О преподавании высшей математики и о моей книге «Высшая математика для начинающих и ее приложения к физике»

Вопрос о преподавании математики, может быть, впервые появляется на страницах журнала ПММ и я рад предоставленной мне возможности высказаться по этому поводу.

Люди, практически применяющие математику, должны иметь приоритет по отношению к профессиональным преподавателям в определении конечной цели обучения. Вместе с тем, голос преподавателей должен быть решающим в выработке методики.

В самой общей формулировке важнейшим принципом мне представляется *историзм* преподавания. Предлагается провести учащегося через те основные этапы, которые прошло человечество в целом. (Заучивание дат и имен не нужно). При этом нужно иметь смелость в начале преподавания откровенно отказываться в ряде случаев от изложения более новых, более модных и более строгих подходов, возникших позже.

Второй общий принцип заключается в том, что понимание и творческое освоение новых понятий происходит интуитивно и закрепляется применениями. Введение новых понятий с помощью строгих, формально и логически безупречных определений и доказательств, педагогически неправильно. Эта безупречность недоступна человеку, впервые осваивающему новую область науки. При этом отнюдь не отрицается ценность строгости в самом развитии науки и возвращение уже со строгих позиций к основам на поздней стадии, после первого интуитивного концентра обучения.

Практически, применительно к преподаванию высшей математики, я считаю, что надо начинать непосредственно с понятий производной и интеграла, опуская раздел, относящийся к теории пределов.

Безусловно, такой подход не является строгим, поскольку производная и интеграл являются понятиями, определяемыми с помощью определенных предельных переходов. Такой подход не является и безупречным, так как эти предельные переходы не всегда выполнимы, не всегда приводят к определенной величине. И тем не менее, сознавая все это, я считаю, что на первом этапе обучения нужно фиксировать внимание на положительном содержании понятий производной и интеграла, не фиксируя внимание на исключительных ситуациях (разрывных функциях и т. п.), умалчивая об ограничениях.

Понятие мгновенной скорости как производной от координаты по времени, понятие касательной к кривой и тангенса угла наклона касательной как производной — вот материал для интуитивного освоения понятия производной. Добавим к этому рассмотрение примера $y(x) = x^2$, $\Delta y/\Delta x = [y(x + \Delta x) - y(x)]/\Delta x = 2x + \Delta x$, где переход к пределу $\Delta x \to 0$, $y' = dy/dx = 2x$ очевиден. Учащийся получил материал для освоения, развития и (главное!) применения производных. Так же обстоит дело с понятием интеграла. Выясняется связь производной и интеграла. Расширяется круг рассматриваемых функций: от полиномов с целыми степенями переходим к любым степеням, показательной функции, определяем число e условием $de^x/dx = e^x$, рассматриваем тригонометрические функции.

Вспомним историю науки: примерно такой набор сведений открыл ученым XVIII и XIX века огромную область применений математики. Не будем лишать нашу молодежь счастья повторить этот путь.

В своей автобиографии Эйнштейн пишет: «В возрасте 12—16 лет я ознакомился с элементами математики, включая основы дифференциального и интегрального исчислений. При этом, на мое счастье, мне попались книги, в которых обращалось не слишком много внимания на логическую строгость, зато хорошо была выделена везде главная мысль. Все это занятие было поистине увлекательно; в нем были взлеты, по силе впечатления не уступавшие «чуду» элементарной геометрии,— основная идея аналитической геометрии, бесконечные ряды, понятие дифференциала и интеграла».

Итак, в первую очередь, подлежит обсуждению именно принципиальный вопрос о целесообразности создания курса и программы, максимально освобожденных от формализма. Хотелось бы обойти теорию пределов при первом ознакомлении с высшей математикой.

Мне кажется бесспорным, что такой план действий имеет право на существование, наряду с обычными программами. Остаются, конечно же, еще и другие важные вопросы (хотя по сравнению с изложенным выше они все же второстепенны): например,

1) какими примерами пользоваться для того, чтобы научить читателя практически пользоваться понятиями высшей математики,

2) в каком количестве надо вводить вычислительные методы,

3) когда и как следует все же уточнить понятие предела (я склоняюсь к позитивному подходу — введению дельта функции Дирака и связанных с ней понятий).

