

ОПТИМАЛЬНАЯ ИМПУЛЬСНАЯ КОРРЕКЦИЯ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

М. Ю. Бородовский, А. С. Братусь, Ф. Л. Черноусько

(Москва)

На основе подхода [1, 2] решается задача оптимального импульсного управления при случайных возмущениях. Предполагается, что ресурс управляющих сил ограничен; качество управления оценивается по ожидаемому конечному состоянию системы. Рассматривается как случай многократной коррекции, когда нет ограничений на число управляющих импульсов, так и случай однократной коррекции. Задача синтеза сводится к краевой задаче со свободной границей для уравнения параболического типа (уравнения Беллмана). Число независимых переменных уменьшается путем выделения классов инвариантно-групповых решений. Дальнейшее решение осуществляется конечно-разностным методом с использованием асимптотических разложений. Приводятся результаты расчетов. Найдены некоторые точные аналитические решения.

Ранее в [3, 4] рассматривались задачи импульсной коррекции при ошибках измерений. В работах [5, 6] для решения задач импульсного управления, возникающих в теории управления запасами, предложен способ, использующий квазивариационные неравенства.

1. Постановка задачи. Пусть уравнения движения имеют вид

$$(1.1) \quad \dot{x}_k = a(t) u_k + b(t) \xi_k, \quad x_k(t^0) = x_k^0, \quad k=1, 2, \dots, n$$

Здесь t — время, $t^0 \leq t \leq T$, x_k и u_k — компоненты фазового вектора и вектора управления, ξ_k — независимые белые шумы единичной интенсивности, t^0 , $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ — начальные данные. Функции $a(t) \geq 0$ и $b(t) \geq 0$ характеризуют эффективность управления и интенсивность случайных возмущений соответственно. Требуется найти управление, удовлетворяющее ограничению

$$(1.2) \quad \int_{t^0}^T \left(\sum_{j=1}^n u_j^2 \right)^{1/2} dt \leq q^0, \quad q^0 \geq 0$$

и минимизирующее математическое ожидание функции от радиус-вектора конечного состояния

$$(1.3) \quad I = \langle F(r(T)) \rangle, \quad r = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

Функция $F(r)$ обладает свойствами

$$(1.4) \quad F(r) \geq 0, \quad F'(r) > 0 \quad (r > 0)$$

Здесь штрих означает производную по r . Задача (1.1) — (1.3) решается в двух случаях: при отсутствии ограничений на число возможных импульсов управления (многократная коррекция) и при допущении только одного импульса (однократная коррекция).

Введем переменную q , равную неизрасходованному ресурсу управления, соотношениями

$$(1.5) \quad \dot{q} = -(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)^{1/2}, \quad q(t^0) = q^0$$

Управление u ищется в виде синтеза как функция произвольных начальных данных t^0, x^0, q^0 .

Заметим, что к задаче (1.1) — (1.3) заменой переменных $x_k = y_k + (T - t) \dot{y}_k, k = 1, 2, \dots, n$ приводится задача об оптимальном управлении системой

$$y_k'' = a(t) u_k + b(t) \xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

в которой a, b, u_k, ξ_k имеют тот же смысл, что и в (1.1), и которая описывает движение динамической системы под действием управляющих сил и случайных возмущений.

2. Основные уравнения. Рассмотрим задачу многократной коррекции. Обозначим через $S(t, x, q)$ минимальное значение функционала (1.3), которое может быть достигнуто в задаче (1.1), (1.3), (1.5) при начальных условиях $t^0 = t, x^0 = x, q^0 = q$.

Из постановки задачи (1.1), (1.3), (1.5) следует, что функция S инвариантна относительно преобразований поворота в пространстве x_1, x_2, \dots, x_n . Это позволяет рассматривать функцию S как функцию трех переменных

$$(2.1) \quad \tau = \int_t^T b^2(\lambda) d\lambda, \quad r = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}, \quad q$$

Переменная τ введена для упрощения последующих соотношений. Функция $S(\tau, r, q)$ определена в области $D = \{\tau, r, q: \tau \geq 0, r \geq 0, q \geq 0\}$ и удовлетворяет в этой области уравнению Беллмана, которое можно вывести тем же способом, что в § 3 работы [1]. В результате получим, что вид уравнения зависит от значения функции

$$(2.2) \quad Q = a_*(\tau) S_r + S_q$$

причем $Q \leq 0$ всюду в D . Через $a_*(\tau)$ в (2.2) обозначена функция, полученная из $a(t)$ в результате замены (2.1). Как и в [1,2], оказывается, что в области D_1 , которая определяется условием $Q < 0$, функция S удовлетворяет уравнению

$$(2.3) \quad S_\tau = \frac{1}{2} \left[S_{rr} + \frac{n-1}{r} S_r \right]$$

В области $D_2 = D \setminus D_1$ имеем $Q = 0$ и, следовательно (R — произвольная функция двух переменных, подлежащая определению)

$$(2.4) \quad S(\tau, r, q) = R(r - a_*(\tau) q, \tau)$$

Области D_1 и D_2 имеют следующий смысл. В D_1 происходит неуправляемое движение, подверженное случайным возмущениям. В D_2 производится импульсная коррекция, под действием которой фазовая точка (τ, r, q) перемещается вдоль характеристик уравнения $Q = 0$ и оказывается либо на границе Γ областей D_1 и D_2 , либо исчерпывается ресурс управления. Определение границы Γ решает задачу синтеза оптимального управления.

Для функции $S(\tau, r, q)$, которая является решением уравнений (2.3) и (2.4) в областях D_1, D_2 , имеются следующие краевые условия на границах области D .

