ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В.* Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
2. *Болотин В. В.* Асимптотический метод исследования задач о собственных значениях для прямоугольных областей. В сб.: Проблемы механики сплошной среды. М., Изд-во АН СССР, 1961.
3. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек М., Физматгиз, 1961.

УДК 678:539.376

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ С НЕЛИНЕЙНОЙ НАСЛЕДСТВЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

П. Курбанов, Х. Эшматов

(Ташкент)

Методом усреднения [1–3] исследуются динамическая устойчивость и резонансные режимы при параметрических колебаниях вязкоупругого стержня под действием одной гармонической силы. Связь между напряжением и деформацией задается в виде суммы кратных интегралов [4–6].

1. Рассмотрим задачу о поперечных колебаниях прямолинейного вязкоупругого стержня, нагруженного равномерно распределенной по длине стержня силой $f(x, t)$ и сжатого периодической продольной силой $P(t) = P_0 + P\cos\theta t$. Связь между напряжением $\sigma_x(t)$ и деформацией $\varepsilon_x(t)$ выражается следующим нелинейным законом:

$$\sigma_x(t) = E\left\{\varepsilon_x - \int_0^t R_1(t-\tau)\,\varepsilon_x(\tau)\,d\tau\right\} - \tag{1.1}$$

$$-h\int_0^t\int_0^t\int_0^t R_3(t-\tau_1,\ t-\tau_2,\ t-\tau_3)\,\varepsilon_x(\tau_1)\,\varepsilon_x(\tau_2)\,\varepsilon_x(\tau_3)\,d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3$$

Здесь E — мгновенный модуль упругости, $h > 0$ — коэффициент нелинейности, $R_1(t)$, $R_3(t, t, t)$ — ядра релаксации.

Предположим справедливость закона плоских сечений и будем считать, что сечение стержня постоянно по его длине. Тогда, учитывая соответствующее уравнение для упругого стержня [7, 8] и используя результаты [9], получим для описания поперечных колебаний вязкоупругого стержня следующее интегро-дифференциальное уравнение штрих означает производную по x, точка — по t):

$$EIU^{\mathrm{IV}} + P(t)\,U'' + m u^{\cdot\cdot} = EI\int_0^t R_1(t-\tau_1)\,U^{\mathrm{IV}}(x,\tau)\,d\tau + \tag{1.2}$$

$$+hI_1\int_0^t\int_0^t\int_0^t R_3(t-\tau_1, t-\tau_2, t-\tau_3)[U^{\mathrm{IV}}(x,\tau_1)\,U''(x,\tau_2)\,U''(x,\tau_3) +$$

$$+2u'''(x,\tau_1)\,u'''(x,\tau_2)\,u''(x,\tau_3) + 2u'''(x,\tau_1)\,u''(x,\tau_2)\,u'''(x,\tau_3) +$$

$$+2u''(x,\tau_1)\,u'''(x,\tau_2)\,u'''(x,\tau_3) + u''(x,\tau_1)\,u^{\mathrm{IV}}(x,\tau_2)\,u''(x,\tau_3) +$$

$$+u''(x,\tau_1)\,u''(x,\tau_2)\,u^{\mathrm{IV}}(x,\tau_3)]\,d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + f(x,t), \qquad I_1 = \int_F z^4 dF$$

Здесь $u(x, t)$ — поперечный прогиб стержня, m — масса стержня, отнесенная к единице длины, EI — жесткость при изгибе, $F = \mathrm{const}$ — площадь поперечного сечения стержня, z — расстояние точки поперечного сечения стержня, до нейтральной оси.

Считая стержень шарнирно опертым, будем искать решение уравнения (1.2), удовлетворяющее граничным условиям задачи, в виде

(1.3) $$u(x, t) = T(t) \sin \pi x / l$$

где l — длина стержня, $T(t)$ — неизвестная пока функция времени. Разложим теперь функцию $f(x, t)$ в интервале $(0, l)$ в ряд по синусам по аргументу x

(1.4) $$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad F_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx$$

Подставляя (1.3) в (1.2) и учитывая (1.4), получим для определения $T(t)$ уравнение

