Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 62—50

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ К НЕКОТОРЫМ ЗАДАЧАМ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В. Б. Колмановский

(Москва)

Рассматриваются квазилинейные системы оптимального управления. Обосновывается применимость метода возмущений к некоторым задачам управления. Различные схемы построения приближенного решения задач управления с малым параметром приводились в [1–4].

Ряд практических задач оптимального управления может быть описан системами, содержащими линейные члены и малые, вообще говоря, нелинейные возмущающие факторы. Для аналитического исследования таких задач может оказаться полезной развиваемая ниже схема последовательных приближений метода возмущений. Обоснование методики проводится для квазилинейных систем с квадратическим критерием качества.

1. Пусть управляемая система задается уравнением

$$x^{\cdot}(t) = A(t)\,x(t) + \varepsilon f(x(t),\ t) + B(t)\,u(t), \quad x(0) = x_0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{1.1}$$

где вектор $x(t)$ принадлежит евклидову пространству E_n размерности n. Относительно коэффициентов системы (1.1) постоянно предполагаются выполненными следующие ограничения. Заданные матрицы $A(t)$, $B(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ измеримы и ограничены, а $\varepsilon > 0$ — некоторая постоянная. Вектор-функция $f(t, x) \in E_n$ измерима по совокупности аргументов и удовлетворяет следующим условиям: для любых $x_1, x_2 \in E_n$, $|x_i| \leqslant N$ и любых $0 \leqslant t \leqslant T$

$$|f(x_1,\ t) - f(x_2,\ t)| \leqslant \alpha_1(N)\,|x_1 - x_2|, \qquad |f(x,\ t)| \leqslant \alpha_3 + \alpha_2 |x|^2 \tag{1.2}$$

Здесь постоянные $\alpha_i \geqslant 0$, символом $|x|$ обозначена евклидова норма вектора $x \in E_n$, причем постоянная α_1 зависит, вообще говоря, от размеров области E_n, которой принадлежат x_1, x_2, и $\alpha_1(N)$ не убывает.

Таким образом, первое из требований (1.2) означает, что функция $f(x,\ t)$ удовлетворяет по первому аргументу локальному условию Липшица.

Задача 1. Выбрать управление $u(t) \in E_l$, которое минимизирует квадратический функционал (критерий качества)

$$I(x, u) = x'(T)\,Hx(T) + \int_0^T [x'(t)\,L_1(t)\,x(t) + u'(t)\,L_2(t)\,u(t)]\,dt \tag{1.3}$$

Здесь штрих — знак транспонирования, матрицы L_1, L_2 измеримы и ограничены, причем H и L_1 неотрицательно определены, а $L_2(t)$ равномерно положительно определена на отрезке $[0,\ T]$.

Известно (см., например, [5]), что при $\varepsilon = 0$ задача минимизации функционала (1.3) на траекториях системы (1.1) допускает явное аналитическое решение.

В данной работе предлагается и обосновывается алгоритм построения управлений, обеспечивающих точность в смысле функционала I порядка ε^2 для произвольных достаточно малых $\varepsilon \geqslant 0$ и указывается верхняя граница значений ε, для которых справедлив предлагаемый алгоритм. П.2.3 посвящены обоснованию алгоритма, а его конструктивная часть изложена в п. 4.

2. Рассмотрим управляемую систему (1.1) при $\varepsilon = 0$ с критерием качества (1.3). Оптимальное управление при $\varepsilon = 0$ обозначим через u_0, а соответствующую траекторию — через x_0. Как известно [5]

$$u_0(t) = -L_2^{-1}(t)\, B'(t)\, P(t)\, x(t) \tag{2.1}$$

Здесь L_2^{-1} — матрица, обратная к L_2. Соответствующее управлению (2.1) значение функционала (1.3) равно

$$x'(0)\, P(0)\, x(0) \tag{2.2}$$

Отметим, что матрица $P(t)$ определяется только коэффициентами исходной задачи (1.1), (1.3). Поэтому она может быть найдена до начала процесса управления. Рассматривая построенные таким образом u_0, x_0 как нулевое приближение, образуем последовательность управлений u_k как последовательность, минимизирующую при каждом $k = 1, 2, \ldots$ функционал (1.3) на траекториях линейной системы

$$x^{\bullet}(t) = A(t)\, x(t) + \varepsilon f(x_{k-1}(t),\ t) + B(t)\, u(t) \tag{2.3}$$