Из (1.3) вытекает

$$(2.5) \quad S(0, r, q) = F(r)$$

Условие

$$(2.6) \quad S_r(\tau, r, q)|_{r=0} = 0$$

следует из свойств симметрии задачи (1.1), (1.3), (1.5). При $q = 0$ функция $S(\tau, r, 0) = S^\circ(\tau, r)$ отвечает неуправляемому движению и удовлетворяет краевой задаче

$$(2.7) \quad S_\tau^\circ - \frac{1}{2} \left[S_{rr}^\circ + \frac{n-1}{r} S_r^\circ \right] = 0, \quad S^\circ(0, r) = F(r), \quad S_r^\circ(\tau, 0) = 0$$

В некоторых случаях решение этой задачи может быть выписано в аналитическом виде. Например, при $F(r) = r^2$ имеем

$$(2.8) \quad S(\tau, r, 0) = S^\circ(\tau, r) = r^2 + n\tau$$

На Γ должны выполняться [1] условия гладкости функции Q

$$(2.9) \quad Q|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} Q|_\Gamma = 0$$

Таким образом, решение задачи синтеза свелось к отысканию положения границы Γ путем решения краевой задачи для уравнения (2.3) с условиями (2.5), (2.6), (2.8), (2.9) в области D_1 .

Перейдем к случаю одноразовой коррекции. Обозначим через $S^q(\tau, r)$ минимальное значение функционала (1.3) в задаче (1.1), (1.2), при условии, что возможен лишь один корректирующий импульс. До момента коррекции система подвергается только внешним случайным воздействиям. В соответствующей области δ_1 переменных τ, r, q для S^q , как показано ранее, справедливо уравнение

$$(2.10) \quad S_\tau^q - \frac{1}{2} \left[S_{rr}^q + \frac{n-1}{r} S_r^q \right] = 0$$

Функция S^q должна удовлетворять краевым условиям, аналогичным (2.5), (2.6)

$$(2.11) \quad S^q(0, r) = F(r), \quad S_r^q(\tau, 0) = 0$$

Кроме того, S^q при $q = 0$ должна совпадать с функцией $S^\circ(\tau, r)$ из (2.7). Для вывода условий, которые накладываются на функцию S^q в момент коррекции, заметим, что при этом переменная r мгновенно изменяется на величину $a_*(\tau)k$, где k — количество затрачиваемого ресурса.

Покажем, что при оптимальной коррекции всегда $k = q$. Обозначим r^+ и r^- значение r до и после коррекции. Естественно рассматривать только те k , для которых $r^- - a_*(\tau)k \geq 0$. Пусть далее $k < q$. Могут представиться два случая после коррекции: либо $r^+ > 0$, либо $r^+ = 0$, т. е. имеет место полная компенсация. В обоих случаях коррекция оказывается неоптимальной!

В первом случае ($r^+ > 0$) увеличим величину корректирующего импульса κ_1 так, чтобы выполнялись условия $\kappa < \kappa_1 \leq q$ и $r_1^+ = r^- - a_*(\tau) \kappa_1 \geq 0$. Так как $a_*(\tau) > 0$, то получим $r_1^+ < r^+$, и после коррекции неуправляемое движение начнется при меньшем значении r . Поэтому в конце процесса при $\tau = 0$ значение функционала (1.3) будет меньше при коррекции с импульсом κ_1 , чем при импульсе κ , и рассматриваемая коррекция не оптимальна.

Во втором случае ($r^+ = 0$) коррекцию можно провести позже, т. е. при меньшем значении $\tau_2 < \tau$ обратного времени. Момент τ_2 выберем так, чтобы полная компенсация была возможна и в момент τ_2 , т. е. чтобы выполнялись условия $r_2^+ = r^-(\tau_2) - a_*(\tau_2) \kappa_2 = 0$, $\kappa_2 \leq q$. Это можно сделать выбором τ_2 и κ_2 в силу непрерывности $a_*(\tau)$ и в силу того, что в момент τ возможна полная компенсация ($r^+ = 0$) при неполном расходовании ресурса ($\kappa < q$). После коррекции в момент τ_2 неуправляемое движение, так же как и при коррекции в момент τ , начнется из начала координат ($r_2^+ = 0$). Но так как $\tau_2 < \tau$, то время неуправляемого движения уменьшится, и поэтому минимизируемый функционал (1.3) будет меньше в случае коррекции в момент τ_2 .

Таким образом, в обоих случаях предположение $\kappa < q$ противоречит оптимальности коррекции, и при оптимальной коррекции $\kappa = q$. Доказательство этого факта может быть проведено и при помощи принципа максимума для параболических уравнений.

В результате коррекции r изменяется на $r - a_*(\tau) q$, а так как после коррекции движение неуправляемо, то функция $S^q(\tau, q)$ в момент коррекции совпадает с $S^o(\tau, r - a_*(\tau) q)$, где S^o определена соотношениями (2.7).

Таким образом на границе γ области неуправляемого движения δ_1 имеем краевое условие

$$(2.12) \quad S^q(\tau, r)|_{\gamma} = S^o(\tau, r - a_*(\tau) q)$$

Второе краевое условие на γ аналогично (2.9) и имеет вид

$$(2.13) \quad S_r^q(\tau, r)|_{\gamma} = S_r^o(\tau, r - a_*(\tau) q)$$

Из определения области δ_1 следует, что если движение начинается в $\delta_2 = \delta \setminus \delta_1$, где $\delta = \{\tau, r: \tau \geq 0, r \geq 0\}$, то коррекция производится в начальный момент. Функция S^q в области δ_2 определяется равенством

$$(2.14) \quad S^q(\tau, r) = S^o(\tau, r - a_*(\tau) q)$$

В итоге заключаем, что оптимальное управление рассмотренных задач характеризуется следующими факторами: оно всегда импульсное; направление импульса противоположно направлению фазового радиус-вектора; импульсной коррекции отвечает в фазовом пространстве (τ, r, q) движение по характеристикам уравнения (2.9) в сторону уменьшения q . В многократной коррекции величина импульса определяется значением $q_* \leq q$, необходимым для того, чтобы из данной точки τ, r, q области D_2 попасть на границу Γ по характеристике уравнения (2.9), проходящей через эту точку; если такое попадание невозможно, то тратится весь ресурс управления. В однократной коррекции величина импульса всегда равна всему ресурсу управления q .

