Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 62—50

ЗАДАЧА УКЛОНЕНИЯ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

А. А. Чикрий

(Киев)

Рассматривается задача уклонения нестационарной конфликтно-управляемой системы от встречи с заданным целевым множеством из любой точки, не принадлежащей этому множеству, на протяжении сколь угодно большого времени. Получены достаточные условия уклонения. Работа примыкает к исследованиям [1–9].

1. Постановка задачи. Уравнение игры следующее:

$$z^{\cdot} = f(t, z, u, v), \quad z \in E^n, \quad t \in [0, \infty) \tag{1.1}$$

Здесь $f(t, z, u, v)$ — непрерывная по аргументам и непрерывно дифференцируемая по z функция, u и v — управляющие параметры игроков P и E, которые выбираются из выпуклых компактов $U(t)$ и $V(t)$, непрерывно зависящих от t и принадлежащих при всех t некоторым компактам U и V из евклидова пространства E^n. В E^n выделено терминальное множество M, которое является подпространством.

Игрок P стремится вывести траекторию системы (1.1) на множество M, цель игрока E — предотвратить эту встречу.

Предполагается, что существует такая постоянная C, что

$$(z, f(t, z, u, v)) \leqslant C(1 + \|z\|^2), \quad \forall t, \ z, \ u \in U(t), \ v \in V(t)$$

и при любых t, z, $v \in V(t)$ множество $f(t, z, U(t), v)$ выпукло.

Противники используют ε-стратегии (см. [10]). Пару (t, z) назовем позицией.

Будем говорить, что задана ε-стратегия игрока E (Γ_E), если для каждой позиции (t, z) определено число $\varepsilon(t, z)$, $\varepsilon(t, z) > 0$, и функция $\Gamma_E(\theta; t, z)$, $t \leqslant \theta \leqslant t + \varepsilon(t, z)$, удовлетворяющая условиям: $v(\theta) = \Gamma_E(\theta; t, z)$ — измеримая функция от θ, принимающая значения во множестве $V(\theta)$.

Будем говорить, что задана ε-стратегия игрока P (Γ_P), если для каждой позиции (t, z) определена функция $\Gamma_P(\theta; \varepsilon, v(\cdot), t, z)$, ставящая в соответствие позиции (t, z) числу $\varepsilon > 0$ и функции $v(\theta)$, $t \leqslant \theta \leqslant t + \varepsilon$, измеримую для $t \leqslant \theta \leqslant t + \varepsilon$ функцию $u(\theta) = \Gamma_P(\theta; \varepsilon, v(\cdot), t, z)$, принимающую значения во множестве $U(\theta)$.

Набору $(t_0, z^\circ, \Gamma_P, \Gamma_E)$ соответствует однозначно определенная траектория системы (1.1), продолжимая на полубесконечный интервал времени $[t_0, \infty)$ [10].

В игре (1.1) возможно уклонение, если существует такая стратегия Γ_E, что для любой стратегии Γ_P соответствующая траектория системы (1.1), исходящая из любой позиции (t_0, z°) $0 \leqslant t_0 < \infty$, $z^\circ = z(t_0) \overline{\in} M$, не выйдет на множество M ни при каком значении времени t, $t \geqslant t_0$.

Перейдем к формулировке результата.

Обозначим через L ортогональное дополнение к M в E^n и будем предполагать, что $\dim L = \nu \geqslant 2$. Если R — некоторое подпространство из L, то через π_R будем обозначать оператор ортогонального проектирования из E^n на R, а

$$\Psi_R = \{\psi\colon \psi \in R, \|\psi\| = 1\}$$

Не ограничивая общности, можем считать, что множество M выделено с помощью соотношений, зависящих лишь от первых m компонент вектора z, $m \leqslant n$. Обозначим $z_* = (z_1, \ldots, z_m)$, $f_* = (f_1, \ldots, f_m)$. Тогда принадлежность $z \in M$ полностью определяется вектором z_*.

Вычислим формально производные по времени от z_* в силу системы (1.1) при фиксированных управлениях

$$\frac{d^{i+1} z_*}{dt^{i+1}} = f_*^{(i)}(t, z, u, v) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_*^{(i-1)}(\cdot)}{\partial z_j} f_j(\cdot) + \frac{\partial f_*^{(i-1)}(\cdot)}{\partial t}, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

$$f_*^{(0)}(\cdot) = f_*(\cdot)$$

2. Нелинейная игра. Общий случай. Имеет место следующая теорема об уклонении.

