

## ДИНАМИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЭФФЕКТЫ В ОРТОТРОПНЫХ УПРУГИХ ОБОЛОЧКАХ

Н. И. Жинжер

(Москва)

Дается развитие теории динамического краевого эффекта [1, 2] применительно к свободным колебаниям тонких упругих ортотропных оболочек. Принимается, что линии кривизны, главные направления упругости и линии, вдоль которых заданы граничные условия, совпадают. Исследуются свойства характеристических корней уравнения, определяющих тип и скорость затухания краевых эффектов. Устанавливаются необходимые и достаточные условия невырождения краевых эффектов в зависимости от соотношений между главными кривизнами и коэффициентами упругости оболочки.

1. Воспользуемся асимптотическим методом [1, 2] для вычисления частот свободных колебаний тонкой упругой ортотропной оболочки, главные направления упругости материала которой совпадают с координатными линиями  $x_1, x_2$ , являющимися линиями главных кривизн. Предположим, что выполнены условия применимости уравнений типа В. З. Власова и запишем безразмерные уравнения для преимущественно изгибных форм колебаний в таком виде [3]:

$$(1.1) \quad \nabla^4 d v + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_1^2} + \chi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_2^2} - \omega^2 v = 0$$

$$\nabla b^4 \psi - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_1^2} - \chi \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_2^2} = 0$$

$$\nabla d^4 = d_{11} \frac{\partial^4}{\partial \xi_1^4} + 2d_{12} \frac{\partial^4}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2} + d_{11}^{-1} \frac{\partial^4}{\partial \xi_2^4}$$

$$\nabla b^4 = \frac{\partial^4}{\partial \xi_1^4} + 2b_{12} \frac{\partial^4}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2} + b_{11} \frac{\partial^4}{\partial \xi_2^4}$$

Здесь введены следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\xi_1 = x_1 k_0, \quad \xi_2 = x_2 k_0, \quad v = w k_0, \quad \psi = \varphi B_{22} R_2 k_0^3, \quad \omega = \Omega / \Omega_2, \quad \chi =$$

$$= R_2 / R_1, \quad d_{11} = (D_{11} / D_{22})^{1/2}, \quad d_{12} = D_{12} / (D_{11} D_{22})^{1/2} = \nu_1 / d_{11} +$$

$$+ 2\gamma (1 - \nu_1^2 / d_{11}^2), \quad b_{11} = B_{11} / B_{22}, \quad b_{12} = B_{12} / B_{22} = 1 / (2\gamma d_{11}) -$$

$$- \nu_1 / d_{11}^2, \quad \gamma = G / (E_1 E_2)^{1/2}, \quad k_0 = B_{22}^{-1/4} R_2^{-1/2} (D_{11} D_{22})^{-1/8}, \quad \Omega_2 =$$

$$= (\rho h B_{22} R_2^2)^{-1/2}$$

где  $R_1, R_2$  — главные радиусы кривизн,  $w, \varphi$  — нормальный прогиб и функция усилий в срединной поверхности соответственно,  $\rho h$  — поверхностная плотность массы,  $\Omega$  — частота свободных колебаний,  $D_{jk}$  и  $B_{jk}$  — элементы матриц цилиндрических жесткостей и податливостей при безмоментной деформации,  $E_1, E_2, \nu_1, \nu_2$  ( $E_2 \nu_1 = E_1 \nu_2$ ),  $G$  — упругие постоянные материала оболочки. В качестве  $x_1$  принимается линия с меньшей по абсолютной величине кривизной и поэтому  $|\chi| \leq 1$ .