(1.5) $$T^{\cdot\cdot} + p(1 + 2\mu \cos \theta t) T = F(t) + \omega^2 \int_0^t R_1(t-\tau) T(\tau)\, d\tau +$$
$$+ \gamma \int_0^t \int_0^t \int_0^t R_3(t-\tau_1, t-\tau_2, t-\tau_3) T(\tau_1) T(\tau_2) T(\tau_3)\, d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3$$
$$\omega = (\pi / l)^2 \sqrt{EI / m}, \quad p = \omega \sqrt{1 - P_0 / P_1}, \quad \mu = P_1 / 2(P_2 - P_0)$$
$$P_2 = (\pi / l)^2 EI, \quad F(t) = F_1(t) / m, \quad \gamma = {}^3/_4 (\pi / l)^8 h I_1 / m$$

Здесь p — частота собственных колебаний стержня, загруженного постоянной составляющей продольной силы P_0, ω — частота собственных колебаний незагруженного стержня, μ — коэффициент возбуждения.

Предположим, что амплитуда продольной периодической силы — величина порядка ε : $P(t) = P_0 + \varepsilon P_1 \cos \theta t$ и, кроме того, материал стержня обладает свойством малой вязкости [6], тогда

(1.6) $$\omega^2 R_1(t) = \varepsilon \Gamma(t), \quad \gamma R(t, t, t) = \varepsilon G(t, t, t)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. При сделанных предположениях запишем уравнение (1.5) в форме

(1.7) $$T^{\cdot\cdot} + p^2 T = F(t) + \varepsilon \Bigg[2\mu p^2 T \cos \theta t + \int_0^t \Gamma(t-\tau) T(\tau)\, d\tau +$$
$$+ \int_0^t \int_0^t \int_0^t G(t-\tau_1, t-\tau_2, t-\tau_3) T(\tau_1) T(\tau_2) T(\tau_3)\, d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \Bigg]$$

Изучим уравнение (1.7), когда $F(t) = a \sin \lambda t$, в случае резонансных и нерезонансных колебаний.

2. Нерезонансный случай. Пусть $p \neq \lambda$. С помощью постановки

$$T(t) = c_1 \cos pt + c_2 \sin pt + d \sin \lambda t, \quad d = a / (p^2 - \lambda^2)$$

приведем уравнение (1.7) к системе уравнений относительно неизвестных $c_1 = c_1(t)$, $c_2 = c_2(t)$. Полученная система решается методом усреднения [1–3]. При $p \neq \lambda$, 3λ, $\lambda / 3$; $\theta \neq 2p$, $p - \lambda$, $p + \lambda$, $\lambda - p$ системе соответствует усредненная система

(2.1) $$\xi_1^{\cdot} = -\frac{\varepsilon}{2p} \{a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_1 (\xi_1^2 + \xi_2^2) + a_4 \xi_2 (\xi_1^2 + \xi_2^2)\}$$
$$\xi_2^{\cdot} = \frac{\varepsilon}{2p} \{a_2 \xi_1 - a_1 \xi_2 + a_4 \xi_1 (\xi_1^2 + \xi_2^2) - a_3 \xi_2 (\xi_1^2 + \xi_2^2)\}$$

Здесь

(2.2) $$a_1 = \Gamma_s + d^2 / 2 (A_1 + A_2 + A_3), \quad a_2 = \Gamma_c + d^2 / 2 (B_1 + B_2 + B_3)$$
$$a_3 = \frac{1}{4} (C_1 + 2C_2), \quad a_4 = \frac{1}{4} (C_3 + 2C_4), \quad \Gamma_s = \int_0^{\infty} \Gamma(s) \sin ps\, ds$$

$$\Gamma_c = \int_0^\infty \Gamma(s) \cos psds, \quad A_1 = \langle \cos \lambda (s_1 - s_2) \sin ps_3 \rangle$$

$$A_2 = \langle \sin ps_1 \cos \lambda (s_2 - s_3) \rangle, \quad A_3 = \langle \cos (s_1 - s_3) \lambda \sin ps_2 \rangle$$

$$B_1 = \langle \cos \lambda (s_1 - s_3) \cos ps_2 \rangle, \quad B_2 = \langle \cos \lambda (s_1 - s_2) \cos ps_3 \rangle$$

$$B_3 = \langle \cos ps_1 \cos \lambda (s_2 - s_3) \rangle, \quad C_1 = \langle \cos p (s_1 + s_2 - s_3) \rangle,$$

$$C_2 = \langle \cos ps_3 \cos p (s_1 - s_2) \rangle, \quad C_3 = \langle \sin p (s_1 + s_2 - s_3) \rangle,$$

$$C_4 = \langle \cos p (s_1 - s_2) \sin ps_3 \rangle$$

Здесь и далее

$$\langle f(s_1, s_2, s_3) \rangle = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty G(s_1, s_2, s_3) f(s_1, s_2, s_3) ds_1 ds_2 ds_3$$

