Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 62 — 50

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА СБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

И. Ф. Вайсбурд, Ю. С. Осипов

(Свердловск)

Указываются достаточные условия успешного завершения процесса сближения с заданной целью управляемой системы, описываемой дифференциальным уравнением в гильбертовом пространстве с неограниченным, вообще говоря, оператором. В основе рассуждений лежит способ построения разрешающих управлений по принципу обратной связи, играющий здесь роль принципа экстремального прицеливания Н. Н. Красовского [1,2]. Рассматриваемый класс управляемых систем включает, например, некоторые системы, описываемые уравнениями с частными производными параболического и гиперболического типов [3–11].

Работа примыкает к исследованиям [1, 2, 12–17].

1. Рассмотрим управляемую систему

$$x^{\bullet}(t) = A_1 x(t) + A_2 u - A_3 v + w(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{1.1}$$

Здесь $x(t)$ — состояние объекта в момент времени t, являющееся элементом действительного гильбертова пространства H_1; u, v — управляющие параметры, стесненные ограничениями $u \in P \subset H_2$, $v \in Q \subset H_3$; P, Q — выпуклые ограниченные замкнутые множества, H_2, H_3 — действительные рефлексивные банаховы пространства; A_i $(i = 1, 2, 3)$ — линейный оператор из H_i в H_1, ограниченный при $i = 2, 3$, причем A_1 порождает в H_1 сильно непрерывную полугруппу [18] $\{F(t), \ t \geqslant 0\}$, удовлетворяющую условию $\| F(t) \|_1 \leqslant \exp \omega t$, $t \geqslant 0$ при некотором ω ($\| \cdot \|_i$ — символ нормы в H_i); $w(t)$ — заданная интегрируемая на $[t_0, \vartheta]$ функция (здесь и в дальнейшем интегрируемость понимается в смысле Бохнера, измеримость (сильная) — в смысле Лебега, производная в (1.1) понимается как предел по норме H_1 соответствующего конечно-разностного соотношения [18]).

Рассматриваемая задача сближения состоит в следующем. В пространстве H_1 задано замкнутое множество M. Требуется указать способ формирования воздействия u по принципу обратной связи ($u[t] = u(t, x(t))$), обеспечивающий встречу точки $x(t)$ с целью M в момент $t = \vartheta$ при любом способе формирования воздействия v, вырабатывающем измеримую реализацию $v[t]$ при почти всех t со значениями в Q. (В частности, не исключается способ формирования воздействия v, использующий в каждый момент времени t информацию об управлении $u[t]$ в этот же момент времени.)

Описанная задача сближения рассматривалась в [13], где, в частности, предложена ее математическая формализация, сформулированы необходимые и достаточные условия разрешимости и способ построения разрешающих управлений [1]. В общем случае проверка этих условий и построение стратегий сближения весьма затруднительны. Однако подобно [1, 2, 15] можно указать (и в этом состоит цель данной работы) широкий класс управляемых систем, когда можно такую проверку осуществить достаточно просто и эффективно конкретизировать указанную в [13] процедуру построения стратегии сближения.

2. Уточним постановку задачи. Назовем стратегией U правило, ставящее в соответствие каждой позиции $p = \{t, x\}$, $t \in [t_0, \vartheta]$, $x \in H_1$ некоторое множество $U(p) \subset P$. Пусть Δ — конечное разбиение $[t_0, \vartheta]$ точками τ_i $(\tau_0 = t_0,\ \tau_i < \tau_{i+1},\ i = 0, \ldots, m(\Delta))$, $\delta(\Delta) = \max_i(\tau_{i+1} - \tau_i)$. Функцию $x(t)_\Delta = x(t, p_0, U)_\Delta$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, равную

$$x(t)_\Delta = F(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} F(t - \xi)(A_2 u[\xi] - A_3 v[\xi] + w(\xi))\, d\xi$$

назовем движением системы (1.1) из позиции $p_0 = \{t_0, x_0\}$, отвечающим стратегии U. Здесь $u[t]$ — управление, диктуемое стратегией U: $u[t] = u[\tau_i] \in U(\tau_i, x(\tau_i)_\Delta)$, $\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$; $i = 0, \ldots, m(\Delta)$; $v[t]$ — какая-то измеримая реализация управления v при почти всех t со значениями в Q.

