позволяет выразить через него все  $t_s$ , кроме  $t_1$ ,  $t_n$ . Для определения четырех неизвестных  $t_1$ ,  $t_2$  (или  $\tau_2$ ),  $t_n$ ,  $a$  имеем равенства (2.3), (2.4) и ограничения (3.4), (3.5). Среди всех решений этой системы следует выбрать то, которому соответствует максимальное  $a$ .

Число участков  $n$  и величину  $u = \pm 1$ , от которых решение зависит как от параметра, также следует выбрать так, чтобы  $a$  было максимально. Найденный таким образом режим будет оптимальным.

Будем рассматривать отдельно режимы с четным и с нечетным числом интервалов  $n > 2$ .

**4. Режимы с четным числом интервалов.** Пусть сначала  $n = 2l$ , где  $l > 1$  — целое число. Подставляя в равенства (2.4) выражения (3.7), (3.8) для случаев  $u = 1$  и  $u = -1$ , в обоих случаях придем к уравнениям

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \sin T - 2l \sin t_n + 2(l-1) \sin(t_n - t_2) &= 0 \\ \cos T - 2l \cos t_n + 2(l-1) \cos(t_n - t_2) + 1 &= 0 \end{aligned}$$

В случае  $u = -1$  здесь использовано соотношение (3.5). Перенесем члены с  $\sin t_n$ ,  $\cos t_n$  в правые части уравнений (4.1), затем возведем оба уравнения в квадрат и сложим их. После элементарных преобразований получим

$$\sin^2 T + (\cos T + 1)^2 + 4(l-1)^2 + 8(l-1) \cos \frac{T}{2} \cos(t_n - t_2 - \frac{T}{2}) = 4l^2$$

После упрощения это уравнение примет вид

$$(4.2) \quad \cos(T/2) \cos(t_n - t_2 - T/2) = 1 + (1 - \cos T)/(4l - 4)$$

Левая часть равенства (4.2) не превосходит единицы, а правая — не менее единицы при  $l > 1$ . Поэтому равенство (4.2) возможно лишь в том случае, когда обе его части равны единице. Приравнявая единице правую часть, получим  $\cos T = 1$ ,  $T = 2\pi k$ , где  $k$  — целое число. Но так как в случае  $T = 2\pi k$  оптимальное управление уже найдено и режимы с  $n > 2$  нужно рассматривать лишь при условии (2.5), то приходим к выводу, что режимы с четным  $n$  не будут оптимальными ни при каких  $T$ .

**5. Режимы с нечетным числом интервалов.** Теперь полагаем  $n = 2l + 1$ , где  $l \geq 1$  — целое число. Подставляя условия (3.7), (3.8) в равенства (2.4), получим для обоих случаев  $u = \pm 1$  уравнения

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \sin T &= 2l [\sin(t_2 + t_n) - \sin t_n], \quad \cos T - 1 = \\ &= 2l [\cos(t_2 + t_n) - \cos t_n] \end{aligned}$$

Подставим сюда  $T$  из (2.5) и преобразуем систему (5.1) к виду

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \sin \frac{\tau}{2} \cos \frac{\tau}{2} &= 2l \sin \frac{t_2}{2} \cos(t_n + \frac{t_2}{2}), \\ \sin^2 \frac{\tau}{2} &= 2l \sin \frac{t_2}{2} \sin(t_n + \frac{t_2}{2}) \end{aligned}$$

Так как согласно (3.5)  $\sin(t_2/2) \neq 0$ , то, разделив одно уравнение (5.2) на другое, определим

$$(5.3) \quad t_n + t_2/2 = \tau/2 + \pi r$$

где  $r$  — целое. Подставив (5.3) в систему (5.2), найдем

$$(5.4) \quad \sin \frac{t_2}{2} = \frac{(-1)^r}{2l} \sin \frac{\tau}{2}$$

Введем обозначение

$$(5.5) \quad \alpha_l = \arcsin \left( \frac{1}{2l} \sin \frac{\tau}{2} \right), \quad l \geq 1, \quad 0 < \tau < 2\pi$$

Очевидны следующие неравенства, вытекающие из (5.5):

$$(5.6) \quad 0 < \alpha_l \leq \pi / 6, \quad \alpha_l < \tau / 2, \quad \alpha_l < \pi - \tau / 2$$