Решение системы (2.1) имеет вид

$$\begin{Bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{Bmatrix} = a_0 \sqrt{a_1/\alpha(t)} \exp\left(-\frac{\varepsilon a_1 t}{2p}\right) \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} \left\{-\frac{\varepsilon a_2 t}{2p} - \frac{a_4}{2a_3} \ln |\alpha(t)| + \varphi_0\right\}$$

$$\alpha(t) = 1 - a_0^2 a_3 \exp\left(-\frac{\varepsilon a_1 t}{p}\right)$$

Здесь a_0, φ_0 — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий. Следовательно, на основании доказанных теорем [1–3] решение уравнения (1.7) в рассматриваемом случае при достаточно малом ε и для всех $t \geqslant 0$ можно аппроксимировать с любой степенью точности относительно ε решением системы (2.1)

$$(2.3) \qquad T(t) \approx \xi_1(t) \cos pt + \xi_2(t) \sin pt + d \sin \lambda t = a_0 \sqrt{a_1/\alpha(t)} \times$$
$$\times \exp(-\varepsilon a_1 t/2p) \sin\left\{\left(p - \frac{\varepsilon a_2}{2p}\right) t - \frac{a_4}{2a_3} \ln |\alpha(t)| + \varphi_0\right\} + d \sin \lambda t$$

Так как $a_1 > 0$, то из (2.3) следует, что при наличии вязкости амплитуда колебания в первом приближении затухает по экспоненциальному закону, а частота и фаза колебания получают сдвиги, зависящие от вязкоупругих свойств материала стержня. При $t \to \infty$ величина $T(t)$ асимптотически стремится к выражению, характеризующему гармонические колебания

$$(2.4) \qquad T(t) = d \sin \lambda t$$

3. Резонансные случаи. В системе (1.7) могут возникнуть следующие виды резонансов:

1) $p \neq \lambda, 3\lambda, \lambda/3, \theta = 2p$; $\theta \neq p - \lambda, p + \lambda, \lambda - p$;
2) $p \neq \lambda, 3\lambda, \lambda/3$; $\theta = p - \lambda$; 3) $p \neq \lambda, 3\lambda, \lambda/3$; $\theta = \lambda + p$;
4) $p \neq \lambda, 3\lambda, \lambda/3$; $\theta = \lambda - p$; 5) $p = 3\lambda$; $\theta = 2\lambda$;
6) $p = 3\lambda$; $\theta = 4\lambda$; 7) $p = 3\lambda$; $\theta \neq 2p, p - \lambda, p + \lambda, \lambda - p$;
8) $p = \lambda/3$; $\theta \neq 2p, p - \lambda, p + \lambda, \lambda - p$; 9) $p = 3\lambda$; $\theta = 6\lambda$;
10) $p = \lambda/3$; $\theta = 2\lambda/3$; 11) $p = \lambda/3$; $\theta = 4\lambda/3$.

Исследуем перечисленные резонансные режимы.

В случае 1) системе (1.7) будет соответствовать усредненная система

$$(3.1) \qquad \xi_1^{\cdot} = -\frac{\varepsilon}{2p} \{a_1\xi_1 + (a_2 - \mu p^2)\xi_2 + a_3\xi_1(\xi_1^2 + \xi_2^2) + a_4\xi_2(\xi_1^2 + \xi_2^2)\}$$
$$\xi_2^{\cdot} = \frac{\varepsilon}{2p} \{(a_2 + \mu p^2)\xi_1 - a_1\xi_2 + a_4\xi_1(\xi_1^2 + \xi_2^2) - a_3\xi_2(\xi_1^2 + \xi_2^2)\}$$

Легко проверить, что точка $\xi_1 = \xi_2 = 0$ является положением равновесия системы (3.1), которое при $\mu^2 p^4 < a_1^2 + a_2^2$ будет асимптотически устойчивым [10]. Следовательно, решение уравнения (1.7) в рассматриваемом случае асимптотически стремится к гармоническому колебанию (2.4).