Соответствующую u_k траекторию системы (2.3) обозначим через x_k, а значение функционала (1.3) — через I_k. При этом стандартное применение метода динамического программирования (см., например, [5]) показывает, что u_k, I_k задаются формулами для $k \geqslant 1$

$$\begin{gathered} u_k(t) = -L_2^{-1}(t) B'(t)\,[P(t)\, x(t) + G_{1k}'(t)] \\ I_k = x'(0) P(0)\, x(0) + G_{1k}(0)\, x(0) + x'(0)\, G_{2k}(0) + Q_k(0) \end{gathered} \tag{2.4}$$

где G_{1k}, G_{2k}, Q_k удовлетворяют почти всюду уравнениям

$$\begin{gathered} G_{1k}^{\bullet}(t) + \varepsilon f'(x_{k-1}(t),\ t)\, P(t) + G_{1k}(t)\, B_1(t)\, P(t) = 0, \\ G_{1k}(T) = 0 \\ Q_k^{\bullet}(t) + G_{1k}(t)\, \varepsilon f(x_{k-1}(t),\ t) + \varepsilon f'(x_{k-1}(t), t)\, G_{1k}'(t) + \\ + G_{1k}(t) B_1(t)\, G_{1k}'(t) = 0, \quad Q_k(T) = 0, \quad G_{1k}'(t) = G_{2k}(t) \end{gathered} \tag{2.5}$$

Установим компактность последовательности x_k, G_{1k} при достаточно малых ε, используя методы монографии [6].

Из (2.5) следует, что

$$G_{1k}(t) = \varepsilon \int_t^T f'(x_{k-1}(s), s)\, P(s)\, z_1(t, s)\, ds \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial z_1(t, s)}{\partial t} = A_1(t)\, z_1(t, s), \quad z_1(t, t) = I, \quad A_1(\tau) = A(\tau) - B_1(\tau)\, P(\tau) \tag{2.7}$$

Аналогично, в силу (2.3), (2.4), имеем для $k = 1, 2, \ldots$

$$x_k(t) = z_1(t, 0)\, x(0) + \varepsilon \int_0^t z_1(t, s)\, f(x_{k-1}(s), s)\, ds - \tag{2.8}$$

$$- \varepsilon \int_0^t z_1(t, s)\, B_1(s)\, ds \int_s^T z_1(s, s_1)\, P(s_1)\, f(x_{k-1}(s_1), s_1)\, ds_1$$

Заметим, что из требований, наложенных на коэффициенты (1.1), (1.3) в п. 1, следует существование ограниченной неотрицательно-определенной матрицы $P(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ (см., например, [5, 7]). Отсюда и из (2.8) вытекает существование такой постоянной m_0, что при всех $0 \leqslant t \leqslant T$

$$|x_0(t)| \leqslant \sup_t |z_1(t, 0)\, x(0)| = m_0 \tag{2.9}$$

Определим далее и зафиксируем некоторое число β, удовлетворяющее неравенству (см. (1.2))

$$\beta > (\alpha_3 + \alpha_0 m_0^2) \sup_t \int_0^T \Big[\| z_1(t, s) \| (1 + \|B_1(s)\| \times \tag{2.10}$$

$$\times \int_s^T \|z_1(s, s_1)\, P(s_1)\| ds_1) \Big] ds = (\alpha_3 + \alpha_0 m_0^2)\, \beta_1 = \beta_2(m_0), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

Из этого определения постоянной β и (2.8) следует, что

$$|x_1(t)| \leqslant m_0 + \varepsilon\beta \tag{2.11}$$

Но при любых достаточно малых ε оценке, подобной (2.11), удовлетворяют все $x_k(t)$. Действительно, на основании (2.8), (1.2) неравенство

$$|x_k(t)| \leqslant m_0 + \varepsilon\beta \tag{2.12}$$

справедливо для всех $\varepsilon \geqslant 0$, для которых

$$\beta_2(m_0) + \varepsilon\, (2\alpha_2 m_0 \beta + \alpha_2 \varepsilon \beta^2)\, \beta_1 < \beta \tag{2.13}$$

Из (2.12), (2.6), (1.2) вытекает также равномерная ограниченность $G_{1k}(t)$.