Найдем все решения уравнений (5.3), (5.4) сначала для случая  $u = 1$ . В этом случае  $0 < t_2 < 2\pi$ , согласно (3.4), поэтому число  $r$  в равенстве (5.4) должно быть четным. Возможные значения  $t_2$  в интервале  $(0, 2\pi)$  равны

$$(5.7) \quad t_2' = 2\alpha_l, \quad t_2'' = 2(\pi - \alpha_l)$$

где использовано обозначение (5.5). Соответствующие (5.7) значения  $t_n$  лежащие в интервале  $(0, 2\pi)$ , найдем из уравнения (5.3), учитывая четность  $r$  и неравенства (5.6)

$$(5.8) \quad t_n' = \tau / 2 - \alpha_l, \quad t_n'' = \pi + \tau / 2 + \alpha_l$$

В случае  $u = -1$  решение для  $t_2, t_n$  строится аналогично случаю  $u = 1$ , но вместо  $t_2$  будет фигурировать  $\tau_2$ , а вместо целого числа  $r$  — целое число  $r - l_2$ , где величины  $\tau_2, l_2$  введены в соотношении (3.5). Получим аналогично (5.7)

$$(5.9) \quad \tau_2' = 2\alpha_l, \quad \tau_2'' = 2(\pi - \alpha_l)$$

Соответствующие значения  $t_n$  даются по-прежнему формулами (5.8), а  $t_2$  — соотношением (3.5). Таким образом, в каждом случае  $u = 1$  и  $u = -1$  для  $t_2, t_n$  имеем по два решения (5.7) — (5.9), удовлетворяющих условиям (3.4), (3.5).

Перейдем к определению величин  $t_1, a$ . Подставим выражения (3.5), (3.7), (3.8) для  $t_2, t_n$  в соотношения (2.3), (2.4) для  $T, a$ . Получим для  $n = 2l + 1$

$$(5.10) \quad \begin{aligned} t_1 + t_2 + 2(l-1)\pi + t_n &= T \\ a &= t_1 - t_2 + 2(l-1)(\pi - t_2) + t_n \quad (u = 1) \\ t_1 + 2\pi l_2 + \tau_2 + 2(l-1)\pi + t_n &= T \\ a &= 2\pi l_2 + \tau_2 - t_1 - 2(l-1)(\pi - \tau_2) - t_n \quad (u = -1) \end{aligned}$$

Подставляя выражения (2.5), (5.7), (5.8) для  $T, t_2, t_n$  в первое равенство (5.10), найдем  $t_1$  для обоих решений в случае  $u = 1$

$$(5.11) \quad \begin{aligned} t_1' &= 2\pi(k-l+1) + \tau/2 - \alpha_l \quad (u = 1) \\ t_1'' &= 2\pi(k-l+1) + \tau/2 - 3\pi - \alpha_l \end{aligned}$$

Аналогично найдем  $t_1$  для обоих решений в случае  $u = -1$

$$(5.12) \quad \begin{aligned} t_1' &= 2\pi(k-l+1-l_2) + \tau/2 - \alpha_l \quad (u = -1) \\ t_1'' &= 2\pi(k-l+1-l_2) + \tau/2 - 3\pi + \alpha_l \end{aligned}$$

Для того чтобы в случае  $u = -1$  выполнялись условия  $0 < t_1 < 2\pi$  (см. (3.6)), необходимо, с учетом неравенств (5.6), выбрать целое число  $l_2$  так, чтобы (см. (5.8))

$$(5.13) \quad t_1' = t_n', \quad t_1'' = t_n'' \quad (u = -1)$$

Сравнивая (5.12) и (5.13), найдем  $l_2$  для обоих решений

$$(5.14) \quad l_2' = k - l + 1, \quad l_2'' = k - l - 1 \quad (u = -1)$$

Теперь подставим в формулу (5.10) для  $a$  в случае  $u = 1$  выражения (5.11) для  $t_1$ , (5.7) для  $t_2$  и (5.8) для  $t_n$ , а в случае  $u = -1$  — выражения (5.13) для  $t_1$ , (5.9) для  $t_2$ , (5.14) для  $l_2$  и (5.8) для  $t_n$ . Получим четыре выражения для  $a$ , отвечающих наличию пары решений для каждого случая  $u = \pm 1$

$$(5.15) \quad \begin{aligned} a_+' &= T - 4l\alpha_l, & a_+'' &= T - 4l(\pi - \alpha_l) & (u = 1) \\ a_-' &= T - 2\tau + 4\pi - 4l(\pi - \alpha_l) & & & (u = -1) \\ a_-'' &= T - 2\tau - 4\pi - 4l\alpha_l & & & \end{aligned}$$