3. Автомодельные переменные и некоторые точные решения. Здесь и далее будем предполагать, что функции $F(r)$, $a(t)$, $b(t)$ имеют вид

$$(3.1) \quad F(r) = r^2, \quad a(t) = A_1 (T - t)^\alpha, \quad b(t) = B_1 (T - t)^\beta$$

где A_1, B_1, α, β — заданные постоянные. В этом случае, согласно формулам п. 2, получим $a_*(\tau) = A\tau^p$, где $p = \alpha / (1 + 2\beta)$, A — постоянная.

При этих условиях краевые задачи п. 2 инвариантны относительно следующей однопараметрической группы преобразований:

$$(3.2) \quad r \rightarrow Cr, \quad \tau \rightarrow C^2\tau, \quad q \rightarrow C^{-p}q, \quad S \rightarrow C^2S, \quad p = \alpha / (1 + 2\beta)$$

где C — постоянная. Следовательно, эти краевые задачи имеют автомодельные решения, инвариантные относительно группы (3.2). При $p \geq 1/2$ будем искать такие решения в виде

$$(3.3) \quad S(\tau, r, q) = \tau W(y, z), \quad S^q(\tau, r) = \tau V(y, z) \\ y = Aq\tau^{p-1/2}, \quad z = r\tau^{-1/2}$$

Краевая задача (2.2), (2.5), (2.6), (2.8), (2.9) в области D_1 переменных τ, r, q при замене (3.3) преобразуется в краевую задачу для функции $W(y, z)$ в области D_1° с границей Γ° . Соответствующее уравнение и краевые условия имеют вид

$$(3.4) \quad W_{zz} + \left(z + \frac{n-1}{z}\right) W_z - 2W = (2p-1)yW_y$$

$$(3.5) \quad W(y, z) \rightarrow z^2, \quad z \rightarrow \infty, \quad W_z(y, 0) = 0, \quad W(0, z) = z^2 + n$$

$$(3.6) \quad W_z + W_y|_{\Gamma^\circ} = 0, \quad W_{zz} + W_{zy}|_{\Gamma^\circ} = 0$$

В области D_2° , в которую отображается D_2 , функция W удовлетворяет уравнению

$$(3.7) \quad W_z + W_y = 0$$

Краевая задача (2.10) — (2.13) в области δ_1 дает при преобразовании (3.3) краевую задачу в новых переменных y, z в области δ_1° с границей γ°

$$(3.8) \quad V_{zz} + \left(z + \frac{n-1}{z}\right) V_z - 2V = (2p-1)yV_y$$

$$(3.9) \quad V(y, z) \rightarrow z^2, \quad z \rightarrow \infty, \quad V_z(y, 0) = 0, \quad V(0, z) = z^2 + n$$

$$(3.10) \quad V|_{\gamma^\circ} = (z-y)^2 + n, \quad V_z|_{\gamma^\circ} = 2(z-y)$$

Область δ_2 переходит в δ_2° , в которой, как следует из (2.14), функция V определяется конечной формулой

$$(3.11) \quad V(y, z) = (z-y)^2 + n$$

При $p = 1/2$ краевые задачи (3.4) — (3.6) и (3.8) — (3.10) имеют точные аналитические решения [1]. Для первой из этих задач будем искать решение в виде $W(y, z) = (z^2 + n)\Phi(y)$. Так построенная функция W удовлетворяет уравнению (3.4) и] краевым условиям (3.5). На границе Γ° получаем

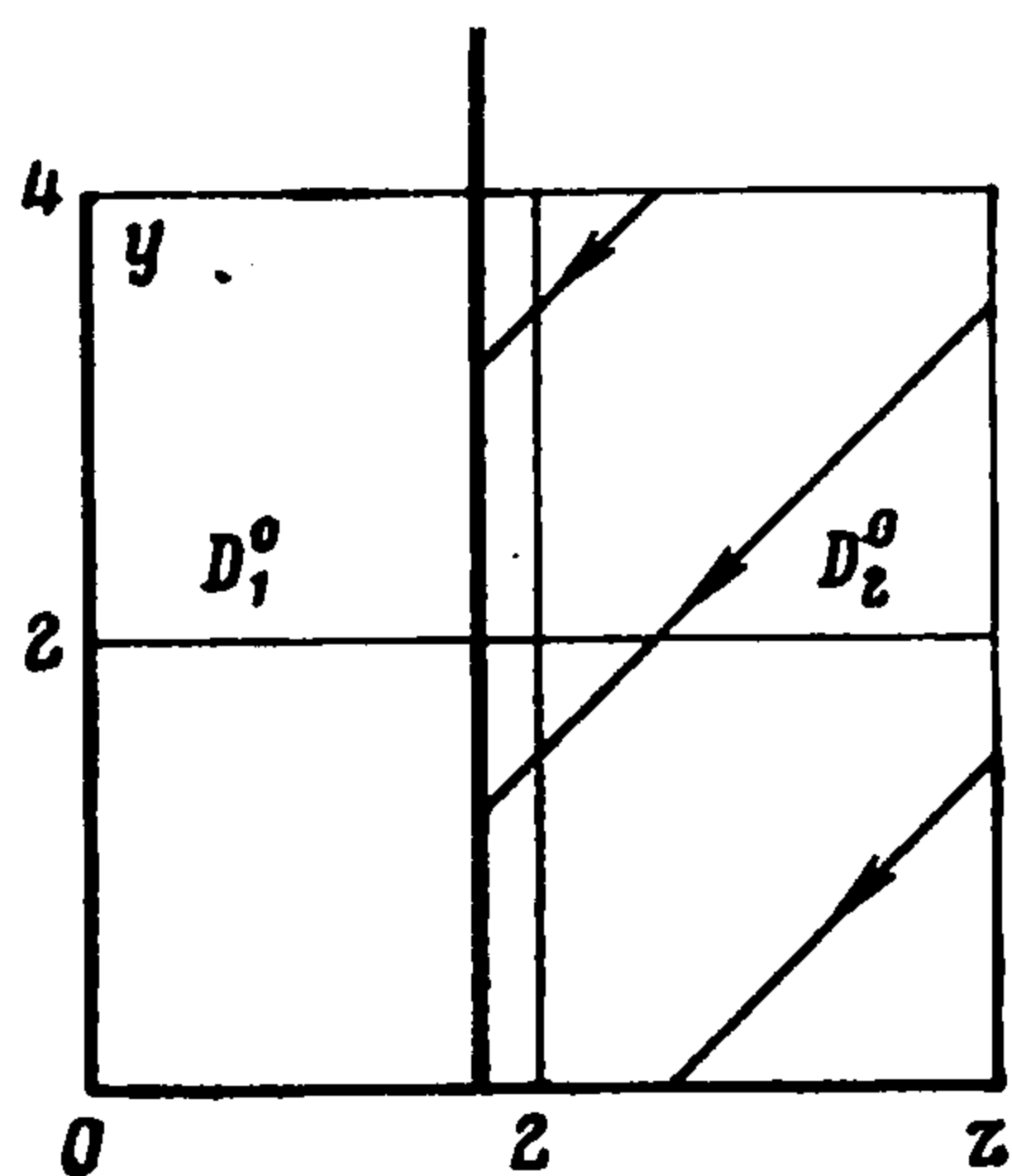
$$(3.12) \quad 2z\Phi(y) + (z^2 + n)\Phi(y) = 0, \quad \Phi(y) + z\Phi(y) = 0$$