Для доказательства равностепенной непрерывности последовательности $x_k(t)$ возьмем две произвольные точки $t_1 \leqslant t_2$ на отрезке $[0, T]$ и проинтегрируем обе части (2.3) от t_1 до t_2. С учетом (2.4), (2.5), (2.8), (2.12) отсюда следует равностепенная непрерывность $x_k(t)$, а с нею и $G_{1k}(t)$.

Положим

$$\gamma_k = \max_t |x_{k+1}(t) - x_k(t)|, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

Тогда из (2.8), (1.2) заключаем, что

$$\gamma_{k+1} \leqslant \varepsilon \gamma_k \alpha_1 (m_0 + \varepsilon\beta)\, \beta_1 \tag{2.14}$$

где постоянная β_1 определена в (2.10). Потребуем теперь, чтобы

$$\varepsilon \alpha_1 (m_0 + \varepsilon\beta)\, \beta_1 < 1 \tag{2.15}$$

Соотношения (2.14), (2.15) позволяют оценить $|x(t) - x_k(t)|$. Имеем, (привлекая (2.8)

$$|x(t) - x_k(t)| = \left|\sum_{i=k}^{\infty} (x_{i+1}(t) - x_i(t))\right| \leqslant \tag{2.16}$$

$$\leqslant \varepsilon\beta_2 (\varepsilon\alpha_1 (m_0 + \varepsilon\beta)\beta_1)^k [1 - \varepsilon\alpha_1 (m_0 + \varepsilon\beta)\beta_1]^{-1}$$

Аналогичным образом, с учетом (2.6), получаем

$$|G_1(t) - G_{11}(t)| \leqslant \varepsilon^2\alpha_1 (m_0 + \varepsilon\beta)\beta_2 [1 - \varepsilon\alpha_1 (m_0 + \varepsilon\beta)\beta_1]^{-1} \times \tag{2.17}$$

$$\times \sup_t \int_t^T P(s) z_1(t, s)\, ds$$

Отметим, наконец, что из равномерной сходимости последовательности x_k, G_{1k} к x, G_1 вытекает, что предельные функции x, G_1 являются решением краевой задачи, образованной системой (1.1) и соотношениями

$$\begin{gathered} u(t) = -L_2^{-1}(t) B'(t) [P(t) x(t) + G_1(t)] \\ G_1^{\cdot}(t) + \varepsilon f'(x(t), t) P(t) + G_1(t) A(t) - \\ -G_1(t) B_1(t) P(t) = 0, \quad G_1(T) = 0 \end{gathered} \tag{2.18}$$

При этом на основании (2.4) соответствующее управлению (2.18) значение функционала (1.3) на траектории системы (1.1) есть

$$\begin{gathered} I_0 = x'(0) P(0) x(0) + G_1(0) x(0) + x'(0) G_2(0) + Q(0) \\ G_1'(t) = G_2(t) \\ Q^{\cdot}(t) + G_1(t) \varepsilon f(x(t), t) + \varepsilon f'(x(t), t) G_1'(t) + \\ + G_1(t) B_1(t) G_1'(t) = 0, \qquad Q(T) = 0 \end{gathered} \tag{2.19}$$

Ниже показано, что приближения u_1, x_1 обеспечивают точность по функционалу порядка ε^2, а приближения u_0, x_0 — точность порядка ε.

3. 3.1. Докажем существование решения задачи 1. Положим

$$I_0 = \inf_u I \tag{3.1}$$

где инфинум вычисляется по множеству всех допустимых управлений. С учетом (2.19) $I_0 \leqslant \bar{I}_0 < \infty$. Значит, существует последовательность управлений $u_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, таких, что соответствующие им траектории $x_i(t)$ системы (1.1) и значения $I_i \leqslant \bar{I}_0$ функционала (1.3) удовлетворяют соотношению

$$\lim_{i\to\infty} I_i = I_0, \quad \int_0^T u_i'(t) L_2(t) u_i(t)\, dt \leqslant \bar{I}_0 \tag{3.2}$$

Из (3.2) и равномерной положительной определенности $L_2(t)$ следует существование такой постоянной $c_1 > 0$, что равномерно по i

$$\int_0^T |u_i(t)|^2\, dt \leqslant c_1 \tag{3.3}$$

Покажем теперь, что из (3.3) следует равномерная ограниченность последовательности $x_i(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $i = 1, 2, \ldots$.

