УДК 532.529

ДИСПЕРСИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ В КИПЯЩЕМ СЛОЕ

В. Л. Голо, В. П. Мясников

(Москва)

Рассматриваются волновые процессы в одномерном кипящем слое. Выводится дисперсионное уравнение, из которого следует, что в достаточно широком диапазоне случаев неустойчивость в кипящем слое слабая. Для описания волн малой, но конечной амплитуды в слое выводится уравнение Кортвега — де Вриза — Бюргерса. Рассматриваются осцилляции на фронтах пузырей газа в кипящем слое. Дается объяснение линейного по высоте возрастания флюктуаций плотности в слое и скачка флюктуаций плотности на верхней границе.

Математическому анализу устойчивости уравнений кипящего слоя посвящено ряд работ (см., например, [1–3]), в которых показано, что имеет место сильная, т. е. экспоненциально нарастающая по времени неустойчивость. Однако в указанных работах не учитывается ограниченность слоя в пространстве и не объясняется существование при малых скоростях псевдоожижения однородных кипящих слоев.

В данной работе дисперсионный анализ и исследование волновых процессов в кипящем слое строятся на разложении по малому параметру, введенному в [4].

Для вывода дисперсионного уравнения используется простая модель кипящего слоя, выведенная в [1], причем пренебрегается вязкостью псевдогаза, давлением псевдогаза частиц, а вязкость ожижающего газа учитывается только в силе взаимодействия частиц и газа. Рассматривается одномерная модель, т. е. все функции зависят только от одной вертикальной координаты x.

Таким образом, исходные уравнения имеют вид

$$\rho_s \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\varepsilon \frac{\partial p}{\partial x} - \rho_s \varepsilon G + \Phi$$

$$\rho_f (1-\varepsilon)\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -(1-\varepsilon)\frac{\partial p}{\partial x} - \rho_f(1-\varepsilon)G - \Phi$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}[(1-\varepsilon)v] = 0$$

$$\Phi = \frac{9}{2}\,\frac{\nu}{a^2}\rho_f \frac{\varepsilon H_0}{1-\varepsilon}(v-u)$$

Здесь ρ_s, ρ_f — плотности частиц и газа, ε — эффективный объем, занимаемый частицами, u и v — скорости частиц и газа, p — давление, G — ускорение силы тяжести, Φ — модельная сила взаимодействия фаз, a — радиус частиц, ν — кинематическая вязкость газа, H_0 — безразмерная константа засыпки. Начало координат соответствует сетке аппарата. Основанием для того, чтобы отбросить вязкие члены (за исключением силы трения фаз Φ), является сравнительно малая вязкость ожижающего газа и псевдогаза частиц.

Вводятся безразмерные величины t', u', v', Π', g', α

$$t = \frac{L}{V}t', \quad u = Vu', \quad v = Vv', \quad p = \rho_f V^2 \Pi', \quad G = \frac{V^2}{L}g', \quad \frac{\rho_f}{\rho_s} = \alpha$$

где L — линейный размер аппарата, V — скорость газа до сетки, ρ_f, ρ_s — плотности частиц и газа. В дальнейшем, если не оговорено противное, всюду употребляются безразмерные величины, и штрих опускается.

Исключая после перехода к безразмерным переменным давление П, получим для трех функций ε, u, v систему трех уравнений

$$\beta\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\alpha\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]=\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}(v-u)-(1-\alpha)K \tag{1}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial(\varepsilon u)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}[(1-\varepsilon)v]=0$$

$$K=\beta g,\qquad \beta=R^{-1}$$

$$R=\frac{9\nu H_0\alpha L}{2Va^2}=\frac{9\alpha H_0}{2}\,\frac{L}{a}\,\frac{1}{\mathrm{Re}_s},\qquad \alpha=\frac{\rho_f}{\rho_s},\qquad \mathrm{Re}_s=\frac{aV}{\nu}$$

Параметр R, Re_s — число Рейнольдса по частицам, был введен в трехмерной ситуации в [4]. Довольно часто R является большим параметром, так как La^{-1} на несколько порядков превосходит α^{-1}, а число Рейнольдса по частицам Re_s в реальных аппаратах не бывает слишком велико. В дальнейшем всюду предполагается, что $R\gg 1$.