Исходная проблема управления формализуется следующим образом [13].

Пусть M^ε — замкнутая ε-окрестность M в H_1.

Задача 2.1. Требуется построить стратегию U со свойством: каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, существует число $\delta_0 > 0$, такое, что для всех движений $x(t)_\Delta = x(t, p_0, U)_\Delta$ с $\delta(\Delta) \leqslant \delta_0$ выполняется включение $x(\vartheta)_\Delta \in M^\varepsilon$.

В п. 3 указываются достаточные условия разрешимости задачи 2.1.

Замечание 2. 1. Понятие движения $x(t)_\Delta$ отвечает понятию решения уравнения (1.1) в обобщенном смысле (см. [3—7]). Разумеется, если начальное состояние x_0 принадлежит области определения оператора A_1 и реализация управления v (и возмущение w) — достаточно гладкая функция времени, то движение на каждом интервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$ — классическое решение уравнения (1.1)

3. Для дальнейшего потребуются некоторые понятия из [13]. Пусть имеется система непустых множеств $B_t \subset H_1$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$. Для $x \in H_1$ обозначим $r(t, x) = \inf \| x - y \|_1$, $y \in B_t$. Пусть $Z(x, B_t)$ — совокупность всех слабых пределов всевозможных слабо сходящихся в H_1 последовательностей $\{y_k\} \subset B_t$, минимизирующих функционал $\| x - y \|_1$. Оче-

[1] Аналогичные вопросы обсуждались в работе: Осипов Ю. С. Дифференциальные игры в системах с распределенными параметрами. Тезисы докладов III Всес. совещания по теории игр. Одесса, 1974.

видно, $Z(x, B_t) \neq \phi$. Стратегия

$$U^e = U^e(t, x) = \{u^e \mid \langle A_2^*(y-x), u^e\rangle_2 = \max_{u \in P} \langle A_2^*(y-x), u\rangle_2, \ y \in Z(x, B_t)\} \tag{3.1}$$

называется экстремальной к множествам B_t, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ [13]. (Здесь и далее A^* — оператор, сопряженный к оператору A, $\langle f, z\rangle_i$ — значение функционала f на элементе $z \in H_i$).

Данное понятие стратегии U^e является естественным развитием понятия экстремальной стратегии из [1, 2, 15, 16].

Замечание 3.1. По определению, стратегия U — вообще говоря, многозначное отображение $[t_0, \vartheta] \times H_1$ в P. Нетрудно видеть, что все сказанное в данной работе сохранится, если ограничиться однозначными отображениями. При этом под U^e следует понимать правило, ставящее в соответствие каждой позиции p некоторый элемент u^e, определенный в (3.1).

Измеримые на некотором промежутке времени функции $u(t)$ ($v(t)$) при почти всех t со значениями в P (Q) будем называть программами. Систему непустых множеств B_t, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ назовем сильно u-стабильной, если выполняется условие: каковы бы ни были величины $t_* \in [t_0, \vartheta)$, $t^* \in (t_*, \vartheta]$, $x_* \in B_{t_*}$ и программа $v(t)$, $t_* \leqslant t \leqslant t^*$, существует программа $u(t)$, $t_* \leqslant t \leqslant t^*$, со свойством

$$F(t^* - t_*)x_* + \int_{t_*}^{t^*} F(t^* - \xi)(A_2 u(\xi) - A_3 v(\xi) + w(\xi))\, d\xi \in B_{t^*}$$

Справедливо следующее утверждение, раскрывающее свойство стратегии U^e.

Лемма 3.1. Стратегия U^e, экстремальная к системе сильно u-стабильных множеств B_t, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, обладает свойством: каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, существуют числа $\delta_0 > 0$ и $\alpha > 0$, такие, что для любого движения $x(t)_\Delta = x(t, \{t_0, x_0\}, U^e)_\Delta$ выполняется неравенство $r(t, x(t)_\Delta) < \varepsilon$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, если только $\delta(\Delta) \leqslant \delta_0$ и $r(t_0, x_0) \leqslant \alpha$.