Для существования нетривиального решения определитель системы (3.12), линейной и однородной относительно $\Phi(y)$, должен быть равен нулю. Отсюда следует, что Γ° задается уравнением $z = \sqrt{n}$, а $\Phi(y) = C \exp(-y/\sqrt{n})$ с произвольной постоянной C . Из (3.5) находим, что

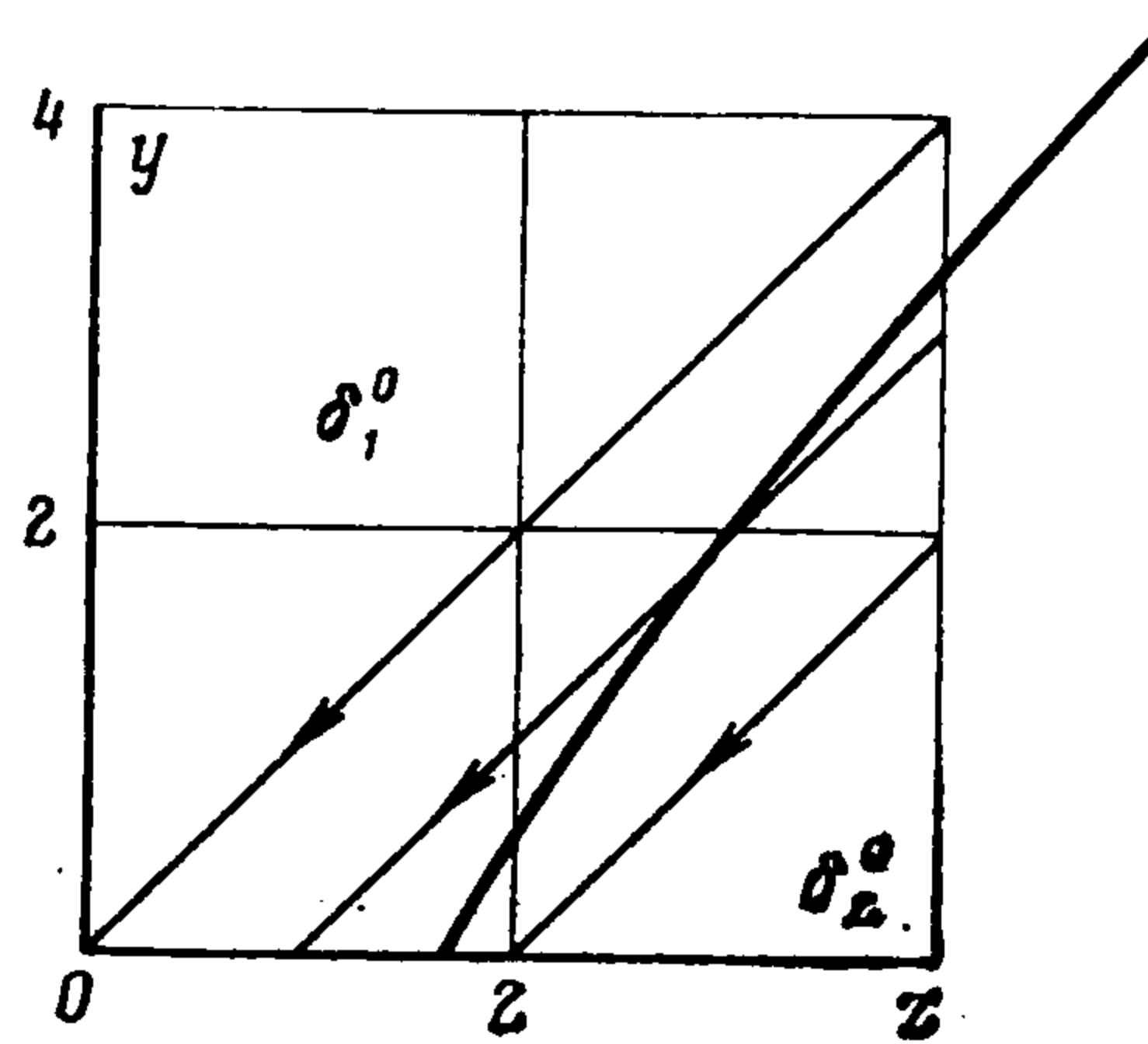
$C = 1$. В области $D_2^\circ = \{y, z : z > \sqrt{n}\}$ решение $W(y, z)$ уравнения (3.7) однозначно определяется при помощи метода характеристик, так как известны значения $W(y, z)$ на Γ° и множестве $y = 0$. В итоге функция $W(y, z)$ определяется равенствами

$$(3.13) \quad W(y, z) = \begin{cases} (z^2 + n) \exp(-y/\sqrt{n}), & 0 \leq z \leq \sqrt{n} \\ 2n \exp((z - y - \sqrt{n})/\sqrt{n}), & \sqrt{n} \leq z \leq y + \sqrt{n} \\ (z - y)^2 + n, & y + \sqrt{n} < z \end{cases}$$