Теорема 1. Пусть существует номер k, $k \leqslant \nu - 1$, подпространство R, $R \subset L$, $\dim R \geqslant k + 1$, и непрерывная по совокупности аргументов функция $l(t, z)$ со значениями в R такие, что

а) функция $f(t, z, u, v)$ непрерывна по совокупности аргументов, функция $f_*(t, z, u, v)$ непрерывно дифференцируема по (t, z) до порядка $k - 1$ включительно, а функции $f_j(t, z, u, v)$, $j = \overline{m + 1, n}$, непрерывно дифференцируемы по (t, z) до порядка $\overline{k - s - 2}$, где $s = s(j)$, $s \leqslant k - 1$, такой номер, что $f_*^{(i)}(t, z, u, v)$, $i = \overline{0, s - 1}$, не зависит от z_j, а $f_*^{(s)}(t, z, u, v)$ уже зависит;

б) множества $\pi_R f_*^{(i)}(t, z, U(t), V(t))$, $i = \overline{0, k - 2}$, состоят из одной точки при любых t, z, $t \geqslant 0$;

в) $\min\limits_{\psi \in \Psi_R} \max\limits_{v \in V(t)} \min\limits_{u \in U(t)} (\psi, f_*^{(k-1)}(t, z, u, v) - l(t, z)) > 0$

для всех t, z, $t \geqslant 0$, $z \in M$.

Тогда в игре (1.1) возможно уклонение.

Доказательство. Окружим подпространство M слоем

$$S(t) = \{z\colon \min_{\psi \in \Psi_R} \max_{v \in V(t)} \min_{u \in U(t)} (\psi, f_*^{(k-1)}(t, z, u, v) - l(t, z)) > 0\}$$

и рассмотрим позицию (t_0, z°), такую, что $z^\circ \in S(t_0) \setminus M$.

Зафиксируем элемент v_0 из $V(t_0)$, удовлетворяющий условию

$$\max_{v \in V(t_0)} \min_{u \in U(t_0)} (\psi_0, f_*^{(k-1)}(t_0, z^\circ, u, v)) = \min_{u \in U(t_0)} (\psi_0, f_*^{(k-1)}(t_0, z^\circ, u, v_0)) \tag{2.1}$$

где вектор ψ_0 принадлежит Ψ_R и удовлетворяет системе линейных неравенств

$$(\psi_0, z^\circ) \geqslant 0, \quad (\psi_0, l(t_0, z^\circ)) \geqslant 0 \tag{2.2}$$
$$(\psi_0, f_*^{(i)}(t_0, z^\circ, u, v)) \geqslant 0, \quad i = \overline{0, k-2}$$

Система (2.2) разрешима относительно ψ_0, так как имеет место условие б) и $k+1 \leqslant \nu$.

Через $\Omega_r(z)$ обозначим шар в E^n радиуса r с центром в точке z. В силу условия в) и предположений о параметрах игры можно выбрать $\Omega_{r_0}(z^\circ)$ и интервал времени $[t_0, t_0+\delta_1]$, $\delta_1 > 0$, настолько малыми, чтобы для $z \in \Omega_{r_0}(z^\circ)$ и $t \in [t_0, t_0+\delta_1]$ по непрерывности выполнялось неравенство

$$\min_{u \in U(t)} (\psi_0, f_*^{(k-1)}(t, z, u, v_0) - l(t_0, z^\circ)) \geqslant 0 \tag{2.3}$$

Из предположений о множествах $U(t)$ и $V(t)$ и функции $f(t, z, u, v)$ с использованием леммы Гронуолла [11] получим, что существует такое $\delta_2 > 0$, что траектория системы (1.1), начинающаяся в точке $z^\circ = z(t_0)$ с измеримым управлением $u(t)$, $u(t) \in U(t)$, и $v(t) = v_0$ не выйдет из $\Omega_{r_0}(z^\circ)$ в течение времени δ_2. Обозначим через $\tau_0 = \min(\delta_1, \delta_2)$ и построим стратегию уклонения $\Gamma_E{}^*$. Для этого положим $\varepsilon(t_0, z^\circ) = \tau_0$, $v(t) = v_0, t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \tau_0$. Тогда согласно стратегии Γ_P определится управление $u(t)$ и систему (1.1) можно проинтегрировать на отрезке $[t_0, t_0+\tau_0]$, получив траекторию $z(t)$.