В случаях 2)—4) системе (1.7) поставим в соответствие усредненную систему

$$
(3.2)\qquad \xi_1^{\cdot} = -\frac{\varepsilon}{2p}\{a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_1(\xi_1^2+\xi_2^2) + a_4\xi_2(\xi_1^2+\xi_2^2) + b_j\}
$$

$$
\xi_2^{\cdot} = \frac{\varepsilon}{2p}\{a_2\xi_1 - a_1\xi_2 + a_4\xi_1(\xi_1^2+\xi_2^2) - a_3\xi_2(\xi_1^2+\xi_2^2)\}
$$

где j — номер случая ($j = 2, 3, 4$), а $b_2 = b_3 = \mu p^2 d$, $b_4 = -\mu p^2 d$. Приравнивая правые части системы (3.2) нулю, получаем стационарные значения ξ_1 и ξ_2

$$
(3.3)\qquad \xi_1^{\circ} = A\cos\varphi, \qquad \xi_2^{\circ} = A\sin\varphi
$$

Здесь A и φ — корни системы алгебраического уравнения. Найденный стационарный режим (3.3) устойчив, если выполняются следующие неравенства [11, 12]:

$$
a_1 + 2a_3(\xi_1^{\circ 2} + \xi_2^{\circ 2}) > 0
$$

$$
a_1^2 + a_2^2 + 4(a_1a_3 + a_2a_4)(\xi_1^{\circ 2} + \xi_2^{\circ 2}) + 3(a_3^2 + a_4^2)(\xi_1^{\circ 2} + \xi_2^{\circ 2})^2 > 0
$$

В этом случае уравнение (1.7) имеет решение: $T(t) = \xi_1^{\circ}\cos pt + \xi_2^{\circ}\sin pt + d\sin\lambda t$.

В случаях 5) — 8) устойчивость стационарных резонансных режимов исследуется аналогичным образом, а в случаях 9) — 11) этот вопрос требует дальнейшего исследования.

4. Исследуем теперь уравнение (1.7) вблизи главного резонанса. Пусть частота собственных колебаний стержня p отличается от частоты вынужденных колебаний λ на величину, пропорциональную малому параметру ε, и, кроме того, амплитуда внешней силы a является малой порядка ε, т. е.

$$
(4.1)\qquad p^2 = \lambda^2 - \varepsilon q, \qquad a = \varepsilon\Delta, \qquad q,\ \Delta = \mathrm{const}
$$

В силу (4.1) уравнение (1.7) примет вид

$$
(4.2)\qquad T^{\cdot\cdot} + \lambda^2 T = \varepsilon\Big[2\mu p^2 T\cos\theta t + qT + \Delta\sin\lambda t + \int_0^t \Gamma(t-\tau)T(\tau)\,d\tau +
$$

$$
+ \int_0^t\int_0^t\int_0^t G(t-\tau_1, t-\tau_2, t-\tau_3)\,T(\tau_1)T(\tau_2)T(\tau_3)\,d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3\Big]
$$

Вводя новые переменные по формуле $T(t) = c_1\cos\lambda t + c_2\sin\lambda t$, приведем уравнение (4.2) к стандартному виду и, усредняя полученную систему при $\theta \neq 2\lambda$, находим

$$
(4.3)\qquad \xi_1^{\cdot} = -\frac{\varepsilon}{2\lambda}\{a_1\xi_1 + (a_2+q)\xi_2 + a_3\xi_1(\xi_1^2+\xi_2^2) + a_4\xi_2(\xi_1^2+\xi_2^2) + \Delta\}
$$

$$
\xi_2^{\cdot} = \frac{\varepsilon}{2\lambda}\{(a_2+q)\xi_1 - a_1\xi_2 + a_4\xi_1(\xi_1^2+\xi_2^2) - a_3\xi_2(\xi_1^2+\xi_2^2)\}
$$

где величины a_k ($k = 1, 2, 3, 4$) вычисляются по формуле (2.2), если вместо p подставить λ. Устойчивость установившихся решений системы (4.3) исследуется аналогично случаям 2) — 4).