На фиг. 1 показана граница Γ° областей D_1° и D_2° при $p = 1/2$ и $n = 3$. Тонкими линиями со стрелками отмечены траектории, по которым происходит движение в момент коррекции. В той части области D_2° , где $\sqrt{n} \leq$



Фиг. 1



Фиг. 2

$\leq z \leq y + \sqrt{n}$ происходит импульсная коррекция, приводящая фазовую точку на Γ° , т. е. на множество $z = \sqrt{n}$; при этом тратится не весь ресурс управления, а его часть, определяемая соотношением $q_* = y_* = z - \sqrt{n}$. В части области D_2° , где $z > y + \sqrt{n}$, в результате коррекции система попадает на множество $y = q = 0$, ресурс управления в этом случае расходуется полностью. В области $D_1^\circ = \{y, z : z < \sqrt{n}\}$ происходит неуправляемое движение под действием случайных сил и $u = 0$. Так как ресурс управления при этом не меняется, то движение в плоскости y, z происходит вдоль прямой $y = q = \text{const}$. В силу того, что $z = r / \sqrt{\tau}$, при уменьшении τ фазовая точка смещается в сторону возрастания z . Как только точка попадает из области D_1° на границу Γ° , происходит коррекция. Таким образом, вдоль границы Γ° имеет место скользящий импульсный режим управления, что является характерным для задач коррекции без ограничения на число импульсов.

Для задачи одноразовой коррекции при $p = 1/2$ аналогичным способом получаем уравнение границы $z = \gamma^\circ(y) = 1/2(y + \sqrt{y^2 + 4n})$ и выражение для функции $V(y, z)$

$$(3.14) \quad V(y, z) = \begin{cases} \frac{1}{4n} (z^2 + n) (\sqrt{y^2 + 4n} - y)^2, & 0 \leq z \leq \gamma^\circ(y) \\ (z - y)^2 + n, & z \geq \gamma^\circ(y) \end{cases}$$

В этом случае область неуправляемого движения δ_1° задается неравенствами $0 \leq z < \gamma^\circ(y)$, а в области δ_2° , где $z \geq \gamma^\circ(y)$, производится им-

пульсная коррекция, в результате которой полностью расходуется ресурс управления и система приходит в состояние $y = q = 0$. Как следует из сравнения найденных функций W и V и границ Γ° и γ° , область неуправляемого движения δ_1° шире области D_1° и выполняется неравенство $W(y, z) \leq V(y, z)$.

На фиг. 2 показана граница γ° областей δ_1° и δ_2° при $n = 3$ и $p = 1/2$. Тонкими линиями со стрелками показаны прямые $y - z = \text{const}$, по которым происходит коррекция из области δ_2° с использованием всего ресурса управления. После использования всего ресурса движение в обоих случаях фиг. 1, 2 продолжается вдоль прямой $y = 0$.

4. Асимптотические разложения. Для численного решения краевых задач (3.4) — (3.6), (3.8) — (3.10) построим предварительно асимптотические приближения для функций W и V при малых y .

В случае многократной коррекции решение уравнения (3.4) ищем в виде

$$(4.1) \quad W(y, z) = W^\circ(z) + yW^1(z) + y^2W^2(z) + \dots$$

Здесь $W^k(z)$ — неизвестные функции аргумента z . Кроме того, предполагаем, что граница Γ° задается функцией $\Gamma^\circ(y)$, которая допускает разложение (Γ_k — неизвестные числа)

$$(4.2) \quad z = \Gamma^\circ(y) = \Gamma_0 + \Gamma_1 y + \Gamma_2 y^2 + \dots$$

Подставив (4.1) и (4.2) в (3.4), (3.6) и выделяя слагаемые с одинаковыми степенями y , получим краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $W^k(z)$.

Уравнение и краевые условия для $W^\circ(z)$ имеют вид

$$(4.3) \quad W_{zz}^\circ + \left(z + \frac{n-1}{z}\right) W_z^\circ - 2W^\circ = 0, \quad W_z^\circ(0) = 0, \\ W^\circ(z) \rightarrow z^2, \quad z \rightarrow \infty$$

Отсюда находим, что $W^\circ(z) = z^2 + n$. Функция $W^1(z)$ должна удовлетворять уравнению

$$(4.4) \quad W_{zz}^1 + \left(z + \frac{n-1}{z}\right) W_z^1 - (2p+1)W^1 = 0$$

и краевому условию

$$(4.5) \quad W_z^1(0) = 0$$

Подстановка (4.1) и (4.2) в (3.6) дает два соотношения

$$(4.6) \quad 2\Gamma_0 + W^1(\Gamma_0) = 0, \quad 2 + W_z^1(\Gamma_0) = 0$$

которые необходимы для одновременного определения Γ_0 и $W^1(\Gamma_0)$.

Решение уравнения (4.4) при условии (4.5) может быть представлено в виде ряда по степеням z , содержащего неопределенный множитель k_1 . В частности, при $n = 2$ получим

$$(4.7) \quad W^1(z) = k_1 \left[1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(2p+1)(2p-1)\dots(2p+1-2l+2)}{((2l)!)^2} z^{2l} \right] = k_1 W^*(z)$$

Подстановка (4.7) в краевые условия (4.6) дает трансцендентное уравнение относительно Γ_0

$$(4.8) \quad W^*(\Gamma_0) = \Gamma_0 W_z^*(\Gamma_0)$$

которое решается численно. Затем из одного из условий (4.6) находится значение k_1 и тем самым полностью определяется функция $W^1(z)$.