Пусть позиция (t_0, z°) такова, что $z^\circ \overline{\in} S(t_0)$. Выберем $\Omega_{r_0}(z^\circ)$ из условия $\Omega_{r_0}(z^\circ) \cap M = \phi$. Тогда существует $\tau_0 > 0$, такое, что траектория системы (1.1), начинающаяся в точке $z^\circ = z(t_0)$ с измеримыми управлениями $u(t)$ и $v(t)$, $u(t) \in U(t)$, $v(t) \in V(t)$, не выйдет из $\Omega_{r_0}(z^\circ)$ в течение времени τ_0. Положив $\varepsilon(t_0, z^\circ) = \tau_0$ и выбрав некоторое измеримое управление $v(t)$, $v(t) \in V(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \tau_0$, построим стратегию уклонения $\Gamma_E{}^*$. Согласно Γ_P определится управление $u(t)$ и, проинтегрировав систему (1.1) на $[t_0, t_0+\tau_0]$, получим траекторию $z(t)$.

Рассмотрим проекцию первых m компонент траектории $z(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \tau_0$, $z^\circ \in S(t_0) \setminus M$, соответствующей паре стратегий $(\Gamma_P, \Gamma_E{}^*)$, на направление ψ_0.

Согласно формуле Тейлора [12] в силу условия а)

$$(\psi_0, z_*(t)) = (\psi_0, z_*{}^\circ) + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(t-t_0)^i}{i!} (\psi_0, f_*^{(i-1)}(t_0, z^\circ, u, v)) + R_k \tag{2.4}$$

$$R_k = \int_{t_0}^{t} \frac{(t-t_0-\zeta)^{k-1}}{(k-1)!} (\psi_0, f_*^{(k-1)}(\zeta, z(\zeta), u(\zeta), v_0)) d\zeta =$$
$$= \int_{t_0}^{t} \frac{(t-t_0-\zeta)^{k-1}}{(k-1)!} (\psi_0, f_*^{(k-1)}(\zeta, z(\zeta), u(\zeta), v_0) - l(t_0, z^\circ)) d\zeta +$$
$$+ \frac{(t-t_0)^k}{k!} (\psi_0, l(t_0, z^\circ))$$

Из формулы (2.4) с учетом соотношений (2.1) — (2.3) следует, что

$$(\psi_0, z_*(t)) > 0 \quad \text{для} \quad t_0 < t \leqslant t_0 + \tau_0 \tag{2.5}$$

Обозначим через $\bar{S}(t)$ компакт, непрерывно зависящий от t, такой, что $\bar{S}(t) \subset S(t)$ при любом t, $t \geqslant 0$. Покажем, что на множестве

$$Z' = \{\zeta, \bar{S}(\zeta)\}_{\zeta \in [t_0', T]} \tag{2.6}$$

можно выбрать $\varepsilon(t, z) \geqslant \tau > 0$, где τ зависит лишь от t_0', T и $\bar{S}(t)$.

Из условия в) следует

$$\min_{t \in [t_0', T]} \min_{z \in \bar{S}(t)} \min_{\psi \in \Psi_R} \max_{v \in V(t)} \min_{u \in U(t)} (\psi, f_*^{(k-1)}(t, z, u, v) - l(t, z)) = \Delta > 0 \tag{2.7}$$

Тогда в силу непрерывности по совокупности аргументов функции из (2.7) для данного Δ, существуют такие $\delta > 0$ и $r > 0$, что при $t \in [t_0, t_0 + \delta]$, $z \in \Omega_r(z^\circ)$ для любой позиции $(t_0, z^\circ) \in Z'$ функция

$$\min_{u \in U(t)} (\psi_0, f_*^{(k-1)}(t, z, u, v_0) - l(t_0, z^\circ))$$

остается неотрицательной.

Траектория $z(t)$, являющаяся абсолютно непрерывной функцией, удовлетворяет во множестве $\bigcup_{\zeta \in [t_0', T]} \bar{S}(\zeta)$ условию Липшица с постоянной K, и, следовательно, в течение времени $t^\circ = r/K$ функция $z(t)$, $z(t_0) = z^\circ$ не выйдет из множества $\Omega_r(z^\circ)$.