Для этого положим $v_i = x_i' x_i$. В силу (1.1), (1.2) имеем $v_i(t) \leqslant \omega_i(t)$, где $\omega_i(t)$ задается уравнением Риккати

$$\omega_i^{\bullet}(t) = \omega_i(t) A_1 + \| B(t) \| \, | u_i(t) |^2 + \varepsilon \alpha_2 \omega_i^2(t),$$
$$\omega_i(0) = v_i(0)$$
$$A_1 = \sup_t (2 \| A(t) \| + \| B(t) \| + \varepsilon + 2\varepsilon\alpha_2\alpha_3)$$

Представим $\omega_i(t)$ в виде $\omega_i = \omega_{i1} + \omega_{i2}$, где

$$\omega_{i2}^{\bullet}(t) = \omega_{i2}(t) A_1 + \| B(t) \| \, | u_i(t) |^2, \quad \omega_{i2}(0) = \omega_i(0)$$

На основании (3.3) все $\omega_{i2}(t)$ равномерно ограничены. Отсюда следует равномерная ограниченность всех $v_i(t)$, если только

$$\varepsilon < \pi / (2T \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}) \tag{3.4}$$

$$\varepsilon_1 = \alpha_2 \sup_{i,t} \omega_{i2}^2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

$$\varepsilon_2 = \alpha_2 \sup_{i,t} \omega_{i2}^2(t) \exp \int_0^t (A_1 + 2\varepsilon\alpha_2\omega_{i2}(s)) \, ds$$

Таким образом, указанным способом построена постоянная m_1, для которой $| x_i(t) | \leqslant m_1$, т. е. последовательность $x_k(t)$ равностепенно непрерывна. Теперь справедливость утверждения п. 1 устанавливается стандартным образом, подобно [8-10].

3.2. Покажем, что из факта существования оптимального управления $u_0(t)$ вытекает существование управления $u(t)$ и соответствующей $u(t)$ траектории $x(t)$ системы (1.1), удовлетворяющих соотношениям (1.1), (2.18), (2.19) и таких, что $I(u, x)$ отличается от I_0 на величину порядка ε^2.

Таким образом, в частности, будет установлено, что из существования оптимального управления $u_0(t)$ следует существование решения краевой задачи (1.1), (2.18). Для доказательства рассмотрим вспомогательную задачу минимизации функционала (1.3) на траекториях линейной системы

$$x^{\bullet}(t) = A(t) x(t) + \varepsilon f(x_0(t), t) + B(t) u(t) \tag{3.5}$$

Минимальное значение функционала (1.3) на траекториях системы (3.5) обозначим через I_1. Из определения $u_0(t)$ и (2.11) заключаем, что $I_1 \leqslant I_0 \leqslant \bar{I}_0$. Кроме того, из линейности (2.11) и (1.3) следует существование оптимального управления $u_1(t)$ и траектории $x_1(t)$, на которых значение I_1 функционала (1.3) достигается [5]. Аналогичным образом строим оптимальное управление $u_k(t)$, которое доставляет минимум функционалу [(1.3) на траекториях линейной системы (2.3). Соответствующие $u_k(t)$ значение функционала (1.3) и траекторию системы (2.3) обозначим через I_k и $x_k(t)$. Дальнейшие построения аналогичны п. 2.

Именно, зафиксируем некоторое число $\bar{\beta} \geqslant \beta$, удовлетворяющее неравенству $\bar{\beta} > \beta_2(m_2)$, $m_2 = \max(m_0, m_1)$. Тогда, подобно (2.12), получаем, что для всех ε, для которых

$$\beta_2(m_0)+\varepsilon(2\alpha_2 m_0\bar\beta+\alpha_2\varepsilon\bar\beta^2)\beta_1<\bar\beta \tag{3.6}$$