Краевая задача для $W^2(z)$ имеет вид

$$(4.9) \quad \begin{aligned} W_{zz}^2 + \left(z + \frac{n-1}{z}\right) W_z^2 - 4pW^2 &= 0, \quad W_z^2(0) = 0 \\ [W_{zz}^0(\Gamma_0) + W_z^1(\Gamma_0)] \Gamma_1 + W_z^1(\Gamma_0) &= -2W^2(\Gamma_0) \\ W_{zz}^1(\Gamma_0) \Gamma_1 + W_{zz}^1(\Gamma_0) &= -2W_z^2(\Gamma_0) \end{aligned}$$

Последние два краевых условия в (4.9) содержат неизвестную величину Γ_1 . Решение задачи (4.9) проводится аналогично.

Функция $W^0(z) + yW^1(z) + y^2W^2(z)$ удовлетворяет уравнению (3.4) с точностью $O(y^3)$, а условиям (3.6) на границе $z = \Gamma_0 + \Gamma_1 y$ — с точностью $O(y^2)$, что достаточно для дальнейшего численного расчета. Подобная процедура построения асимптотических приближений используется и при решении задач одноразовой коррекции. Отметим, что в частном случае $p = 1$ такой подход применялся в [4]¹.

5. Способ и результаты численного решения. Задачи многоразовой и одноразовой коррекции для размерностей $n = 1, 2, 3$ системы (1.1) и значений параметра $p = 1, 2, 4$ решались численно в достаточно большой области переменных y, z .

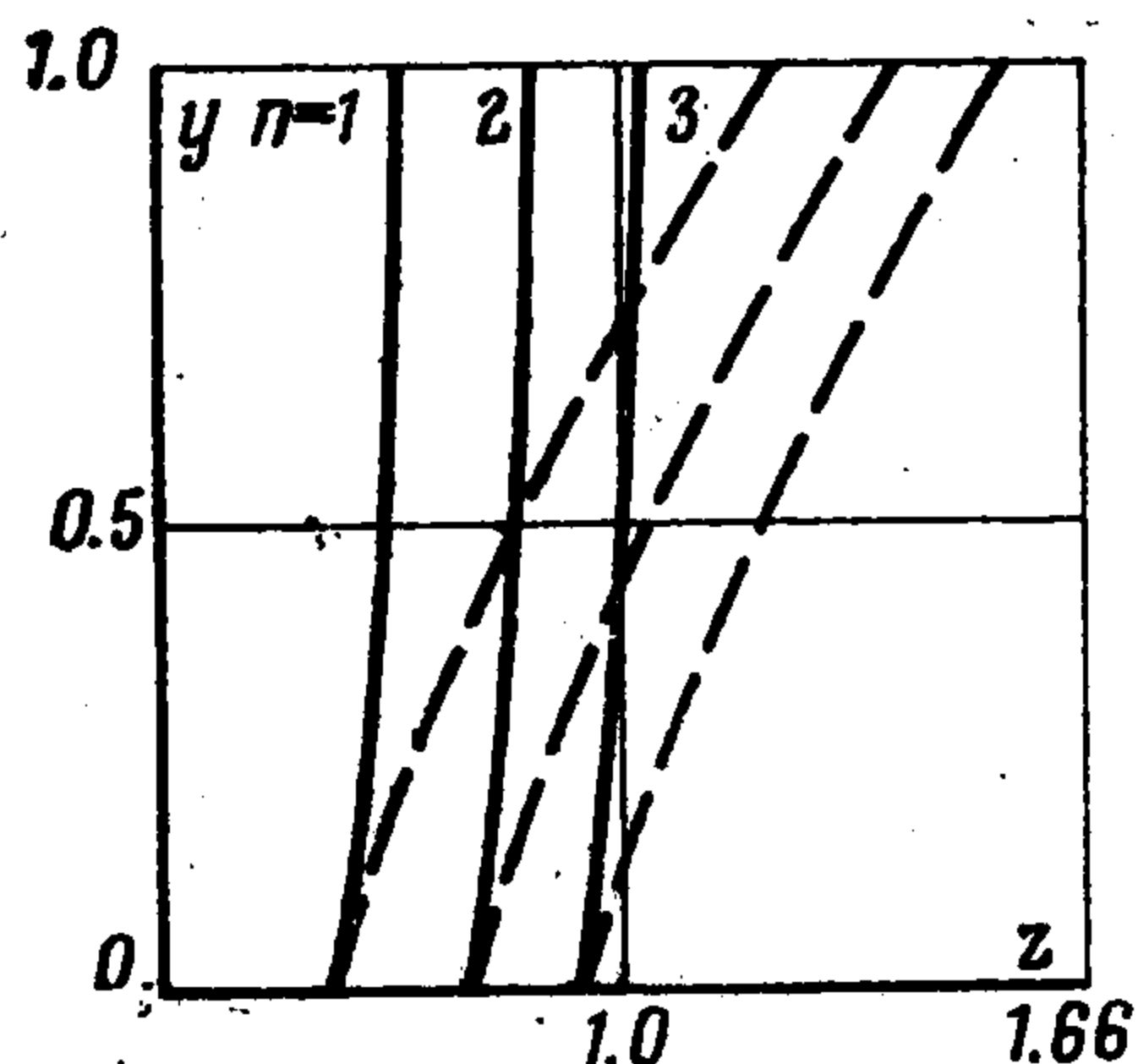
Функции W и V в узлах исходного слоя, отстоящего от оси z на величину 10^{-2} , а также начальные положения границ Γ^0 и γ^0 вычислялись с помощью асимптотических разложений с точностью 10^{-4} . Решение параболических уравнений (3.4), (3.8) проводилось по стандартной неявной конечно-разностной схеме. Шаги Δy и Δz по переменным y и z равнялись 0.005. Решение полученных разностных уравнений при фиксированном y осуществлялось методом прогонки.