Таким образом, для любой позиции $(t, z) \in Z'$ можно выбрать

$$\varepsilon(t, z) \geqslant \min(\delta, t^\circ) = \tau > 0$$

Ранее показано, что для любой позиции (t_0, z°), $z^\circ \in S(t_0) \setminus M$, существует вектор ψ_0, $\psi_0 \in \Psi_R$, такой, что на некотором отрезке времени $[t_0, t_0 + \tau_0]$ проекция траектории $z_*(t)$ на направление ψ_0, монотонно возрастает, оставаясь положительной, и, следовательно, $z(t)$ не может пересечь множество M на отрезке $[t_0, t_0 + \tau_0]$. Из построения стратегии Γ_E^* для позиции (t_0, z°), $z^\circ \,\overline{\in}\, S(t_0)$, также следует, что на некотором отрезке времени $[t_0, t_0 + \tau_0]$ $z(t)$ не пересечет M.

Предположим теперь, что траектория $z(t)$, начавшаяся из точки $z^\circ = z(t_0) \,\overline{\in}\, M$, в некоторый конечный момент времени t_1, $t_1 > t_0$, впервые пересечет множество M, т. е. $(\psi, z_*(t_1)) \leqslant 0$ для всех $\psi \in L$. Тогда в силу предположений о параметрах игры (1.1) $z(t)$, $t_0 \leqslant \bar{t} \leqslant t \leqslant t_1$ принадлежит некоторому компактному множеству $\bar{S}(t)$, такому, что $\bar{S}(t) \subset S(t)$ при всех t, $t \geqslant 0$. По доказанному ранее на множестве $\{\zeta, \bar{S}(\zeta)_{\zeta \in [\bar{t}, t_1]}\}$ можно выбрать $\varepsilon(t, z) \geqslant \tau > 0$.

Пусть $t_1 = t_* + \beta$, где $\beta \leqslant \varepsilon(t_*, z(t_*))$, $t_* > \bar{t}$, t_* — момент выдачи управления $v(t)$.

Тогда $\varepsilon(t_*, z(t_*)) \geqslant \tau$ и согласно (2.5) существует вектор $\psi_* \in \Psi_R$, $R \subset L$, такой, что

$$(\psi_*, z_*(t)) > 0 \quad \text{для} \quad t_* < t \leqslant t_* + \varepsilon(t_*, z(t_*))$$

что приводит к противоречию. Тем самым теорема 1 доказана.

3. Нелинейная игра с отделенной нелинейной управляющей частью. Предположим, что в уравнении движения (1.1) правая часть имеет вид

$$f(t, z, u, v) = g(t, z) + h(t, u, v)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть функции $g(t, z)$ и $h(t, u, v)$ непрерывны по совокупности аргументов, существует двумерное подпространство R, $R \subset L$, и непрерывная функция $l(t)$ со значениями в R, такие, что

$$\min_{\psi \in \Psi_R} \max_{v \in V(t)} \min_{u \in U(t)} (\psi, h(t, u, v) - l(t)) > 0, \qquad t \in [0, \infty)$$

Тогда в игре (1.1) возможно уклонение.

Доказательство. Рассуждения проводятся аналогично доказательству теоремы 1 с той лишь разницей, что в качестве $S(t)$ берется $E^n \setminus M$ и для позиции (t_0, z°), $z^\circ \overline{\in} M$, элемент v_0 из $V(t_0)$ выбирается из соотношения

$$\max_{v \in V(t_0)} \min_{u \in U(t_0)} (\psi_0, h(t_0, u, v)) = \min_{u \in U(t_0)} (\psi_0, h(t_0, u, v_0))$$

причем $\psi_0 \in \Psi_R$, $(\psi_0, z^\circ) \geqslant 0$, $(\psi_0, g(t_0, z^\circ) + l(t_0)) \geqslant 0$.

Неравенство (2.3) заменяется на следующее:

$$(\psi_0, g(t, z)) + \min_{u \in U(t)} (\psi_0, h(t, u, v_0)) \geqslant 0$$

Множество Z' приобретает вид $[t_0', T] \times Z$, где Z — компакт из E^n, а соотношение (2.7) заменяется на

$$\min_{t \in [t_0', T]} \min_{\psi \in \Psi_R} \max_{v \in V(t)} \min_{u \in U(t)} (\psi, h(t, u, v) - l(t)) = \Delta > 0$$

4. Линейная игра с нелинейной управляющей частью. Пусть в уравнении движения (1.1) правая часть имеет вид

$$f(t, z, u, v) = A(t) z + h(t, u, v)$$

где $A(t)$ —квадратная матрица размерности $n \times n$. Обозначим через $a_i(t)$ i-ю строку матрицы $A(t)$, а через $A_*(t)$ — матрицу, состоящую из первых m строк матрицы $A(t)$.