Рассмотрению и рецензированию подлежит не только общий замысел и педагогические принципы, но и конкретное воплощение принципов, способ их изложения.

Свое представление о том, как надо решать эти вопросы, я реализовал в книге «Высшая математика для начинающих и ее приложения к физике».

Первые два издания вышли в 1958 году, затем по рекомендации ученого совета Института прикладной математики третье издание (1963) было рекомендовано Министерством просвещения СССР как факультативное пособие.

В 1968 и 1970 гг. вышли четвертое и пятое издание, в которые вносились некоторые перестановки, изменения и добавления, в частности, глава о дельта-функции и краткое напутствие читателю, содержащее в очень общей форме перечисление нескольких областей математики, тесно связанных с физическими теориями, но лежащих за пределами элементарного курса.

Рецензия, помещенная выше за подписями акад. А. А. Дородницына, Л. С. Понтрягина и Л. И. Седова, первоначально была написана в связи с рассмотрением в издательстве вопроса о целесообразности шестого издания книги.

К сожалению, в рецензии нет обсуждения тех действительно принципиальных вопросов, которые обрисованы выше. По-видимому, реальная необходимость курса нового типа настолько велика и настолько очевидна, что рецензенты ее не решаются отрицать. Конечно, вопрос о книге этим не исчерпывается. Безусловно можно и должно разбирать и критиковать также книгу — конкретное воплощение определенных идей.

Можно находить и отмечать определенные ошибки и недочеты в выполнении задуманного плана.

Не мне решать вопрос о том, написана ли книга «небрежно», «многословно» и «путанно» (рецензия) или «живо и увлекательно» (решение ученого совета Института прикладной математики).

В рецензии есть замечания, которые в случае переиздания было бы полезно учесть. Так, например, в 5-ом издании действительно неудачно глава о графиках и функциях помещена в середине книги, следует вернуться к тому плану, который был принят в 4-ом издании, в котором эта глава помещена в начале.

Если будет сочтено возможным некоторое увеличение объема книги, то полезно остановиться на понятии инерциальной системы координат.

К этому добавлю от себя, что здесь уместно будет отметить сходство ситуаций в поле тяготения и в ускоренно движущейся системе, т. е. подвести читателя к истокам общей теории относительности.

Полезно подробнее изложить вопрос о сопротивлении тел при движении в жидкости и газе (об этом частном вопросе, на котором заостряют внимание рецензенты подробно см. ниже). От себя отмечу, что в параграфе о поглощении света нужно упомянуть об усилении света в лазерах.

Улучшить книгу безусловно можно, некоторая — увы небольшая — часть замечаний рецензии может помочь этому улучшению. Однако я не хочу создавать впечатления, что рецензия и мой ответ отражают нормальный процесс рассмотрения книги.

Я считаю весь тон рецензии совершенно недопустимым; меня удивляет позиция редакции, помещающей эту рецензию. Покажу необъективность рецензии на примерах.

Авторы рецензии в связи со стр. 17 пишут «Такая формулировка заведомо не всегда верна». Позже в книге оговорки сделаны — указано совершенно ясно, что предел существует лишь для точек, в которых кривая гладкая. Об этом рецензенты умалчивают. Рецензенты пишут, что эти оговорки «сразу» «послужили бы более ясному усвоению» — с этим я не согласен по существу, мне кажется что «сразу» включать ограничения не следует, надо сперва дать упражнения. Итак речь идет не о небрежности, а о разных педагогических концепциях.

В части относящейся к стр. 525 и 526, рецензенты умалчивают, что речь идет о напутствии читателю, а не об изложении конкретных теорий.

Теория криволинейных координат в евклидовом пространстве подготавливает к построению неевклидовой геометрии, лежащей в основе замечательного достижения современной науки — общей теории относительности. Я убежден, что эту мысль читатель поймет, а более далекой цели в данной книге я не ставил.