В области, удаленной от краев оболочки, решение уравнений (1.1) будем искать в виде

$$(1.2) \quad v = V_1 \sin k_1 (\xi_1 - \xi_1^0) \sin k_2 (\xi_2 - \xi_2^0),$$

$$\psi = \Psi_1 \sin k_1 (\xi_1 - \xi_1^0) \sin k_2 (\xi_2 - \xi_2^0)$$

где  $k_1, k_2$  — безразмерные волновые числа,  $\xi_1^0, \xi_2^0$  — фазовые постоянные. Тогда асимптотическая формула для частот свободных колебаний оболочки

$$(1.3) \quad \omega^2 \approx d_{11}k_1^4 + 2d_{12}k_1^2k_2^2 + d_{11}^{-1}k_2^4 + (k_1^2 + \chi k_2^2) [k_1^4 + 2b_{12}k_1^2k_2^2 + b_{11}k_2^4]^{-1}$$

легко получается из (1.1) и (1.2). Соответствующие волновые числа в случае невырождения динамического краевого эффекта находятся из уравнений стыковки согласно процедуре асимптотического метода [1].

Исследуем условия вырождения динамического краевого эффекта в ортотропных оболочках. Сначала рассмотрим край  $\xi_1 = 0$ . Порождающее решение (1.2) вблизи края должно быть скорректировано решениями типа динамического краевого эффекта

$$(1.4) \quad v(\xi_1, \xi_2) = V(\xi_1) \sin k_2(\xi_2 - \xi_2^0), \quad \psi(\xi_1, \xi_2) = \Psi(\xi_1) \sin k_2(\xi_2 - \xi_2^0)$$

После подстановки (1.4) в (1.1) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций  $V(\xi_1)$  и  $\Psi(\xi_1)$ . Характеристическое уравнение этой системы имеет два очевидных корня  $\lambda = \pm ik_1$ , которые соответствуют порождающему решению (1.2). После исключения этих корней приходим к такому уравнению:

$$(1.5) \quad a_0\lambda^6 - a_1\lambda^4 + a_2\lambda^2 - a_3 = 0$$

Здесь

$$(1.6) \quad \begin{aligned} a_0 &= d_{11}, & a_1 &= 2(b_{12}d_{11} + d_{12})k_2^2 + d_{11}k_1^2 \\ a_2 &= (b_{11}d_{11} + 4b_{12}d_{12})k_2^4 + 1 + 2b_{12}d_{11}k_1^2k_2^2 - (k_1^2 + \chi k_2^2)^2 f \\ a_3 &= 2b_{11}d_{12}k_2^6 + 2\chi k_2^2 + b_{11}d_{11}k_1^2k_2^4 + k_1^2 - (k_1^2 + \chi k_2^2)^2 (k_1^2 + 2b_{12}k_2^2) f \\ f &= (k_1^4 + 2b_{12}k_1^2k_2^2 + b_{11}k_2^4)^{-1} \end{aligned}$$

При однородных краевых условиях корректирующее решение типа динамического краевого эффекта всегда можно построить, если три корня уравнения (1.5) имеют отрицательные действительные части [1]. В случаях, когда корректирующее решение построить невозможно, говорят о вырождении динамического краевого эффекта у соответствующего края. Для края  $\xi_2 = 0$  аналогичные выкладки приводят к таким выражениям для коэффициентов уравнения (1.5)

$$(1.7) \quad \begin{aligned} a_0 &= b_{11}d_{11}^{-1}, & a_1 &= 2(b_{11}d_{12} + b_{12}d_{11}^{-1})k_1^2 + b_{11}d_{11}^{-1}k_2^2 \\ a_2 &= (d_{11}^{-1} + 4b_{12}d_{12})k_1^4 + 2b_{12}d_{11}^{-1}k_1^2k_2^2 + \chi^2 - b_{11}(k_1^2 + \chi k_2^2)^2 f \\ a_3 &= 2d_{12}k_1^6 + d_{11}^{-1}k_1^4k_2^2 + 2\chi k_1^2 + \chi^2 k_2^2 - (b_{11}k_2^2 + 2b_{12}k_1^2)(k_1^2 + \chi k_2^2)^2 f \end{aligned}$$

Динамический крайовой эффект у ортотропных оболочек будет вырожден, если имеет место вырождение хотя бы у одного из краев.