Образуем формально последовательность матриц с помощью рекуррентного соотношения

$$B_i(t) = B_{i-1}(t) A(t) + B_{i-1}^{\boldsymbol\cdot}(t), \quad i = 1, 2, \ldots$$

где $B_0(t) = A_*(t)$, а символ $B^{\boldsymbol\cdot}(t)$ означает производную от матрицы $B(t)$.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть существует номер k, $k \leqslant \nu - 1$, подпространство R, $R \subset L$, $\dim R \geqslant k + 1$, и непрерывная функция $l(t)$ со значениями в R, такие, что

а) функция $h(t, u, v)$ непрерывна по совокупности аргументов, матрица $A_*(t)$ и функция $h_*(t, u, v)$ непрерывно дифференцируемы по t до порядка $k - 1$ включительно, функции $a_j(t)$, $h_j(t, u, v)$, $j = \overline{m + 1, n}$, непрерывно дифференцируемы по t до порядка $k - s - 2$, где $s = s(j) \leqslant k - 1$ — такой номер, что $B_i(t) z$, $i = \overline{0, s - 1}$, не зависит от z_j, а $B_s(t) z$ уже зависит, б) множества $\pi_R B_i(t) h(t, U(t), V(t))$, $i = \overline{0, k-3}$, состоят из одной точки при $t \in [0, \infty)$;

в) $\min\limits_{\psi \in \Psi_R} \max\limits_{v \in V(t)} \min\limits_{u \in U(t)} (\psi, B_{k-2}(t) h(t, u, v) - l(t)) > 0$

для всех $t \in [0, \infty)$.

Тогда в игре (1.1) возможно уклонение.

Доказательство. Рассмотрим позицию (t_0, z°), $z^\circ \overline{\in} M$. Зафиксируем элемент v_0 из $V(t_0)$, удовлетворяющий условию

$$\max_{v \in V(t_0)} \min_{u \in U(t_0)} (\psi_0, B_{k-2}(t_0) h(t_0, u, v)) = \min_{u \in U(t_0)} (\psi_0, B_{k-2}(t_0) h(t_0, u, v_0)) \tag{4.1}$$

причем ψ_0 принадлежит Ψ_R и удовлетворяет системе линейных неравенств

$$(\psi_0, z^\circ) \geqslant 0 \tag{4.2}$$

$$(\psi_0, B_i(t_0) z^\circ + h_*^{(i)}(t_0, u, v)) \geqslant 0, \quad i = \overline{0, k-2}$$

$$\left(\psi_0, B_{k-1}(t_0) z^\circ + \left.\frac{\partial h_*^{(k-2)}(t, u, v)}{\partial t}\right|_{t=t_0} + l(t_0)\right) \geqslant 0$$

$$h_*^{(i)}(t, u, v) = B_{i-1}(t) h(t, u, v) + \frac{\partial h_*^{(i-1)}(t, u, v)}{\partial t}, \quad i = \overline{1, k-1}$$

$$h_*^{(0)}(t, u, v) = h_*(t, u, v)$$

Неравенства (4.2) в силу условия б) от u и v не зависят.

Из соотношений (4.1), (4.2) и условия в) получим

$$(\psi_0, B_{k-1}(t_0) z^\circ) + \min_{u \in U(t_0)} (\psi_0, h_*^{(k-1)}(t_0, u, v_0)) =$$

$$= \left(\psi_0, B_{k-1}(t_0) z^\circ + \left.\frac{\partial h_*^{(k-2)}(t, u, v)}{\partial t}\right|_{t=t_0} + l(t_0)\right) +$$

$$+ \min_{u \in U(t_0)} (\psi_0, B_{k-2}(t_0) h(t_0, u, v_0) - l(t_0)) > 0$$

Следовательно, существует $\Omega_{r_0}(z^\circ)$ и интервал времени $[t_0, t_0 + \delta_1]$, $\delta_1 > 0$, настолько малые, что

$$(\psi_0, B_{k-1}(t) z) + \min_{u \in U(t)} (\psi_0, h_*^{(k-1)}(t, u, v_0)) \geqslant 0$$