Доказательство леммы проводится по плану доказательства аналогичных утверждений из [1, 14, 16].

При условии стабильности множеств B_t и при наличии оценки $\| F(t) \|_1 \leqslant \exp \omega t$ способ выбора управлений $u^e[t]$, порождающих движения $x(t, p_0, U^e_\Delta)$ в соответствии с правилом (3.1), гарантирует неравенство

$$r^2(\tau_{i+1}, x(\tau_{i+1})_\Delta) \leqslant (1 + \omega\delta(\Delta))\, r^2(\tau_i, x(\tau_i)_\Delta) + o(\delta(\Delta))$$

где $o(\delta)/\delta \to 0$ при $\delta \to 0$. Отсюда выводится, что, каково бы ни было число $\beta > 0$, все движения $x(t)_\Delta = x(t, p_0, U^e)_\Delta$ удовлетворяют неравенству

$$r(t, x(t)_\Delta) \leqslant \beta \exp 2\omega(t - t_0), \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$$

если только $\delta(\Delta) \leqslant \delta_0$, $r(t_0, x_0) \leqslant \alpha$, где $\delta_0 > 0$ и $\alpha > 0$ — достаточно малые числа. Это доказывает утверждение леммы.

Из леммы *3.1* вытекает, очевидно

Теорема 3.1. Пусть имеется система B_t, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, сильно u-стабильных множеств, причем $B_\vartheta \subset M$. Если $r(t_0, x_0) = 0$, то стратегия U^e, экстремальная к этой системе множеств, разрешает задачу 2.1.

В связи с теоремой 3.1 возникает вопрос о существовании и построении системы множеств с указанными свойствами. В качестве такой системы множеств может быть выбрана совокупность множеств K_t, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, из [13] (при условии, что $K_{t_0} \neq \phi$; если же $K_{t_0} = \phi$, то задача 2.1 решения заведомо не имеет [13]). Построение множеств K_t в общем случае весьма затруднительно. Однако, как и в [1,15], можно выделить случаи, когда множества K_t допускают эффективное описание.

Обсудим этот вопрос.

4. Всюду ниже будет предполагаться, что M — выпуклое замкнутое ограниченное множество в H_1. Обозначим символом N_{t_*} совокупность всех элементов $x \in H_1$ со свойством: какова бы ни была программа $v(t)$, $t_* \leqslant t \leqslant \vartheta$ существует программа $u(t)$, $t_* \leqslant t \leqslant \vartheta$, для которой

$$x_{u,v}(\vartheta; t_*, x) = F(\vartheta - t_*)x + \int_{t_*}^{\vartheta} F(\vartheta - t)(A_2 u(t) - A_3 v(t) + w(t))\, dt \in M \tag{4.1}$$

Пусть $\{u\}_q$ означает совокупность всех программ $u(t)$ на промежутке q. Используя теорему об отделимости выпуклых множеств [6, 17], нетрудно проверить (см., например, [15]), что справедлива

Лемма 4.1. $x \in N_t$ тогда и только тогда, когда

$$\gamma(t, x) = \sup_\eta \varphi(\eta, t, x) \leqslant 0, \quad \|\eta\|_1 \leqslant 1 \tag{4.2}$$

Здесь

$$\varphi(\eta, t, x) = \rho_v(\eta, t) - \rho_u(\eta, t) + \min_{q \in M} \langle \eta, q \rangle_1 - \int_t^{\vartheta} \langle \eta, F(\vartheta - \xi) w(\xi) \rangle_1 \, d\xi - \langle \eta, F(\vartheta - t) x \rangle_1$$

$$\rho_v(\eta, t) = \max_{v \in \{v\}_{[t,\vartheta]}} \int_t^{\vartheta} \langle \eta, F(\vartheta - \xi) A_3 v(\xi) \rangle_1 \, d\xi$$

$$\rho_u(\eta, t) = \max_{u \in \{u\}_{[t,\vartheta]}} \int_t^{\vartheta} \langle \eta, F(\vartheta - \xi) A_2 u(\xi) \rangle_1 \, d\xi$$

Введем следующие условия.