Здесь  $T$  определено формулой (2.5). Нижний индекс  $\pm$  в формулах (5.15) соответствует знаку величины  $u$ , а штрихи — выбору соответствующего решения в формулах (5.7) — (5.9), (5.11) — (5.14). Целое число  $l$  в формулах (5.15) должно быть выбрано так, чтобы  $a$  было максимально.

Исследуем зависимость  $a$  от  $l$ . Из соотношений (5.5), (5.6) следует, что  $\alpha_l$  убывает с ростом  $l$ , причем  $\alpha_l < \pi$ . Поэтому выражение  $l(\pi - \alpha_l)$  возрастает с ростом  $l$ , а выражения (5.15) для  $a_+''$  и  $a_-'$  монотонно убывают с ростом  $l$ .

Слагаемое  $4l\alpha_l$ , которое входит в равенства (5.15), можно при помощи (5.5) представить в виде

$$4l\alpha_l = 2(\alpha_l / \sin \alpha_l) \sin \tau/2$$

Это выражение, как нетрудно проверить, монотонно возрастает с ростом  $\alpha_l$  при  $0 < \alpha_l < \pi/2$ . Следовательно,  $4l\alpha_l$  монотонно убывает с ростом  $l$ , а выражения (5.15) для  $a_+'$  и  $a_-''$  монотонно возрастают с ростом  $l$ .

Границы изменения  $l$  определяются условиями  $l \geq 1, t_1 > 0$  для  $u = 1$  и условиями  $l \geq 1, l_2 \geq 0$  для случая  $u = -1$ . Отсюда, используя равенства (5.11) и неравенства (5.6) для случая  $u = 1$  и равенства (5.14) для случая  $u = -1$ , найдем границы изменения  $l$  в четырех случаях, соответствующих формулам (5.15). Для  $a_+'$ ,  $a_-'$  в формулах (5.15) получим границы  $1 \leq l \leq k + 1$ , а для остальных двух случаев  $1 \leq l \leq k - 1$ . Последние неравенства непротиворечивы лишь при  $k \geq 2$ , поэтому решения, соответствующие  $a_+''$ ,  $a_-''$ , могут иметь место лишь при  $k \geq 2$ .

Теперь, учитывая свойства монотонности функций (5.15) по  $l$  и границы изменения  $l$ , найдем для каждого из четырех случаев максимум  $a$  по  $l$ . Получим

$$(5.16) \quad \begin{aligned} a_+' &= T - 4(k + 1)\alpha_{k+1}, & l &= k + 1 \\ a_+'' &= T - 4(\pi - \alpha_1), & l &= 1 \quad (k \geq 2) \\ a_-' &= T - 4(\tau/2 - \alpha_1), & l &= 1 \\ a_-'' &= T - 4[\tau/2 + \pi + (k - 1)\alpha_{k-1}], & l &= k - 1 \quad (k \geq 2) \end{aligned}$$

Сравним функционалы (5.16) для четырех полученных режимов. Так как  $a_+'$  из (5.15) монотонно возрастает с ростом  $l$ , то справедливо неравенство

$$(5.17) \quad a_+' \geq T - 4\alpha_1 = a_1$$

где величина  $a_1$  отвечает первому режиму (5.15) при  $l = 1$ . Из неравенства  $\alpha_1 < \pi/2$ , вытекающего из (5.6), и из (5.16), (5.17) сразу следует  $a_+'' < a_1$ .