Если $\theta = 2\lambda$, то поведение решения уравнения (4.2) остается открытым.

5. Изучим колебания стержня, описываемого уравнением (1.7) вблизи главного параметрического резонанса. Полагая $p^2 = (\theta/2)^2 - \varepsilon q_1$, $q_1 = \mathrm{const}$, приведем уравнение (1.7) к виду

$$
(5.1)\qquad T^{\cdot\cdot} + \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 T = \varepsilon\Big[2\mu p^2 T\cos\theta t + q_1 T + \int_0^t \Gamma(t-\tau)T(\tau)\,d\tau +
$$

$$
+ \int_0^t\int_0^t\int_0^t G(t-\tau_1, t-\tau_2, t-\tau_3)\,T(\tau_1)T(\tau_2)T(\tau_3)\,d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3\Big] + a\sin\lambda t
$$

Пусть $\theta \neq 2\lambda$. Тогда с помощью подстановки

$$T(t) = c_1 \cos\frac{\theta}{2} t + c_2 \sin\frac{\theta}{2} t + d_1 \sin\lambda t, \quad d_1 = a \Big/ \left[\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 - \lambda^2\right]$$

приведем уравнение (5.1) к стандартному виду и, усредняя полученную систему при $\theta \neq 2\lambda$, 6λ, $2\lambda / 3$, находим

$$(5.2) \qquad \xi_1^{\cdot} = -\frac{\varepsilon}{\theta} \{a_1\xi_1 + (a_2 + q_1 - \mu p^2)\xi_2 + a_3\xi_1(\xi_1^2 + \xi_2^2) + a_4\xi_2(\xi_1^2 + \xi_2^2)\}$$

$$\xi_2^{\cdot} = \frac{\varepsilon}{\theta} \{(a_2 + q_1 + \mu p^2)\xi_1 - a_1\xi_2 + a_4\xi_1(\xi_1^2 + \xi_2^2) - a_3\xi_2(\xi_1^2 + \xi_2^2)\}$$

где величины a_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ вычисляются по формуле (2.2), если вместо p подставить $\theta / 2$. Нетрудно показать, что точка $\xi_1 = \xi_2 = 0$ является положением равновесия системы (5.2) и это положение будет асимптотически устойчиво при $\mu^2p^4 < a_1^2 + (a_2 + q_1)^2$. Следовательно, решение уравнения (5.1) в этом случае асимптотически стремится к гармоническому колебанию (2.4).

В случае $\theta = 2\lambda / 3$ устойчивость решения усредненных систем анализируется аналогичным образом.

Если $\theta = 6\lambda$, то поведение решения уравнения (5.1) остается открытым.

6. Теперь перейдем к рассмотрению более общего уравнения (1.5). При этом, полагая $F(t) = \varepsilon a \sin\lambda t$ и учитывая (1.6), запишем уравнение (5.1) в форме

$$(6.1) \qquad T^{\cdot\cdot} + p^2(1 - 2\mu\cos\theta t)T = \varepsilon\Bigg[a\sin\lambda t + \int_0^t \Gamma(t-\tau)\,T(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \int_0^t\int_0^t\int_0^t G(t-\tau_1, t-\tau_2, t-\tau_3)\,T(\tau_1)\,T(\tau_2)\,T(\tau_3)\,d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3\Bigg]$$

При $\varepsilon = 0$ уравнение (6.1) вырождается в известное уравнение Матье. Его решение ищем в виде

$$(6.2) \qquad T(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$$

где $y_1(t)$ и $y_2(t)$ — линейно-независимые частные решения уравнения Матье. Известно [13], что общее решение уравнения Матье зависит от величины характеристического показателя ν. При мнимых значениях ν $(\nu = i\beta,\ 0 \leqslant \beta < \theta / 2)$ можно положить

$$(6.3) \qquad y_1(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} H_k \cos(k\theta + \beta)t, \qquad y_2(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} H_k \sin(k\theta + \beta)t$$