Из предположений о параметрах игры (1.1) вытекает существование такого $\delta_2 > 0$, что траектория системы (1.1), начинающаяся в точке $z^\circ = z(t_0)$ с измеримым управлением $u(t)$, $u(t) \in U$, и $v(t) = v_0$, не выйдет из $\Omega_{r_0}(z^\circ)$ в течение времени δ_2. Положив $\tau_0 = \min(\delta_1, \delta_2)$, $\varepsilon(t_0, z^\circ) = \tau_0$ и $v(t) = v_0$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \tau_0$, построим стратегию $\Gamma_E{}^*$. Согласно стратегии Γ_P определится управление $u(t)$, и систему (1.1) можно проинтегрировать на отрезке $[t_0, t_0 + \tau_0]$, получив траекторию $z(t)$.

Из формулы Тейлора с учетом соотношений (4.1), (4.2) и условия в) получим оценку для проекции траектории $z_*(t)$, соответствующей набору $(t_0, z^\circ, \Gamma_P, \Gamma_E^*)$, на направление ψ_0

$$(\psi_0, z_*(t)) > 0, \quad t_0 < t \leqslant t_0 + \tau_0$$

Покажем, что на множестве $[t_0', T] \times Z$, где Z — компакт из E^n, можно выбрать $\varepsilon(t, z) \geqslant \tau > 0$, где τ зависит лишь от этого множества.

В силу условия в)

$$\min_{t\in[t_0',T]}\ \min_{\psi\in\Psi_R}\ \max_{v\in V(t)}\ \min_{u\in U(t)} (\psi, B_{k-2}(t)h(t,u,v)-l(t))=\Delta>0$$

Тогда существуют такие $\delta>0$ и $r>0$, что при $t\in[t_0,\ t_0+\delta]$, $z\in\in\Omega_r(z^\circ)$, где (t_0, z°) — произвольная позиция из $[t_0',\ T]\times Z$, функция

$$(\psi_0, B_{k-1}(t)z)+\min_{u\in U(t)}(\psi_0, h_*^{(k-1)}(t,u,v_0))$$

остается неотрицательной.

Траектория $z(t)$ удовлетворяет в Z условию Липшица с постоянной K и, следовательно, в течение времени $t^\circ=\delta/K$ не выйдет из $\Omega_r(z^\circ)$.

Таким образом, для любой позиции $(t,\ z)\in[t_0',\ T]\times Z$ можно выбрать

$$\varepsilon(t,\ z)\geqslant\min(\delta,\ t^\circ)=\tau>0$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны заключительной части доказательства теоремы 1.

5. Линейная игра с линейной управляющей частью. Предположим, что в уравнении движения (1.1) правая часть имеет вид

$$f(t,\ z,\ u,\ v)=A(t)z-u+v$$

Обозначим через $W_X(\psi)$ опорную функцию выпуклого замкнутого множества X, $B^*(t)$ матрица, сопряженная к $B(t)$. Для сравнения с результатом работы [8] приведем следующее следствие, которое вытекает из теоремы 3.

Следствие. Пусть существует номер k, $k\leqslant\nu-1$, подпространство R, $R\subset L$, $\dim R\geqslant k+1$, и непрерывная функция $l(t)$ со значениями в R, такие, что

а) матрица $A_*(t)$ непрерывно дифференцируема до порядка $k-1$ включительно, а функции $a_j(t)$, $j=\overline{m+1,\ n}$, непрерывно дифференцируемы до порядка $k-s-2$, где $s=s(j)\leqslant k-1$ — такой номер, что $B_i(t)z$, $i=\overline{0,\ s-1}$, не зависит от z_j, а $B_s(t)z$ уже зависит;

б) множества $\pi_R B_i(t)(-U(t)+V(t))$, $i=\overline{0,\ k-3}$, состоят из одной точки при $t\in[0,\ \infty)$;

в) $\min\limits_{\psi\in\Psi_R}[W_{V(t)}(B_{k-2}^*(t)\psi)-W_{U(t)}(B_{k-2}^*(t)\psi)-(\psi, l(t))]>0$

для всех $t\in[0,\ \infty)$.

Тогда в игре (1.1) возможно уклонение.