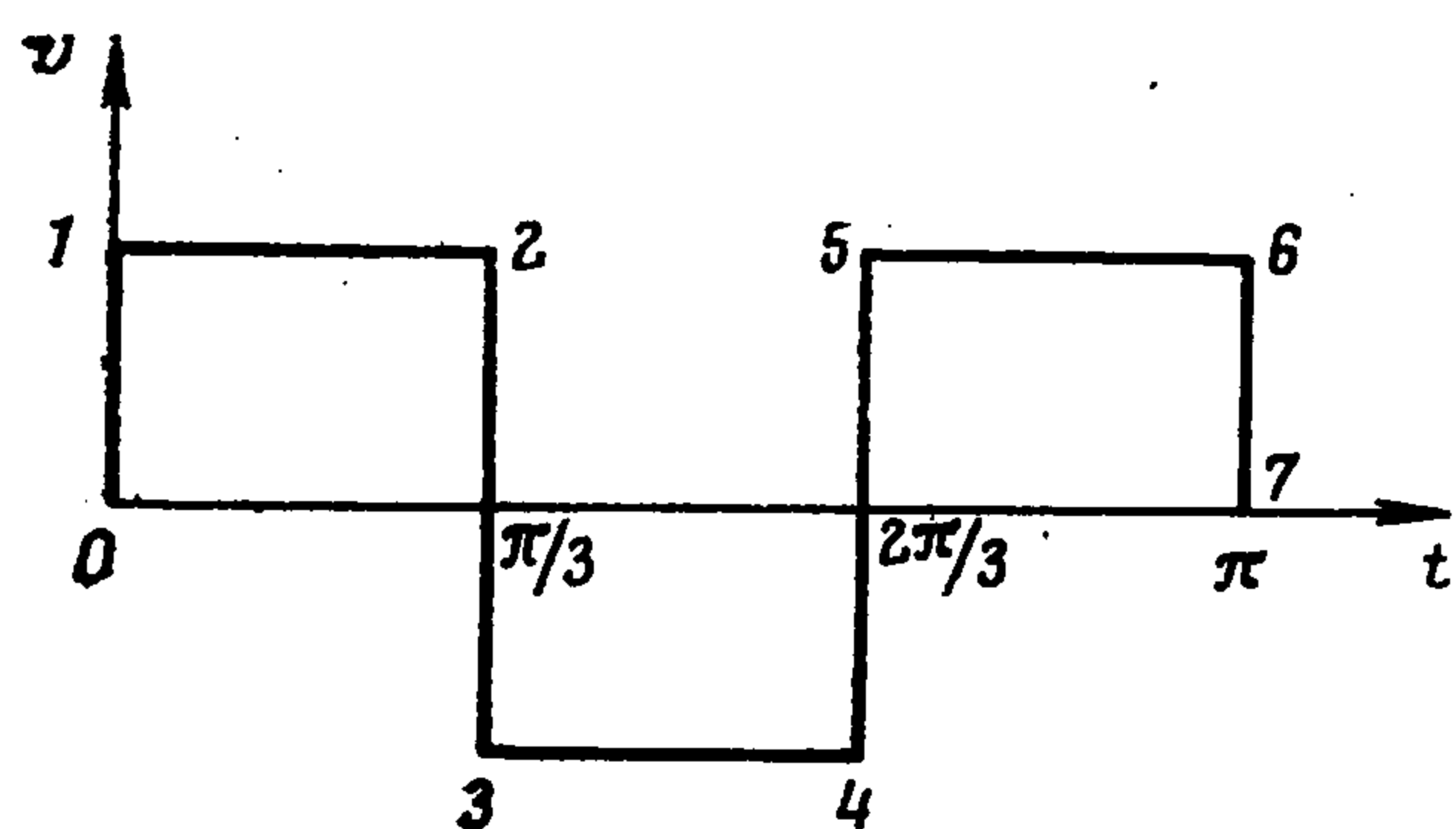
Для оценки  $a_-'$  докажем неравенство  $\alpha_1 < \tau/4$ . Беря синус от обеих частей равенства (5.5), при  $l = 1$  будем иметь

$$\sin \alpha_1 = \frac{1}{2} \sin(\tau/2) = \sin(\tau/4) \cos(\tau/4) < \sin(\tau/4)$$

Так как  $\alpha_1 < \pi/2$ , согласно (5.6), откуда получим  $\alpha_1 < \tau/4$ . Из полученного неравенства следует, что величины  $a_1', a_1''$ , определяемые соотношениями (5.16), (5.17), удовлетворяют неравенству  $a_1'' < a_1$ .

Так как  $k > 1$ ,  $\alpha_{k-1} > 0$ , то из (5.16) вытекает  $a_1'' < a_1'$  и, следовательно,  $a_1'' < a_1$ .