На каждом шаге по y системы трансцендентных уравнений (3.6) и (3.10) относительно неизвестной точки границы Γ^0 (или γ^0) и значения функции W (или V) и в этой точке решались по способу Ньютона. В качестве начальных приближений использовались величины, полученные на предыдущем шаге. Сдвиг положения границы Γ^0 (γ^0) на каждом шаге по y не превосходил Δz .

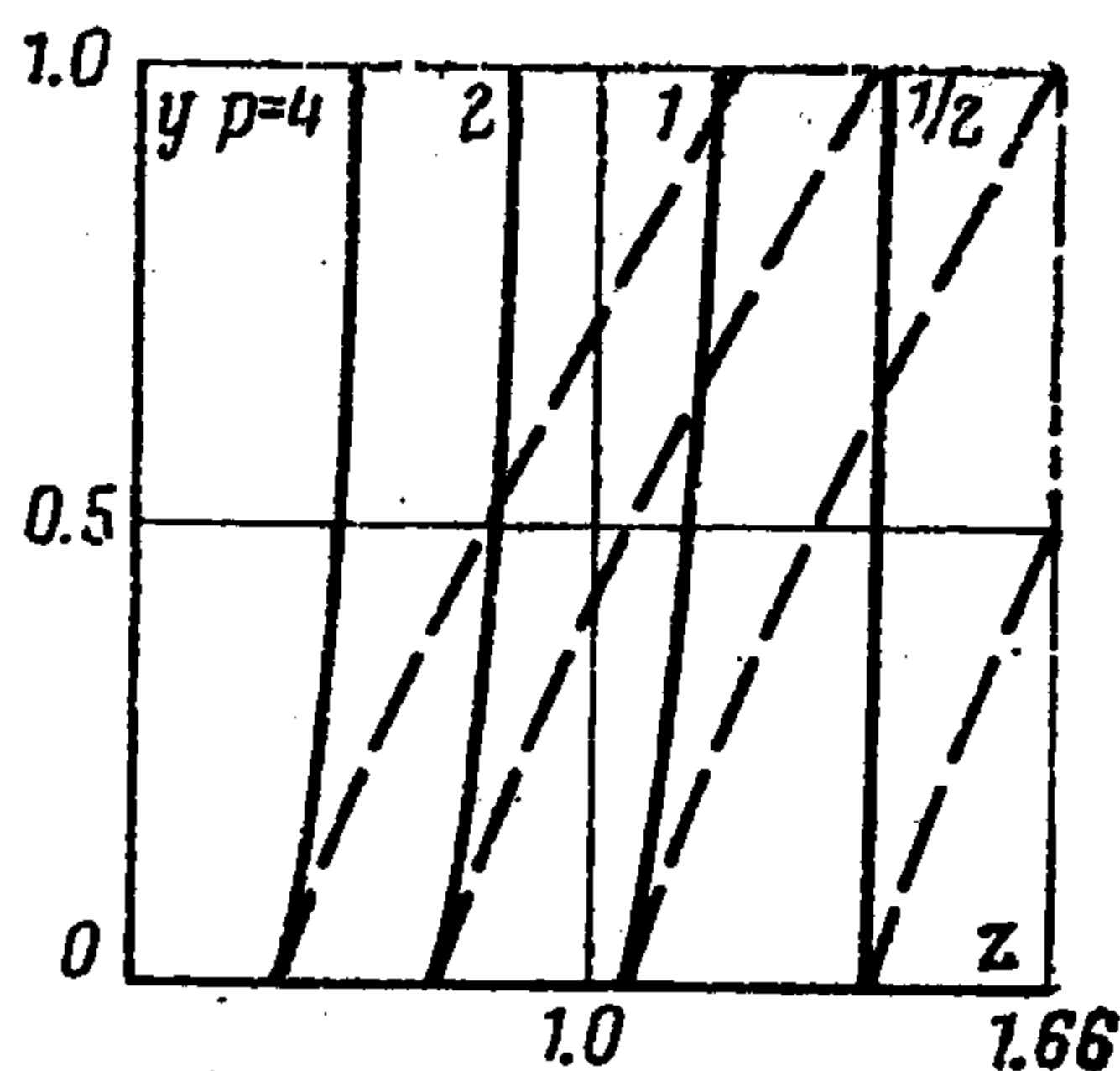
Результаты расчетов представлены на фиг. 3—5. Здесь сплошные кривые относятся к случаю многоразовой коррекции, а проведенные пунктиром — к случаю одноразовой коррекции. Найденные границы областей D_1^0 и D_2^0 , а также δ_1^0 и δ_2^0 для $p = 2$ и $n = 1, 2, 3$ приведены на фиг. 3. Области D_1^0 , δ_1^0 находятся слева, а D_2^0 , δ_2^0 — справа от соответствующих границ Γ^0 , γ^0 . Видно, что Γ^0 и γ^0 сливаются при $y \rightarrow 0$, что отвечает, согласно (3.3), малым τ или q . Область D_1^0 , как было отмечено при сравнении аналитических решений, во всех случаях уже области δ_1^0 , т. е. в случае многоразовой коррекции область неуправляемого движения меньше. Это соответствует по смыслу более гибкой стратегии многоразовой коррекции.

¹ Р я с и н В. А. Оптимальная стратегия импульсной коррекции при непрерывных измерениях. Препринты ин-та прикл. матем. АН СССР, №№ 35, 42.