$$\varepsilon\alpha_1(m_0+\varepsilon\bar\beta)\bar\beta_1<1$$

последовательность $x_k(t)$, $k\geqslant 1$ ограничена. Точнее говоря,

$$|x_k(t)|\leqslant m_0+\varepsilon\bar\beta$$

Далее, дословно повторяя рассуждения п. 2, получаем, что x_k, u_k сходятся к x, u, причем x, u удовлетворяют (1.1), (2.18), (2.19). Для оценки разности $-I_0+I(x,u)$ достаточно оценить $I(x,u)-I_1$, поскольку $I_1\leqslant I_0\leqslant I(x,u)$. Однако из (2.4) — (2.8), (2.18), используя оценки типа (2.16), (2.17), получаем, что

$$I(x,u)=I_1+O(\varepsilon^2)$$

Тем самым утверждения п. 3.2 доказаны.

3.3. Покажем, что в области $|x|\leqslant m_0+\varepsilon\bar\beta$ решение краевой задачи (1.1), (2.18) единственно.

Предположим противное. Пусть x_1, x_2 — два решения (1.1), (2.18). Тогда с учетом (2.8) имеем

$$x_1(t)-x_2(t)=\varepsilon\int_0^t z_1(t,s)\,[f(x_1(s),s)-f_2(x_2(s),s)]\,ds- \tag{3.7}$$

$$-\varepsilon\int_0^t z_1(t,s)B_1(s)\int_s^T z_1'(s,\tau)P(\tau)\,[f(x_1(\tau),\tau)-f(x_2(\tau),\tau)]\,d\tau ds$$

Положим теперь

$$\beta_0=\sup_t|x_1(t)-x_2(t)|,\quad 0\leqslant t\leqslant T \tag{3.8}$$

Тогда из (3.8), (3.7) получаем

$$\beta_0\leqslant\beta_0\varepsilon\beta_1\alpha_1(m_0+\varepsilon\bar\beta)$$

Отсюда и из (3.5) заключаем, что $x_1(t)\equiv x_2(t)$. Из этого тождества вытекает единственность решений краевой задачи (1.1), (2.18) также и по $G_1(t)$.

4. Выше было установлено существование решения задачи 1 и предложен приближенный метод ее решения. Этот метод состоит из двух этапов.

1°. Используя решение задачи 1 для линейной системы (1.1) при $\varepsilon=0$ (т. е. используя (2.2)), определить такое ε_0, чтобы при всех $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ были справедливы соотношения (3.4), (3.5). Подчеркнем, что значение ε_0 зависит только от матрицы $P(t)$ и коэффициентов управляемой системы (1.1).

2°. Для этих значений ε по формулам (2.1), (2.8) определить нулевое приближение u_0, x_0 к оптимальному управлению и траектории, а по формулам (2.4), (2.6), (2.8) — первое приближение u_1, x_1.

Отметим, что в силу (2.1), (2.4) построенные нулевое и первое последовательные приближения к оптимальному управлению получены в виде синтеза (т. е. в виде функции фазовых координат).

Рассмотрим некоторые оценки близости оптимальных значений функционала (1.3) для исходной управляемой системы (1.1) и вспомогательной динамической системы (2.3). Начнем с нулевого приближения, которое определяется формулами (2.1), (2.8) при $\varepsilon = 0$, а соответствующее значение функционала (1.3) равно

$$x'(0)\, P(0)\, x(0) \tag{4.1}$$

Из (2.18), (2.6) заключаем, что

$$|G_1(t)| \leqslant \varepsilon(\alpha_3 + \alpha_2(m_0 + \varepsilon\beta)^2)\, \sup_t \int_t^T \|P(s)\, z_1(t,s)\|\, ds \tag{4.2}$$

Соотношения (4.1), (4.2), (2.19) показывают, что разность между оптимальным значением функционала (1.3) и нулевым приближением к нему имеет порядок ε.

Первое приближение задается формулами (2.4) — (2.8), в которых следует положить $k = 1$. Используя (2.4) — (2.8), (2.16), (2.17) при $k = 1$ аналогично нулевому приближению получаем, что разность между оптимальным значением функционала (1.3) и первым приближением к нему имеет порядок ε^2, так как функции Q и Q_k — квадратуры уже оцененных величин.