Таким образом, три величины  $a_1'', a_1', a_1''$  в (5.16) строго меньше  $a_1 \ll a_1'$ . Следовательно, оптимальным будет первый режим, отвечающий



Фиг. 3

$u = 1$  и первому решению в формулах (5.7), (5.8), (5.11). Этот режим превосходит по функционалу все остальные даже при не наилучшем выборе  $l = 1$ , которому отвечает значение функционала  $a_1 \ll a_1'$ .

### 6. Анализ оптимальных режимов.

Решение задачи 2 полностью построено и определяется формулами (3.9), (5.7), (5.8), (5.11), (5.16), в которых

нужно брать величины с одним штрихом для  $u = 1$ . Для любого  $T$  в виде (2.6), согласно приведенным формулам, имеем

$$(6.1) \quad \begin{aligned} T &= 2\pi k + \tau, \quad 0 < \tau < 2\pi, \quad l = k + 1 \\ n &= 2l + 1 = 2k + 3, \quad k = 0, 1, \dots \\ t_1 &= t_n = \tau/2 - \alpha_1, \quad t_2 = t_4 = \dots = t_{n-1} = 2\alpha_1 \\ t_3 &= t_5 = \dots = t_{n-2} = 2(\pi - \alpha_1), \quad a = T - 4l\alpha_1 \end{aligned}$$

где  $\alpha_1$  определено равенством (5.5). Наряду с оптимальным решением (6.1), представляет интерес первый режим (5.15) при  $l = 1$ . Как следует из п. 5, этот режим будет наилучшим среди режимов с наименьшим числом интервалов, равным трем. Аналогично соотношениям (6.1) получим для этого режима, полагая  $l = 1$  в соотношениях (5.7), (5.8), (5.11), (5.15)

$$(6.2) \quad \begin{aligned} T &= 2\pi k + \tau, \quad 0 < \tau < 2\pi, \quad k = 0, 1, \dots \\ n &= 3, \quad l = 1, \quad t_1 = 2\pi k + \tau/2 - \alpha_1, \quad t_2 = 2\alpha_1 \\ t_3 &= \tau/2 - \alpha_1, \quad a = a_1 = T - 4\alpha_1 \end{aligned}$$

Режим (6.2) совпадает с оптимальным (6.1) при  $T < 2\pi$ ,  $k = 0$ .

В случае  $T = 2\pi k$ ,  $\tau = 0$  из равенства (5.5) следует  $\alpha_1 = 0$ . Решения (6.1), (6.2) при этом переходят в оптимальное решение с  $n = 1$ , найденное выше, для которого