Чтобы уяснить смысл члена $(1-\alpha)K$, рассмотрим решение системы (1), соответствующее стационарному однородному режиму

$$\varepsilon=\varepsilon_K=\mathrm{const},\qquad v=v_K=\mathrm{const},\qquad u=0$$

Элементарный подсчет показывает, что $v_K=[(1-\alpha)K]^{1/3}$, $\varepsilon_K=1-v_K^{-1}$. Выражение для ε_K в размерных переменных имеет вид

$$\varepsilon_K=1-\left[\frac{\alpha}{1-\alpha}\,\frac{9\alpha H_0}{2a^2G}\,V\right]^{1/3}$$

Заметим, что ε_K не зависит от линейных размеров слоя, что будет важно в дальнейшем.

Дисперсионное уравнение для линеаризованной системы (1) имеет вид

$$\Omega=3k\,(\varepsilon_K v_K)+i\beta\,(1-\varepsilon_K)^2\,[\alpha\varepsilon_K\,(\Omega+kv_K)^2+(1-\varepsilon_K)\Omega^2] \tag{2}$$

где Ω — частота, k — волновое число. Уравнение (2) определяет две ветви зависимости $\Omega=\Omega\,(k)$. Первая ветвь получается разложением Ω по положительным степеням малого параметра β

$$\Omega\,(k)=ck+i\beta\mu_1k^2-\beta^2\mu_2k^3+O\,(\beta^3),\qquad c=3\varepsilon_K v_K \tag{3}$$

$$\mu_1=(1-\varepsilon_K)^2\varepsilon_K v_K\{\alpha v_K\,(1-3\varepsilon_K)^2+9\varepsilon_K\},$$

$$\mu_2=\mu_1\,(1-\varepsilon_K)^2\varepsilon_K\,\{3+3\alpha\varepsilon_K v_K-\alpha v_K\}$$

Нетрудно проверить, что в рассматриваемом случае $0<\varepsilon_K<1$, $(1-v_K)\varepsilon_K=1$, $0<\alpha<1$. Оба дисперсионных коэффициента μ_1, μ_2 больше нуля. Вторая ветвь $\Omega=\Omega_d\,(k)$ имеет вид

$$\Omega_\alpha\,(k)=-\frac{i}{\beta}\,a-[c+\Delta]\,k+O\,(\beta) \tag{4}$$

$$a=[(1-\varepsilon_K)^2\,(1-(1-\varepsilon_K)\varepsilon_K)]^{-1},\qquad \Delta=2\alpha\varepsilon_K v_K\,[1-(1-\alpha)\varepsilon_K]^{-1}$$

т. е. Ω_d соответствует быстро затухающим по времени волнам, распространяющимся против течения ожижающего газа с фазовой скоростью $c + \Delta$, поэтому в дальнейшем волны с законом дисперсии (4) внутри слоя не рассматриваются, однако их следует учитывать вблизи верхней границы слоя (см. ниже).

Поскольку высота слоя в безразмерных переменных и фазовая скорость волны $c = 3\varepsilon_K v_K$ (для не слишком разреженных слоев) — порядка единицы, групповая скорость волнового пакета c_g будет также порядка единицы. Следовательно, время пребывания возмущения в слое — порядка единицы. Из закона дисперсии (4) вытекает, что во время своего пребывания в слое возмущение растет линейно по времени как $1 + \beta\mu_1 k^2 t$, т. е. неустойчивость является слабой. Здесь следует иметь в виду, что волновое число k ограничено, поскольку в рамках данной модели кипящего слоя имеют смысл длины волн не меньше масштаба осреднения, с помощью которого выводятся исходные уравнения.

Из вида закона дисперсии следует, что амплитуда локализованных в пространстве возмущений — волновых пакетов — линейно растет по мере движения в слое. Естественно предположить, что они связаны с малыми флуктуациями плотности слоя, что согласуется с наблюдавшимся на опыте линейным ростом малых флуктуаций плотности по высоте.

Волны, пришедшие из глубины слоя, отражаются от верхней границы и затухают по закону дисперсии (4). Таким образом, в узкой области вблизи верхней границы возмущения складываются из двух систем волн: волн, пришедших из глубины слоя, и волн, отраженных от верхней границы, чем можно, по-видимому, объяснить характерный всплеск флюктуаций вблизи верхней границы [5]. Предыдущий анализ также показывает, что достаточно узкая область вблизи верхней границы не оказывает влияния на волны умеренной амплитуды внутри слоя.