Обратимся теперь к рассмотрению наиболее интересного вопроса, который состоит в следующем. Возьмем управление $u_k, k = 0, 1$, определяемое (2.4), и будем с помощью u_k управлять исходной системой (1.1). Требуется определить допускаемую при такой замене оптимального управления в системе (1.1) на u_k погрешность по функционалу (1.3). При этом достаточно установить оценку вида (2.16), поскольку из нее совершенно аналогично (4.2), (2.17), (4.2) вытекает оценка точности по функционалу.

Итак, возьмем некоторое произвольное фиксированное k и оценим разность между решением $x(t)$ задачи (1.1), (2.18), (2.19) и функцией $y(t)$, определяемой следующими соотношениями:

$$y^{\cdot}(t) = A(t)\, y(t) + \varepsilon f(y(t),\ t) - B_1(t)\,(P(t)\, y(t) + G_{1k}'(t)) \tag{4.3}$$
$$y(0) = x(0), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

где $G_{1k}(t)$ — решение уравнения (2.5).

Можно показать, что решение $y(t)$ задачи Коши (4.3) существует и удовлетворяет оценке (2.12).

Положим теперь $r(t) = x(t) - y(t)$. Тогда на основании (1.1), (2.18), (4.3), (2.7)

$$|r(t)| \leqslant \int_0^t [(A_1(s) + \varepsilon\alpha_1(m_0 + \varepsilon\beta))\,|r(s)| + 8\,|G_{1k}(s) - G_1(s)|]\, ds$$

Отсюда, применяя лемму Гронуола — Беллмана, получаем ввиду (2.17) требуемую оценку разности $x(t) - y(t)$. При этом оценка точности по функционалу устанавливается теперь подобно (2.17), (4.2). Эта оценка показывает, что управление в нулевом приближении (2.1) обеспечивает точность по функционалу порядка ε, а управление первого приближения (2.4) — порядка ε^2.

Пример. В качестве иллюстрации развитой методики рассмотрим плоскую задачу оптимального спуска управляемого осесимметрического объекта с учетом тормозящих сил атмосферы. Предполагая движение стабилизированным, систему уравнений движения центра масс запишем в виде [11]

$$v^{\cdot} = \frac{u}{m} - \frac{c_x(M)}{m} S\rho(y)\frac{v^2}{2} - g(R)\sin\theta \tag{4.4}$$

$$\theta^{\cdot} = \left[\frac{v^2}{R} - g(R)\right]\frac{\cos\theta}{v}, \quad R^{\cdot} = v\sin\theta$$

Здесь v — модуль скорости, θ — угол траектории, R — расстояние от центра земли до центра масс аппарата, $m \approx \mathrm{const}$ — масса, u — тяга, $c_x(M)$ — безразмерный коэффициент лобового сопротивления, M — число Маха, S — площадь миделева сечения, $\rho(y)$ — плотность атмосферы, $g(R)$ — ускорение свободного падения, $y = R - R_0$, R_0 — радиус Земли. Предполагается, что балансировочным углом атаки можно пренебречь, так как в дальнейшем считается $\theta \approx -{}^1/_2\,\pi$.

Если предположить силу тяжести, действующую на тело, пренебрежимо малой по сравнению с остальными силами, т. е. тягой и силой лобового сопротивления, и считать, что движение близко к вертикальному падению, т. е. $\theta = -\pi/2 + \Delta\theta$, где величиной $\Delta\theta^2$ можно пренебречь, то система уравнений движения значительно упрощается и принимает в силу (4.4) вид

$$dT/dR = -u + \gamma(R, T)\,\rho(y)\,T, \qquad 2T = mv^2 \tag{4.5}$$

$$d\cos\theta\,/\,dR = [g(R) - v^2\,/\,R]$$

где T — кинетическая энергия объекта, $\gamma = m^{-1} c_x S$ — баллистический коэффициент. Следует отметить, что с указанной точностью $\sim \Delta\theta^2$ первое уравнение интегрируется независимо от второго. Плотность атмосферы (см. [11], стр. 44, 304) можно принять равной (ρ_0, δ_1 — заданные постоянные)

$$\rho(y) = \rho_0 \exp(-\delta_1 y) \tag{4.6}$$

Далее предполагается, что баллистический коэффициент γ равен

$$\gamma = c_0 + \varepsilon\delta_2\left(\frac{2T}{mc^2}\right)^2 \exp\left[-\delta_3\left(\frac{2T}{mc^2} - 1\right)^2\right] \tag{4.7}$$

где c_0, δ_2, δ_3 — заданные постоянные, c — скорость звука в среде. Это предположение для некоторых типов бескрылых аппаратов можно считать выполненным [11].