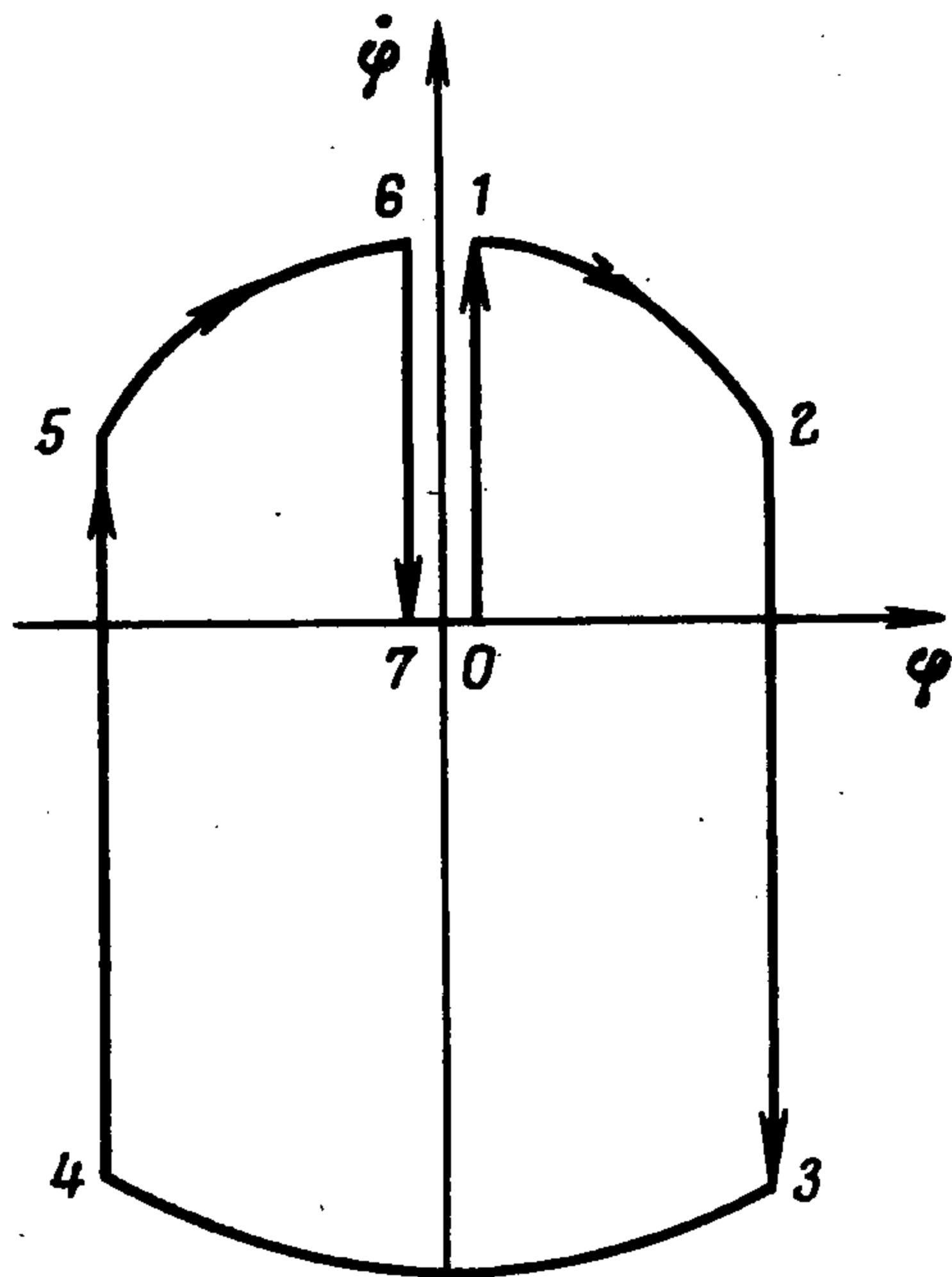
$$(6.3) \quad n = 1, \quad t_1 = T = a = 2\pi k$$

Зависимости  $v(t)$  и  $w(t)$  для найденных режимов задаются общими формулами (2.2), в которые нужно подставить соотношения  $u = 1$ , (6.1) — (6.3).