Положим  $s = -\lambda^2$ . Тогда из (1.5) получаем

$$(1.8) \quad a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3 = 0$$

Чтобы существовали решения типа динамического краевого эффекта, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (1.8) не имело положительных корней. Как видно из выражений (1.6) и (1.7), коэффициенты  $a_0$  и  $a_1$  неотрицательны. При  $a_3 < 0$  независимо от знака  $a_2$  уравнение (1.8) имеет один положительный корень. Это следует из теоремы Декарта. Следовательно, условие  $a_3 > 0$  является необходимым для отсутствия положительных корней. Покажем, что это условие является и достаточным. Для этого достаточно показать, что при  $a_3 > 0$  и  $a_2 < 0$  уравнение (1.8) имеет два комплексно-сопряженных корня (при выполнении этих условий имеется один отрицательный корень). Последнее будет иметь место, если  $D > 0$ , где  $D$  — дискриминант многочлена (1.8).

Легко видеть, что при  $a_3 = 0$  и  $a_2 < 0$  имеем  $D < 0$ . Таким образом, граница области вырождения динамического краевого эффекта определяется уравнением  $a_3 = 0$ .

Если на плоскости волновых чисел перейти к полярным координатам  $k_1 = r \cos \varphi$ ,  $k_2 = r \sin \varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ ), то уравнение границы области вырождения примет для краев  $\xi_1 = 0$  и  $\xi_2 = 0$  соответственно вид

$$r = \left[ \frac{(\chi^2 - b_{11}) \cos^2 \varphi + 2\chi (\chi b_{12} - b_{11}) \sin^2 \varphi}{(b_{11} d_{11} \cos^2 \varphi + 2b_{11} d_{12} \sin^2 \varphi) F(\varphi)} \right]^{1/4}, \quad \xi_1 = 0$$

$$r = \left[ \frac{(b_{11} - \chi^2) \sin^2 \varphi + 2(b_{12} - \chi) \cos^2 \varphi}{(d_{11}^{-1} \sin^2 \varphi + 2d_{12} \cos^2 \varphi) F(\varphi)} \right]^{1/4}, \quad \xi_2 = 0$$