Условие А. Для любого $t \in [t_0, \vartheta]$ функционал

$$\chi(\eta, t) = \rho_v(\eta, t) - \rho_u(\eta, t) + \min_{q \in M} \langle \eta, q \rangle_1 \tag{4.3}$$

слабо полунепрерывен сверху в H_1 и при $\gamma(t, x) > 0$ верхняя грань в (4.2) достигается на единственном элементе $\eta^\circ = \eta^\circ(t, x)$.

Условие Б. Для любого $t \in (t_0, \vartheta)$ множество

$$G_u(t) = \left\{ g(u) = \int_{t_0}^{t} F(t - \xi) A_2 u(\xi)\, d\xi \mid u \in \{u\}_{[t_0, t]} \right\} \tag{4.4}$$

компактно в H_1.

Замечание 4.1. Условие А отвечает здесь условию регулярности из теории позиционных дифференциальных игр [1,2]. Это условие выполняется, например, если для любого $t \in [t_0, \nu)$ функционал $\chi(\eta, t)$ (4.3) является вогнутым по η (см. следствие 2 [13]). В самом деле, в этом случае [18] указанный функционал при каждом $t \in [t_0, \vartheta)$ будет слабо полунепрерывен сверху в H_1 и, далее, при $\gamma(t, x) > 0$ верхняя грань положительно однородного и вогнутого функционала $\varphi(\eta, t, x)$ в силу строгой выпуклости шара в H_1 будет достигаться на единственном элементе единичной сферы. В свою очередь, вогнутость $\chi(\eta, t)$ при любом t будет, например, иметь место, если существует при каждом t выпуклое множество $R(t) \subset H_1$, такое, что $F(\vartheta - t) A_2 P = F(\vartheta - t) A_3 Q + R(t)$. Это — аналог известного условия однотипности из теории дифференциальных игр [1,2]. (Справа в (4.4) стоит алгебраическая сумма множеств.)

Замечание 4.2. Условие Б выполняется, например, для широкого класса параболических систем (см. [5] и п. 5 ниже). Оно выполняется также в случае, когда $H_2 = E_n$ и $A_2 u = bu$, где $b \in H_1$, так как теперь оператор $g(u)$ из (4.4), отображающий $L_2([t_0, t], E_n)$ в H_1, как нетрудно проверить, вполне непрерывен (см. [4]).

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия А и Б. Если $N_{t_0} \neq \phi$, то при любом $t \in [t_0, \vartheta]$ будет $N_t \neq \phi$, и система множеств N_t, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, сильно u-стабильна.

Доказательство этого утверждения проводится по плану доказательства теоремы 2.1 [15] и опирается на теорему о неподвижной точке [19] и следующие ниже леммы 4.2, 4.3.

Лемма 4.2. При условии А элемент $\eta^\circ(t, x)$ при каждом фиксированном $t \in [t_0, \vartheta)$ слабо непрерывен по x на множестве $H_1 \setminus N_t$ в следующем смысле: если $\{x_k\} \subset H_1 \setminus N_t, x_k \to x \in H_1 \setminus N_t$, то $\eta^\circ(t, x_k) \rightharpoonup \eta^\circ(t, x)$.

Справедливость леммы 4.2 проверяется непосредственно.

Следствие. При условии А при каждом фиксированном $t \in [t_0, \vartheta]$ элемент $\eta^\circ(t, x)$ непрерывен на множестве $H_1 \setminus N_t$.

Это утверждение непосредственно следует из леммы 4.2, так как для любого $x \in H_1 \setminus N_t$ $\|\eta^\circ(t, x)\| = 1$ и пространство H_1 рефлексивно.