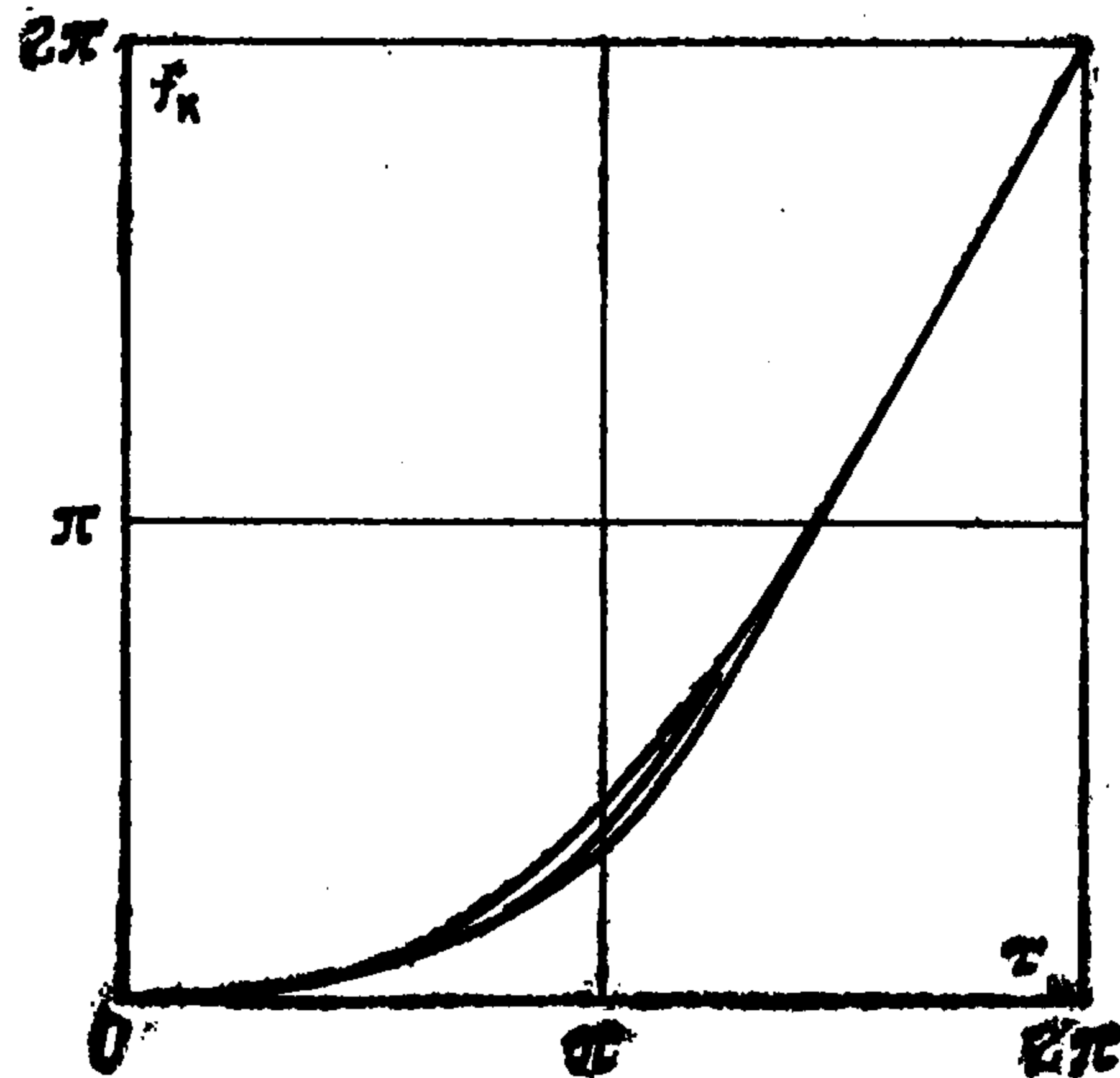
В качестве примера рассмотрим оптимальное движение при  $T = \pi$ . В этом случае режимы (6.1), (6.2) совпадают, и формулы (5.5), (6.1) дают

$$(6.4) \quad \begin{aligned} T &= \tau = \pi, \quad n = 3, \quad l = 1, \quad \alpha_1 = \pi/6 \\ t_1 &= t_2 = t_3 = \pi/3, \quad a = \pi/3 \end{aligned}$$

Зависимость  $v(t)$  для оптимального движения (6.4) приведена на фиг. 3, а фазовая траектория маятника в плоскости  $\varphi, \dot{\varphi}$  для этого случая дана на фиг. 4. Фазовая траектория состоит из четырех вертикальных отрезков, соответствующих точкам переключения, между которыми заключены три дуги окружностей с центром в начале координат, отвечающие участкам постоянной скорости. Цифры от нуля до семи на фиг. 3, 4 указывают соответствующие одна другой точки графиков. Отметим, что центральные углы дуг на фазовой плоскости равны времени движения по дугам. На фиг. 5 все эти углы равны  $\pi/3$ .



Фиг. 4



Фиг. 5

Исследуем зависимости  $a(T)$ ,  $a_1(T)$ , задаваемые равенствами (6.1)–(6.3). Пользуясь обозначением (5.5), эти зависимости представим в виде

$$(6.5) \quad a(T) = 2\pi k + f_k(\tau), \quad T = 2\pi k + \tau, \quad 0 \leq \tau < 2\pi$$

$$a_1(T) = 2\pi k + f_0(\tau), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь

$$(6.6) \quad f_k(\tau) = \tau - 4(k+1)\alpha_{k+1} = \tau - 4(k+1) \arcsin \left[ \frac{\sin(\tau/2)}{2(k+1)} \right]$$

$$0 \leq \tau < 2\pi, \quad k = 0, 1, \dots$$

Графики функций  $a(T)$ ,  $a_1(T)$ , задаваемых формулами (6.5), в точках  $T = 2\pi k$  лежат на прямой  $a = T$ , а в остальных точках имеем  $a_1 \leq a < T$ . Поведение функций  $a(T)$ ,  $a_1(T)$  между точками  $T = 2\pi k$  определяется функциями  $f_k(\tau)$  из (6.6).

Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$(6.7) \quad f_k'(\tau) > 0, \quad f_k''(\tau) > 0, \quad 0 < \tau < 2\pi, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$f_k(\tau) = \frac{\tau^3}{24} \left[ 1 - \frac{1}{4(k+1)^2} \right] + O(\tau^5), \quad \tau \rightarrow 0$$

$$f_k(\tau) = 2\pi + 2(\tau - 2\pi) + O[(\tau - 2\pi)^3], \quad \tau \rightarrow 2\pi$$

где штрихи означают производные по  $\tau$ .

Из результатов п. 5 следует, что  $f_k(\tau)$  при фиксированном  $\tau$  монотонно возрастает с ростом  $k$ . Переходя к пределу при  $k \rightarrow \infty$ , будем иметь

$$f_0(\tau) < f_1(\tau) < \dots < f_\infty(\tau) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\tau) = \tau - 2 \sin \frac{\tau}{2}$$

Зависимости  $f_k(\tau)$  при  $k = 0, 1, \infty$  изображены на фиг. 5, нижняя, средняя и верхняя кривые соответственно.

Разность между  $f_0(\tau)$  и  $f_\infty(\tau)$  очень мала (см. фиг. 5) и не превышает 0.1, а все  $f_k(\tau)$  заключены между  $f_0$  и  $f_\infty$ . Поэтому простой режим (6.2) с тремя участками постоянства скорости весьма близок по функционалу к оптимальному режиму при всех  $T$ .

Перейдем к описанию решения задачи 1 об оптимальном быстродействии. Так как зависимости  $f_k(\tau)$  согласно (6.7) монотонны, то функции  $a(T)$ ,  $a_1(T)$  из (6.5) также монотонны. Поэтому существуют и единственны обратные функции  $T(a)$ ,  $T_1(a)$ , которые в соответствии с п. 1 дают решение задачи быстродействия. При этом зависимость  $T(a)$  определяет время оптимального быстродействия, т. е. решение поставленной задачи 1, а зависимость  $T_1(a)$  — время быстродействия в классе режимов не более чем с тремя интервалами постоянства скорости. Для нахождения  $T(a)$ ,  $T_1(a)$  по заданному  $a$  положим  $a = 2\pi k + b$ , где  $0 \leq b < 2\pi$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , после чего согласно (6.5) получим

$$(6.8) \quad \begin{aligned} T(a) &= 2\pi k + \tau, & \tau &= f_k^{-1}(b), \\ T_1(a) &= 2\pi k + \tau_1, & \tau_1 &= f_0^{-1}(b) \end{aligned} \quad k = 0, 1, \dots$$

где  $f_k^{-1}(\cdot)$  — монотонная на интервале  $[0, 2\pi]$  функция, обратная к  $f_k(\tau)$  из (6.6). Для ее вычисления можно использовать графики фиг. 5. Определив по заданному  $a$  величины  $T$ ,  $T_1$  при помощи соотношений (6.8), затем по формулам (6.1) — (6.3), (2.3) можно рассчитать режимы быстродействия. Режим оптимального быстродействия (6.1), т. е. решение задачи 1, соответствующее значению  $T$ , будет близок по функционалу к более простому режиму (6.2) с тремя участками постоянства скорости, отвечающему времени  $T_1$ .

Максимальные относительные погрешности по функционалу при замене оптимального режима на режим с тремя участками не превосходят  $|\Delta a / a| < 1.1\%$  для задачи 1 и  $|\Delta T / T| < 1.2\%$  для задачи 2 при любых  $a$ ,  $T$ .

Поступила 25 XII 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Anselmino E., Liebling T. M. Zeitoptimale Regelung der Bewegung einer haengenden Last zwischen zwei beliebigen Randpunkten. Proc. 5th Internat. Analogue Computation Meetings, vol. 1, Lausanne, Sept. 1967.
2. Зарецкий А. А., Портной Н. И. Оптимизация управления механизмами грузоподъемных кранов в переходных режимах. Вестн. машиностроения, 1969, № 8.
3. Баничук Н. В., Черноусько Ф. Л. Определение оптимальных и квазиоптимальных управлений в одной колебательной механической системе. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 2.