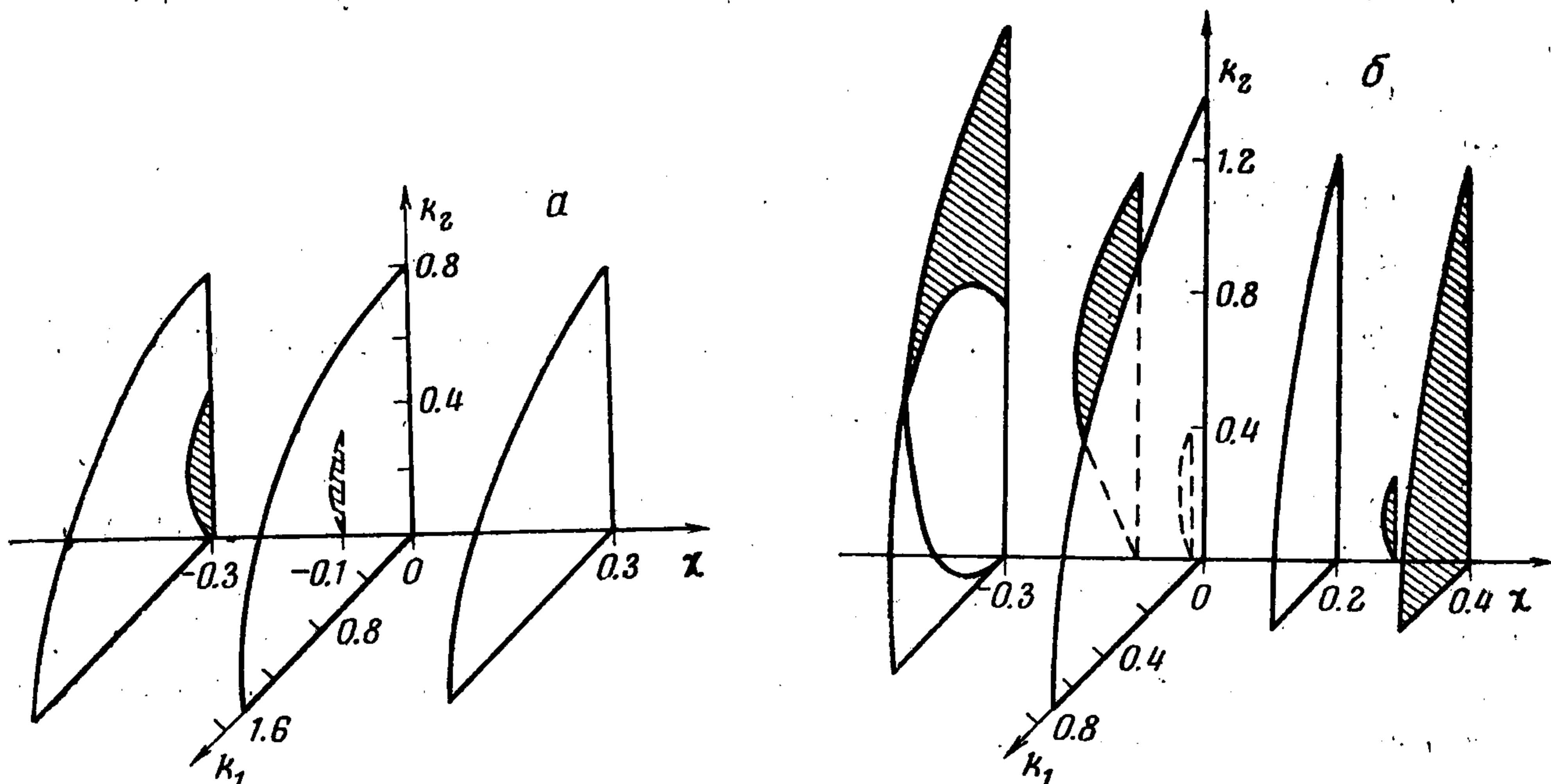
$$F(\varphi) = \cos^4 \varphi + 2b_{12} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + b_{11} \sin^4 \varphi$$

Отсюда получаем соответствующие условия существования краевого эффекта

$$(\chi^2 - b_{11}) \cos^2 \varphi + 2\chi (\chi b_{12} - b_{11}) \sin^2 \varphi \leq 0, \quad \xi_1 = 0$$

$$(b_{11} - \chi^2) \sin^2 \varphi + 2(b_{12} - \chi) \cos^2 \varphi \leq 0, \quad \xi_2 = 0$$

Видно, что существование динамического краевого эффекта и его вырождение зависят лишь от отношения главных кривизн и отношения элементов матрицы податли-



востей при безмоментной деформации. Однако области вырождения зависят от соотношения элементов матрицы цилиндрических жесткостей. Как и в случае изотропных оболочек [1], динамический краевой эффект может быть осциллирующим и неосциллирующим.

На фигуре показаны области вырождения динамического краевого эффекта при разных значениях  $\chi$  для  $E_1/E_2 = 0.1$ ,  $\nu_2 = 0.3$ ,  $\gamma = (1 + \nu_2)^{-1}/2$  (a)  $E_1/E_2 = 10$ ,  $\nu_1 = 0.3$ ,  $\gamma = (1 + \nu_1)^{-1}/2$  (b). Краевой эффект у края с большей кривизной ( $\xi_1 = 0$ ) у оболочек неотрицательной гауссовой кривизны невырожден, если  $0 \leq \chi \leq b_{11}/b_{12}$ . При  $E_1/E_2 > 1$  может иметь место  $b_{11}/b_{12} < 1$ , и в этом случае возможно вырождение динамического краевого эффекта. Отметим, что в случае изотропных оболочек краевой эффект всегда невырожден.