Подставляя (6.2) и (6.3) в (6.1) и усредняя полученную систему при $k\theta + \beta \neq \lambda$ (k — любые целые числа), находим

$$(6.4) \qquad \xi_1^{\cdot} = -\frac{\varepsilon}{2}\{\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_1(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \alpha_4\xi_2(\xi_1^2 + \xi_2^2)\}$$

$$\xi_2^{\cdot} = \frac{\varepsilon}{2}\{\alpha_2\xi_1 - \alpha_1\xi_2 + \alpha_4\xi_1(\xi_1^2 + \xi_2^2) - \alpha_3\xi_2(\xi_1^2 + \xi_2^2)\}$$

$$\alpha_1 = \sum_{-\infty}^{\infty} H_k^2\Gamma_{sk}, \qquad \alpha_2 = \sum_{-\infty}^{\infty} H_k^2\Gamma_{ck}, \qquad \alpha_3 = \frac{1}{4}\sum_{-\infty}^{\infty} H_k^4(C_{1k} + 2C_{2k})$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{4}\sum_{-\infty}^{\infty} H_k^4(C_{3k} + 2C_{4k})$$

Здесь Γ_{sk}, Γ_{ck}, C_{1k}, C_{2k}, C_{3k}, C_{4k} вычисляются по формулам (2.2), если вместо p поставить $k\theta + \beta$. Согласно теоремам об усреднении, решение уравнения (6.1) при достаточно малом ε и для всех $t \geqslant 0$ можно аппроксимировать выражением

$$T(t) \approx \xi_1(t)\, y_1(t) + \xi_2(t)\, y_2(t) = a_0 \sqrt{\alpha_1/\delta(t)}\exp(-\varepsilon\alpha_1 t/2) \times \tag{6.5}$$
$$\times \sum_{-\infty}^{\infty} H_k \sin\{(k\theta + \beta - \varepsilon\alpha_2/2)\, t - \alpha_4/2\alpha_3 \ln|\delta(t)| + \varphi_0\}$$

где a_0, φ_0 — постоянные интегрирования. Так как $\alpha_1 > 0$, то из (6.5) следует, что получившееся решение является затухающим, т. е. асимптотически устойчиво.

Допустим, что при фиксированных значениях k имеет место $k\theta + \beta = \lambda$, тогда системе (6.1) будет соответствовать усредненная система

$$\xi_1{}^{\cdot} = -\frac{\varepsilon}{2}\{\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_1(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \alpha_4\xi_2(\xi_1^2 + \xi_2^2) + a\}$$

$$\xi_2{}^{\cdot} = \frac{\varepsilon}{2}\{\alpha_2\xi_1 - \alpha_1\xi_2 + \alpha_4\xi_1(\xi_1^2 + \xi_2^2) - \alpha_3\xi_2(\xi_1^2 + \xi_2^2)\}$$

Заметим, что общий вид этой системы совпадает с системой (3.2), поэтому ее исследование сводится к изложенному.

Поступила 26 II 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филатов А. Н.* Усреднение в системах интегральных и интегродифференциальных уравнений, В сб.: Исследования по аналитической механике. Ташкент, «Наука». УзССР, 1965, стр. 135.
2. *Филатов А. Н.* Усреднение в системах дифференциальных интегродифференциальных и интегральных уравнений. Ташкент, «Фан», 1967.
3. *Филатов А. Н.* Методы усреднения в дифференциальных и интегродифференциальных уравнениях. Ташкент, «Фан», 1971.
4. *Ильюшин А. А., Огибалов П. М.* Некоторые основные вопросы механики полимеров. Механика полимеров, 1965, № 3.
5. *Ильюшин А. А., Огибалов П. М.* Квазилинейная теория вязкоупругости и метод малого параметра. Механика полимеров, 1966, № 2.
6. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М., «Наука», 1970.
7. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1956.
8. *Болотин В. В.* Параметрические колебания упругих систем. В кн.: Прочность, устойчивость, колебания, т. 3. М., Машиностроение, 1968.
9. *Матяш В. И.* О динамической устойчивости шарнирно опертого упруговязкого стержня. Механика полимеров, 1971, № 2.
10. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
11. *Колтунов М. А., Майборода В. П.* Условия проектирования амортизирующих и вибр103защитных систем. Механика полимеров, 1972, № 6.
12. *Майборода В. П., Моргунов Б. И.* О расчете нелинейных вязкоупругих колебаний вибрmicзащитного слоя. Механика полимеров, 1972, № 2.
13. *Мак-Лахлан Н. В.* Теория и приложения функций Матье. М., Изд-во иност. лит., 1953.