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Задача 4.1. Пусть $\gamma(t, x) > 0$ для некоторых $t \in [t_0, \vartheta]$ и $x \in H_1$. Требуется найти программу $v_0(\xi)$, $t \leqslant \xi \leqslant \vartheta$, удовлетворяющую условию: какова бы ни была программа $u(\xi)$, $t \leqslant \xi \leqslant \vartheta$

$$\min_{q \in M} \|x_{u,v_0}(\vartheta; t, x) - q\|_1 \geqslant \gamma(t, x)$$

Пусть $E(t, x)$ — множество всех элементов $\eta^\circ(t, x)$ единичной сферы H_1, на которых в (4.2) достигается верхняя грань.

Лемма 4.3. Пусть функционал $\chi(\eta, t)$ (4.3) слабо полунепрерывен сверху на H_1. Если программа $v_0(\xi)$, $t \leqslant \xi \leqslant \vartheta$ решает задачу 4.1, то существует элемент $\eta^\circ(t, x) \in E(t, x)$, для которого

$$(4.5) \qquad \int_t^\vartheta \langle \eta^\circ(t, x), F(\vartheta - \xi) A_3 v_0(\xi) \rangle_1 d\xi = \\ = \max_{v \in \{v\}_{[t, \vartheta]}} \int_t^\vartheta \langle \eta^\circ(t, x), F(\vartheta - \xi) A_3 v(\xi) \rangle_1 d\xi$$

Обратно, всякая функция, удовлетворяющая для некоторого $\eta^\circ(t, x) \in E(t, x)$ условию максимума (4.5), будет решением задачи 4.1.

Доказательство леммы опирается на теорему о минимаксе [4].

По определению, $N_\vartheta = M$. Из теорем 3.1, 4.1, теоремы 1 [13] и леммы 4.1 следует

Теорема 4.2. Пусть выполнены условия А и Б. Задача 2.1 имеет решение тогда и только тогда, когда $\gamma(t_0, x_0) \leqslant 0$. При выполнении этого неравенства задачу разрешает стратегия

$$U^e = U^e(t, x) = \{u^e \mid \langle A_2^*(y-x), u^e\rangle_2 = \max_{u \in P} \langle A_2^*(y-x), u\rangle_2\} \tag{4.6}$$

где теперь y — (единственный) ближайший элемент к x в N_t.

Замечание 4.3. Выше предполагалось, что $\|F(t)\|_1 \leqslant c \exp \omega t$, $t \geqslant 0$, $\omega = \mathrm{const}$, где $c \leqslant 1$ (это условие играло существенную роль при доказательстве леммы 3.1). В общем случае сильно непрерывной полугруппы исходную задачу 2.1 можно погрузить в аналогичную задачу управления в более широком гильбертовом пространстве, в котором уже имеет место нужная оценка для полугруппы. В качестве такого пространства можно взять пополнение H_0 пространства H_1 по норме

$$\|x\|_0^2 = \int_0^\infty \|F(t)x\|_1^2 \exp(-\omega_1 t)\,dt, \qquad \omega_1 > 2\omega$$

Пусть $F_0(t)$ — замыкание $F(t)$ с H_1 на H_0. Полугруппа $\{F_0(t),\ t \geqslant 0\}$ сильно непрерывна и $\|F_0(t)\|_0 \leqslant \exp \omega_1 t$, $t \geqslant 0$ (см. например, [11]). Задачу 2.1 рассматриваем теперь в пространстве H_0, выбирая в качестве целевого множества замыкание M_0 множества M по новой норме. Назовем эту новую задачу задачей 2.1°. Если множество M ограничено и слабо замкнуто в H_1 (последнее обеспечивается, например, выпуклостью и замкнутостью M в H_1) и множества $G_u(\vartheta)$, $G_v(\vartheta)$ (см. условие Б) компакты в H_1, то, как можно проверить, такое погружение будет инвариантным в том смысле, что стратегия U, разрешающая задачу 2.1° (при $x_0 \in H_1$), решает и задачу 2.1 в пространстве H_1.

5. Рассмотренный класс управляемых систем охватывает, в частности, некоторые управляемые системы, описываемые уравнениями с частными производными параболического и гиперболического типов.