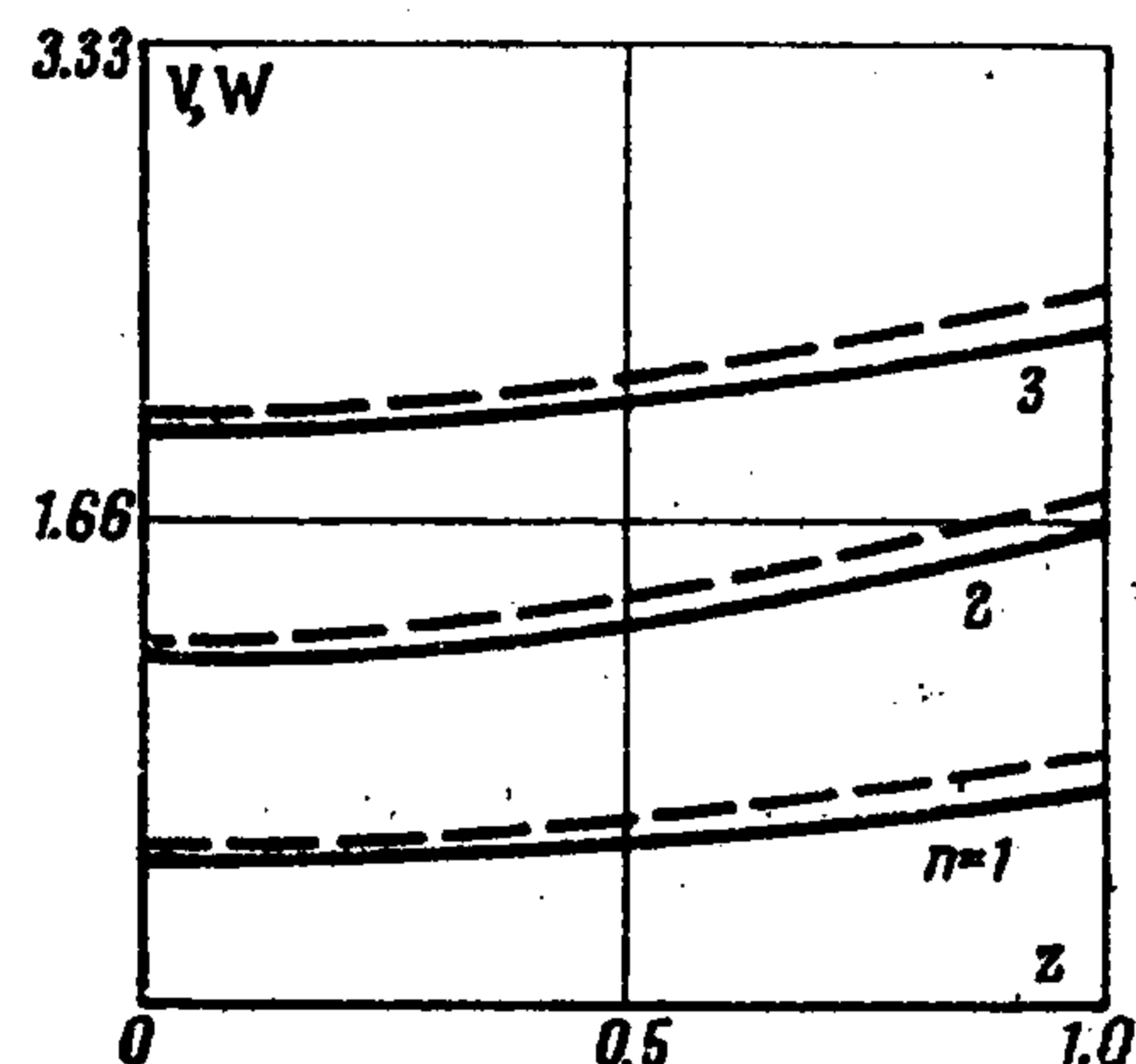
На фиг. 4 изображены границы Γ° и γ° , найденные для $n = 2$ и значений $p = 1/2, 1, 2, 4$. Решение при $p = 1/2$ получено аналитически. На фиг. 5 даны графики функций $W(y, z)$ и $V(y, z)$ для $p = 1$ и значений $n = 1, 2, 3$ при фиксированном $y = 1$. Видно, что выполняется неравенство $W \leq V$, означающее, что многократная коррекция приводит к лучшему результату.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Значения функционала качества для всех случаев коррекции с 2, 3 и т. д. импульсами заключены, очевидно, между соответствующими кривыми фиг. 5 ($p = 1$), дающими величину функций W и V для данной размерности n . Видно также, что выполняются следующие неравенства:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} W_1(y, z) < W_2(y, z) < W_3(y, z) \\ V_1(y, z) < V_2(y, z) < V_3(y, z) \end{aligned}$$

Здесь индексы $n = 1, 2, 3$ характеризуют размерность системы (1.1). Неравенства (5.1) получают объяснение, если интерпретировать задачу коррекции в случае $n = 1$ как задачу приближения в конечный момент времени к заданной плоскости в пространстве трех измерений, случай $n = 2$ — как задачу приближения к прямой, случай $n = 3$ — как задачу приближения к точке. Увеличение n означает увеличение числа корректируемых параметров, т. е. усложнение задачи управления и приводит к росту функционала. Области $D_1^\circ, \delta_1^\circ$ расширяются с ростом n (см. фиг. 3).

В заключение заметим, что каждое решение задачи коррекции, полученное в автономных переменных y, z , эквивалентно решению целого класса задач оптимального импульсного управления в исходных переменных τ, r, q .

Поступила 2 I 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф. Л. Автономные решения уравнения Беллмана для задач оптимальной коррекции случайных возмущений. ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.
2. Братусь А. С., Черноусько Ф. Л. Численное решение задач оптимальной коррекции при случайных возмущениях. Ж. выч. матем. и матем. физ., 1974, т. 14, вып. 1.
3. Охоцимский Д. Е., Рясин В. А., Ченцов Н. Н. Оптимальная стратегия при корректировании. Докл. АН СССР, 1967, т. 175, вып. 1.
4. Bather J., Chernoff H. Sequential decisions in the control of a space-ship (finite fuel). J. Appl. Probabil., 1967, vol. 4, No. 3.
5. Bensoussan A., Lions J. L. Nouvelle formulation de problèmes de contrôle impulsionnel et applications. C. r. Acad. Sci. Paris, 276. Ser. A, 1973, p. 1189.
6. Bensoussan A., Lions J. L. Contrôle impulsionnel et inéquations quasi-variationnelles d'évolution. C. r. Acad. Sci. Paris, 276. Ser. A, 1973, p. 1333.