Обращаюсь, наконец, к вопросу о сопротивлении жидкости или газа движению тела — к тому вопросу, с которым связаны наиболее грубые выпады рецензентов.

Предлагаемый на стр. 350 вывод формулы для сопротивления восходит к Ньютону: тело сечением S при движении со скоростью V в единицу времени вытесняет объем жидкости SV; если вытесняемая жидкость приобретает скорость V, то ее кинетическая энергия равна $SV\rho$. $V^2/2$, что соответствует силе $F = S\rho V^2/2$ — результат отличающийся от истинного безразмерным коэффициентом K. Это знал Ньютон, знаю я, знают и рецензенты. Именно это я хочу сообщить читателям.

Теперь следует странное утверждение рецензентов: «Если поступать правильно, то имеет место парадокс Даламбера, т. е. сила сопротивления равна нулю».

Да, Ньютон не знал, а рецензенты и я знаем, что при равной нулю вязкости формально существуют решения с нулевой силой. Но мы знаем больше: что в стационарном обтекании реализуются не эти решения, а решения, турбулентные, для которых формула Ньютона (с $\kappa \neq 1$, но почти постоянным) имеет место. Почему же «правильным» называют то, что не имеет место в природе? Только для вящего моего уязвления? Должен ли я излагать парадокс Даламбера — но и его опровержение — в книге, в которой закон сопротивления в основном нужен для вывода закона движения тела?!

Остановлюсь на втором вопросе — о зависимости силы от вязкости. Он эквивалентен вопросу о зависимости коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса. Испытываю неловкость, но должен на страницах ПММ привести несколько чисел (для шара) $\mathrm{Re} = 100$, $\kappa = 1.2$; $R = 2 \cdot 10^5$, $\kappa = 0.4$ после кризиса вплоть до $\mathrm{Re} = 10^6$ (по крайней мере) $\kappa = 0.12$: итак, изменение κ на один порядок при изменении Re на 6 порядков, грубая интерполяция $\kappa \sim \mathrm{Re}^{-1/6}$, сила $F \sim \nu^{1/6}$. Производя эту интерполяцию, я опять подставляю себя под удары: зависимость в действительности не степенная. Гидродинамики ее изучают подробно. Но для целей моей книги — разве я не вправе сказать, что степень 1/6 есть слабая зависимость?! Рассмотрение движения тел с $\kappa = \mathrm{const}$, $F \sim v^2$ общепринято в учебниках механики; применяемый мной термин «практически не зависит» вполне описывает ситуацию.

Отмечу допущенную—по небрежности или намеренно-логическую ошибку в рецензии. Рецензенты справедливо отмечают, что у хорошо обтекаемых тел до 85% сопротивления приходится на силы вязкости, т. е. представляют собой проинтегрированное по всей поверхности произведение вязкости ν на градиент скорости (сила интегрируется как вектор). Итак $F = a + b\nu$, где первый член есть вклад давления и равен 15%, т. е. $0.15\ F$, а второй 85%, $b\nu = 0.85F$. Равнозначно ли это утверждению, что F сильно зависит от вязкости? Если бы b было постоянным, то мы получили бы $d\ln F/d\ln\nu = 0.85$ эффективный показатель $F \sim \nu^{0.85}$.

Но в действительности в турбулентном режиме при увеличении ν поток перестраивается так, что градиент скорости уменьшается, т. е. так, что член $b\nu$ в целом, с учетом перестройки потока, слабо зависит от ν.

Итак верное утверждение о большой роли сил вязкости не противоречит вовсе тому что сказано в моей книге: что на величину силы сопротивления вязкость влияет слабо.

В целом, мне не ясны мотивы писания рецензии, в которой «небрежность» — самое мягкое, «провоцирование» — самое колоритное выражение и главные претензии относятся к отсутствию тонкостей и деталей — и это в книге для начинающих.

Я. Б. Зельдович