Приведем здесь следующий простой, но важный для приложений пример (см. также [5]). Пусть Ω — ограниченная область в n-мерном пространстве E_n с $2k$ раз непрерывно дифференцируемой границей Γ, расположенная локально по одну сторону от Γ. Пусть $A(y, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2k} a_\alpha(y) D^\alpha$ — вещественное эллиптическое в $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ дифференциальное выражение, коэффициенты $a_\alpha(y)$ которого в $\overline{\Omega}$ непрерывны и имеют непрерывные производные до порядка $|\alpha|$ включительно, причем $a_0(y) \geqslant \beta > 0$, где число β достаточно велико. Задана управляемая параболическая система

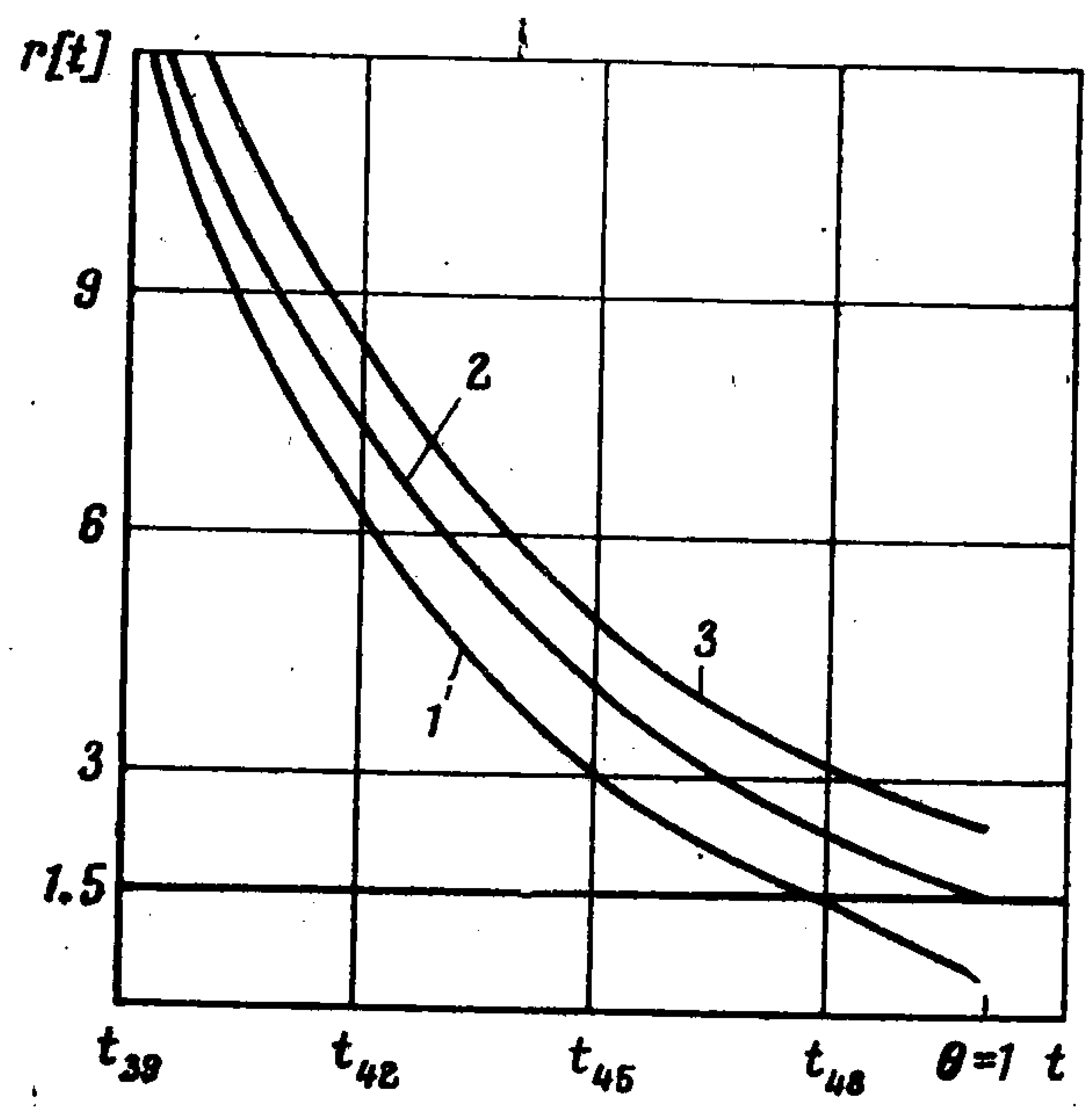
$$\frac{\partial z(t, y)}{\partial t} = -A(y, D) z(t, y) + u(t, y) - v(t, y) + w(t, y) \tag{5.1}$$