6. *Пример.* Законы движения преследующего и преследуемого задаются соответственно уравнениями

$$x^{(p)}+C_1(t)x^{(p-1)}+\ .\ .\ .\ +C_{p-1}(t)x^{\cdot}+C_p(t)x=u$$

$$y^{(q)}+D_1(t)y^{(q-1)}+\ .\ .\ .\ +D_{q-1}(t)y^{\cdot}+D_q(t)y=v$$

Здесь x, y — векторы евклидова пространства E^n, $n\geqslant2$, $x^{(i)}$, $y^{(i)}$ — производные порядка i по времени от x, y. $C_i(t)$, $i=\overline{1,p}$, $D_j(t)$, $j=\overline{1,q}$ — матрицы, непрерывно зависящие от t, $t\in[0,\infty]$, $u\in\bar U(t)$, $v\in\bar V(t)$, где $\bar U(t)$, $\bar V(t)$ — выпуклые компакты из E^n, непрерывно зависящие от t и принадлежащие при каждом t некоторым компактам U, V. Терминальное множество $M=\{(x,\ y)\colon\ x=y\}$.

Предполагается, что $q \leqslant n-1$ и $\dim \overline{V}(t) = n$, $t \in [0, \infty)$.

Положив

$$z_1 = x,\ z_2 = x^{\cdot},\ \ldots,\ z_p = x^{(p-1)},\ z_{p+1} = y,\ z_{p+2} = y^{\cdot},\ \ldots,\ z_{p+q} = y^{(q-1)}$$

перейдем к эквивалентной системе дифференциальных уравнений.

В рассматриваемом случае M задается уравнением

$$z_1 = z_{p+1},\ L = \{\underbrace{\alpha, 0, \ldots, 0}_{p}, -\alpha, 0, \ldots, 0\}$$

где α — произвольный вектор из E^n.

Обозначим

$$U(t) = \{(\underbrace{0, \ldots, 0}_{p-1}, -u, 0, \ldots, 0) : u \in \overline{U}(t)\}$$

$$V(t) = \{(\underbrace{0, \ldots, 0}_{p+q-1}, v) : v \in \overline{V}(t)\}$$

где 0 — нуль-вектор пространства $E^n q$.

Нетрудно проверить, что при $q \leqslant p$

$$\pi_L B_i(t)(-U(t) + V(t)) = (0, \ldots, 0),\ i = \overline{0, q-2}$$

а, значит, $\pi_R B_i(t)(-U(t) + V(t)) = (0, \ldots, 0)$ для любого $R \subset L$.

Согласно следствию для возможности уклонения достаточно выполнения одного из условий: 1) $q < p$; 2) при $q = p$ существует подпространство R, $R \subset L$, $\dim R \geqslant q + 1$, и непрерывная функция $l(t)$ со значениями в R, такие, что

$$\min_{\psi \in \Psi_R} [W_{\overline{V}(t)}(\psi) - W_{\overline{U}(t)}(\psi) - (\psi, l(t))] > 0, \quad \forall t \in [0, \infty)$$

Поступила 9 IX 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
2. *Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф.* Задача об уклонении от встречи в линейных дифференциальных играх. Дифференциальные уравнения, 1971, т. 7, № 3.
3. *Понтрягин Л. С.* Линейная дифференциальная игра убегания. Тр. матем. ин-та, т. 112, 1971.
4. *Красовский Н. Н.* Дифференциальная игра сближения — уклонения. I. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973, № 2.
5. *Красовский Н. Н.* Дифференциальная игра сближения — уклонения. II. Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1973, № 3.
6. *Пшеничный Б. Н., Чикрий А. А.* Задача об уклонении от встречи в дифференциальных играх. Ж. выч. матем. и матем. физ., 1974, т. 14, № 6.
7. *Никольский М. С.* Об одном способе убегания. Докл. АН СССР, 1974, т. 214, № 2.
8. *Григоренко Н. Л.* Задача уклонения от встречи в нестационарных линейных дифференциальных играх. Кибернетика, 1973, № 6.
9. *Чикрий А. А.* Задача об уклонении от встречи с терминальным множеством, обладающим кусочно-гладкой границей. Кибернетика, 1974, № 5.
10. *Pschenitchny B. N.* ε-strategies in differential games. Topics in differential games, edited by Austin Blaguiere, New York — London — Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1973.
11. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
12. *Картан А.* Дифференциальное исчисление — дифференциальные формы. М., «Мир», 1971.