Другая особенность, присущая ортотропным оболочкам неотрицательной гауссовой кривизны, проявляется у края с меньшей кривизной ( $\xi_2 = 0$ ). Краевой эффект не вырождается при  $\chi \geq (E_2/E_1)^{1/2}$ . Если  $E_2/E_1 < 1$ , то найдутся такие  $\chi$ , что краевой эффект будет невырожден. Таким образом, при  $E_1/E_2 > 1$  существуют такие значения  $\chi$ , при которых краевой эффект будет невырожденным вдоль любого из главных направлений.

В этом смысле область применения асимптотического метода к ортотропным оболочкам шире, чем для соответствующих по геометрии изотропных оболочек.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
2. Болотин В. В. Асимптотический метод исследования задач о собственных значениях для прямоугольных областей. В сб.: Проблемы механики сплошной среды. М., Изд-во АН СССР, 1961.
3. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек М., Физматгиз, 1961.

УДК 678:539.376

## ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ С НЕЛИНЕЙНОЙ НАСЛЕДСТВЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

П. Курбанов, Х. Эшматов

(Ташкент)

Методом усреднения [1-3] исследуются динамическая устойчивость и резонансные режимы при параметрических колебаниях вязкоупругого стержня под действием одной гармонической силы. Связь между напряжением и деформацией задается в виде суммы кратных интегралов [4-6].

1. Рассмотрим задачу о поперечных колебаниях прямолинейного вязкоупругого стержня, нагруженного равномерно распределенной по длине стержня силой  $f(x, t)$  и сжатого периодической продольной силой  $P(t) = P_0 + P \cos \theta t$ . Связь между напряжением  $\sigma_x(t)$  и деформацией  $\varepsilon_x(t)$  выражается следующим нелинейным законом:

$$(1.1) \quad \sigma_x(t) = E \left\{ \varepsilon_x - \int_0^t R_1(t-\tau) \varepsilon_x(\tau) d\tau - \right. \\ \left. - h \int_0^t \int_0^t \int_0^t R_3(t-\tau_1, t-\tau_2, t-\tau_3) \varepsilon_x(\tau_1) \varepsilon_x(\tau_2) \varepsilon_x(\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \right.$$

Здесь  $E$  — мгновенный модуль упругости,  $h > 0$  — коэффициент нелинейности,  $R_1(t)$ ,  $R_3(t, t, t)$  — ядра релаксации.

Предположим справедливость закона плоских сечений и будем считать, что сечение стержня постоянно по его длине. Тогда, учитывая соответствующее уравнение для упругого стержня [7, 8] и используя результаты [9], получим для описания поперечных колебаний вязкоупругого стержня следующее интегро-дифференциальное уравнение штрих означает производную по  $x$ , точка — по  $t$ ):

$$(1.2) \quad EIU^{IV} + P(t)U'' + mu'' = EI \int_0^t R_1(t-\tau_1) U^{IV}(x, \tau) d\tau + \\ + hI_1 \int_0^t \int_0^t \int_0^t R_3(t-\tau_1, t-\tau_2, t-\tau_3) [U^{IV}(x, \tau_1) U''(x, \tau_2) U''(x, \tau_3) + \\ + 2u'''(x, \tau_1) u'''(x, \tau_2) u''(x, \tau_3) + 2u'''(x, \tau_1) u''(x, \tau_2) u'''(x, \tau_3) + \\ + 2u''(x, \tau_1) u'''(x, \tau_2) u'''(x, \tau_3) + u''(x, \tau_1) u^{IV}(x, \tau_2) u''(x, \tau_3) + \\ + u''(x, \tau_1) u''(x, \tau_2) u^{IV}(x, \tau_3)] d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + f(x, t), \quad I_1 = \int_F z^4 dF$$

Здесь  $u(x, t)$  — поперечный прогиб стержня,  $m$  — масса стержня, отнесенная к единице длины,  $EI$  — жесткость при изгибе,  $F = \text{const}$  — площадь поперечного сечения стержня,  $z$  — расстояние точки поперечного сечения стержня, до нейтральной оси.