$$y \in \Omega, \quad t_0 < t \leqslant \vartheta, \quad z(t_0, y) = z_0 \in W_2^{2k}$$

$$z|_\Gamma = \partial z/\partial \nu|_\Gamma = \ldots = \partial^{k-1} z/\partial \nu^{k-1}|_\Gamma = 0, \quad t_0 < t \leqslant \vartheta \tag{5.2}$$

Здесь u, v, w — измеримые на $T = [t_0, \vartheta] \times \Omega$ функции, принадлежащие пространству $L_2(T)$, причем при почти всех t управления $u \in P \subset$

$\subset L_2(\Omega)$, $v \in Q \subset L_2(\Omega)$, где P, Q — выпуклые ограниченные замкнутые множества; ν — внешняя по отношению к Ω нормаль к Γ; W_2^{2k} — пространство С. Л. Соболева: $W_2^{2k} = \{z(y) \mid D^\alpha z \in L_2(\Omega), \ |\alpha| \leqslant 2k\}$. Оператор $A_1 z(y) = -A(y, D) z(y)$, определенный на элементах W_2^{2k}, удовлетворяющих условиям (5.2) в смысле теорем вложения, порождает в пространстве $L_2(\Omega)$ аналитическую сжимающую полугруппу $\{F(t), t \geqslant 0\}$ (см., например, [5, 6, 8–11, 20]).



Таким образом, полагая $H_1 = H_2 = H_3 = L_2(\Omega)$, $x(t) \equiv z(t, \cdot)$, $x_0 = z_0$, $u(t) \equiv u(t, \cdot)$, $v(t) \equiv v(t, \cdot)$, $w(t) \equiv w(t, \cdot)$, приходим к системе (1.1). Движениями системы (5.1), отвечающими стратегии U, назовем функции (2.1). Условие Б здесь выполняется, так как в силу оценки $\| A_1^\alpha F(t) \|_1 \leqslant c \cdot t^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, и ограниченности P множество G_u принадлежит области определения A_1^α и, далее, оператор $A_1^{-\alpha}$ вполне непрерывен в H_1 [8, 10, 20].

Пусть, в частности

$\Omega = (0, 1)$, $t_0 = 0$, $\vartheta = 1$, $z(0, t) = z(1, t) = 0$, $z(0, y) = z_0(y)$

Уравнение (5.1) имеет вид

$$\frac{\partial z(t, y)}{\partial t} = \frac{\partial^2 z(t, y)}{\partial y^2} + u(t, y) - v(t, y) \tag{5.3}$$

Множества $P = Q$ и M — замкнутые шары в $L_2(\Omega)$ радиусов μ и λ.

Задачу сближения 2.1 для уравнения (5.3) можно трактовать как задачу о нагреве стержня распределенными источниками $u(t, y)$ в условиях неопределенной тепловой помехи $v(t, y)$. Для построения искомой функции управления u можно воспользоваться теоремой 4.2. Условие А (см. замечание 4.1) и условие Б (см. выше п. 5) здесь выполняются. Функционал γ из (4.2) имеет вид

$$\gamma(t, x) = \left\{ \int_0^1 \left[\int_0^1 G(y, \xi, \vartheta - t) x(\xi) d\xi \right]^2 dy \right\}^{1/2} - \lambda$$

$$G(y, \xi, t) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \exp(-(\pi j)^2 t) \sin j\pi y \sin j\pi\xi$$

где $G(y, \xi, t)$ — функция влияния мгновенного точечного источника.