Будем отсчитывать высоту y от точки пересечения вертикали, по которой спускается тело, с поверхностью земли и пусть даны числа y_1, y_2, $y_1 \geqslant y_2$. Значение кинетической энергии T на высоте y_1 задано и равно $T(y_1)$.

Задача. Управление u в (4.5) выбрать так, чтобы минимизировать функционал

$$I = T^2(y_2) + L_2\int_{y_2}^{y_1} u^2(s)\,ds \tag{4.8}$$

Отметим, что изменением параметра L_2 в (4.8) можно регулировать значение кинетической энергии на высоте y_2.

Рассмотрим сначале вспомогательную задачу минимизации функционала (4.8) на траекториях (4.5) без ограничения на направления вектора скорости, а затем покажем, что решения этой вспомогательной задачи при малых ε дают также решение и задачи 2. На основании (4.5) — (4.8) поставленная вспомогательная задача сводится к задаче 1. Кроме того, на основании (4.5) — (4.7) выполнены требования теоремы, которая в рассматриваемом случае и дает формулы последовательных приближений к оптимальному значению функционала (4.8).

Приведем в качестве иллюстрации некоторые вычисления.

На основании (4.5) — (4.7) оптимальное управление в нулевом приближении, разрешающее вспомогательную задачу, есть

$$u(y) = L_2^{-1}\,[T(y)\,P(y_1 - y)] \tag{4.9}$$

Здесь ввиду (2.1), (2.2)

$$P(h) = \left[z(h, y_1 - y_2) + \int_h^{y_1-y_2} B_1 z(h, s)\, ds\right]^{-1}, \qquad B_1 = L_2^{-1}$$

$$\frac{\partial z(h, s)}{\partial h} = -2c\omega\rho(y_1 - h)\, z(h, s), \qquad z(s, s) = 1$$

Из уравнения (4.5) при $\varepsilon = 0$ и из (4.6) — (4.9) легко определить нулевое приближение $T_0(y)$, а затем с помощью (2.4), (2.5) — и первое приближение T_1, u_1 решения вспомогательной задачи.

Теперь для решения задачи 2 достаточно заметить, что построенные приближения T_{1k}, u_k, $k = 0, 1, \ldots$ во вспомогательной задаче при малых ε дают также приближения и для задачи 2. Действительно, для этого достаточно лишь проверить, что последовательные приближения T_{1k} не обращаются в нуль. Для T_0 это следует ввиду (4.9), (4.5) из однородности уравнения, которому удовлетворяет T_0. Используя этот факт, равномерную ограниченность (см. п. 2) последовательных приближений вспомогательной задачи, получаем, что при соответствующем выборе ε и приближение T_1 не обращается в нуль.

Замечание. Отметим, что подобным образом можно рассмотреть задачу спуска и с учетом силы тяжести. При этом из требования необращения в нуль последовательных приближений T_k, $k = 0,1$ вспомогательной задачи выводятся ограничения, при которых задача спуска может быть сведена к задаче 1.

Поступила 9 IV 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М., «Наука», 1967.
2. *Черноусько Ф. Л.* Некоторые задачи оптимального управления с малым параметром. ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
3. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М., «Наука», 1969.
4. *Альбрехт Э. Г.* Об управлении движением нелинейных систем. Дифференциальные уравнения, 1966, т. 2, № 3.
5. *Красовский Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений. Дополнение к книге И. Г. Малкина «Теория устойчивости движения», М., «Физматгиз», 1966.
6. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
7. *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление. М., «Наука», 1971.
8. *Понтрягин Л. С.*, *Болтянский В. Г.*, *Гамкрелидзе Р. В.*, *Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1969.
9. *Габасов Р.*, *Кириллова Ф. М.* Качественная теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1970.
10. *Ли Э.*, *Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М., «Наука», 1972.
11. *Горбатенко С. А.*, *Макашов Э. М.*, *Полушкин Ю. Ф.*, *Шефтель Л. В.* Механика полета. М., Машиностроение, 1969.