Пусть $\gamma(t_0, z_0) \leqslant 0$. Управление u^e, диктуемое экстремальной стратегией (4.6), решает поставленную задачу и определяется при почти всех t по правилу: если $\gamma(t, z) \leqslant 0$, то u^e — любая функция из P; если $\gamma(t, z) \geqslant 0$, то

$$u^e = \mu (h_t(y) - z(y)) \left(\int_0^1 (h_t(y) - z(y))^2 dy \right)^{-1/2}$$

где функция $h_t(y)$ — решение задачи

$$\int_0^1 (h_t(y) - z(y))^2\, dy = \min_{h\,:\,\gamma(t,h)\leqslant 0} \int_0^1 (h(y) - z(y))^2\, dy$$

При начальном условии $z_0 = 1000\, y$, $0 \leqslant y \leqslant 0.5$; $z_0 = 1000\,(1-y)$, $0.5 \leqslant y \leqslant 1$, числах $\lambda = 1.484$, $\mu = 10$ и при разбиении Δ отрезка времени $[0, 1]$ на равные части длиной $\delta = 0.02$ движения

$$x(t)_\Delta = z(t, y)_\Delta = \int_0^1 G(y, \xi, t)\, z_0(\xi)\, d_\xi + \int_0^t\int_0^1 G(y, \xi, t-\tau)(u(\tau, \xi) - v(\tau, \xi))\, d\xi\, d\tau$$

были смоделированы на БЭСМ-6. На фигуре изображены кривые

$$r(t) = \left(\int_0^1 z^2(t, y)_\Delta\, dy\right)^{1/2}$$

Кривая *1* отвечает управлениям $u(t, y) = u^e(t, y, z)$, $v \equiv 0$; *2* — управлениям $u(t, y) = u^e(t, y, z)$, $v(t, y) = u^e(t, y, z)$; *3* — управлениям $u(t, y) \equiv \mu$, $v(t, y) \equiv 0$.

Поступила 19 II 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи динамики I, II. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1969, № 5; 1970, № 1.
2. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
3. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., «Мир», 1972.
4. *Балакришнан А.* Введение в теорию оптимизации в гильбертовом пространстве. М., «Мир», 1974.
5. *Friedman A.* Differential games of pursuit in Banach spase. J. Math. Analysis and Appl., 1969, vol. 25, No. 1.
6. *Иосида К.* Функциональный анализ. М., «Мир», 1967.
7. *Ладыженская О. А.* О нестационарных операторных уравнениях и их приложениях к линейным задачам математической физики. Матем. сб., 1958, т. 45, № 3.
8. *Соболевский П. Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховых пространствах. Тр. Моск. матем. о-ва, 1961, т. 10.
9. *Соломяк М. З.* Применение теории полугрупп к исследованию дифференциальных уравнений в пространствах Банаха. Докл. АН СССР, 1958, т. 122, № 5.
10. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., «Наука», 1966.
11. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., «Наука», 1967.
12. *Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф.* Линейные дифференциальные игры. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 1.
13. *Осипов Ю. С.* К теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами. Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 6.
14. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Альтернатива для игровой задачи сближения. ПММ, 1970, т. 34, вып. 6.
15. *Осипов Ю. С.* Об условиях стабильности поглощения в дифференциально-разностных играх I, II. В сб.: Управляемые системы, № 8. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1971.
16. *Осипов Ю. С.* Дифференциальная игра наведения для систем с последействием. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
17. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
18. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М., «Наука», 1972.
19. *Боненбласт Х. Ф., Карлин С.* Об одной теореме Вилля. В сб.: Бесконечные антагонистические игры. М., Физматгиз, 1963.
20. *Kato T.* Abstract evolution equations of parabolic type in Banach and Hilbert space. Nagoya Math. J., 1961, vol. 5, No. 19.