Волны малой, но конечной амплитуды допускают простое описание в рамках рассматриваемой модели. Из (1) следует

(5) $$u = v - v_K^3 (1-\varepsilon)^2 - \beta (1-\varepsilon)^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \alpha \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]$$

Последовательными приближениями u выражается через ε и v с точностью до β^2, что соответствует ветви дисперсии (3), т. е. волнам, распространяющимся вверх по слою без затухания. Из уравнений сохранения масс частиц и газа и уравнения (5) следует

(6) $$\varepsilon_t + v\varepsilon_x + v_x\varepsilon - f_\varepsilon'\varepsilon_x = D$$

(7) $$\varepsilon_t + v\varepsilon_x - (1-\varepsilon) v_x = 0$$

где D — сумма членов порядка β и β^2, учитывающих дисперсию и диссипацию. Если отбросить D, то получается модель кипящего слоя без диссипации и дисперсии, рассмотренная ранее в работе [4], в которой решения с консервативными разрывами являются простыми волнами. Для волн конечной, но малой амплитуды естественно предположить, что влияние диссипации и дисперсии мало. Последнее обстоятельство можно учитывать, рассматривая решения типа квазипростых волн [6], положив $v = F(\varepsilon) + \psi(x, t)$, где $F(\varepsilon)$ — решение типа простой волны в системе без диссипации и дисперсии, т. е. $D = 0$ в (6), $\psi(x, t)$ — поправка порядка дисперсионных членов. Волнами, распространяющимися внутри слоя, против течения газа следует пренебречь ввиду их быстрого затухания.

Линеаризуем члены порядка β и β^2. Пусть $\varepsilon = \varepsilon_K + \varepsilon'$, ε' мало.

Линеаризуя уравнения (6) и (7), нетрудно получить выражение $\psi_x = D$, откуда следует

$$\varepsilon_t' + [v - (1-\varepsilon) f_\varepsilon']\varepsilon_x' = (1-\varepsilon_K) D$$

Итерациями все производные ε по t заменяются в D производными по x, откуда следует

$$\varepsilon_t' + [v - (1-\varepsilon) f_\varepsilon']\varepsilon_x' = -\beta\mu_1\varepsilon_{xx}' - \beta^2\mu_2\varepsilon_{xxx}'$$

Учитывая, что в модели без дисперсии [4] $v = f(\varepsilon) + 1$, $f(\varepsilon) = v_K{}^3 \varepsilon (1 - \varepsilon)^2$, можно, отбросив члены порядка $\beta \varepsilon_x'$ и выше, получить

$$\varepsilon_t' + h(\varepsilon)\varepsilon_x' = -\beta\mu_1\varepsilon_{xx}' - \beta^2\mu_2\varepsilon_{xxx}' \tag{8}$$

$$h(\varepsilon) = -v_K{}^3 (1 - \varepsilon)^2 (1 - 4\varepsilon) + 1$$

Функция $h(\varepsilon)$ монотонно возрастает от $\varepsilon = 0$ до $\varepsilon = 1/2$ и монотонно убывает от $\varepsilon = 1/2$ до $\varepsilon = 1$, $h(\varepsilon_K) = 3\varepsilon_K v_K$ — скорость звука распространения возмущений по течению газа (3). В дальнейшем рассматриваются только отклонения от стационарного состояния в слое $\varepsilon = \varepsilon_K$, и (8) перепишется в виде уравнения типа Кортевега — де Вриза — Бюргерса

$$\varepsilon_t + h(\varepsilon_K + \varepsilon)\varepsilon_x + \beta\mu_1\varepsilon_{xx} + \beta^2\mu_2\varepsilon_{xxx} = 0 \tag{9}$$

Можно предположить, что возмущение, возникшее на сетке, стабилизируется и превращается в какое-то стационарное волновое движение внутри слоя, описываемое уравнением (9). Согласно методике [6, 7] решение уравнения (9) ищется в виде $\varepsilon = \varepsilon(x - wt)$. Здесь W — скорость движения волны, $W - c = \delta > 0$, δ мало, но конечно, $c = 3\varepsilon_K v_K$ — скорость звука при распространении возмущений по потоку ожижающего газа, причем $\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon'' = 0$ при $x \to 0$, т. е. возмущение уже отделилось от сетки. Всюду в дальнейшем координата сетки $x = 0$ и внутренность слоя соответствует правой полуоси x. Нетрудно показать, что ε удовлетворяет уравнению

$$H(\varepsilon_K + \varepsilon) - W\varepsilon + \beta\mu_1\varepsilon' + \beta^2\mu_2\varepsilon'' = 0, \quad H(\varepsilon) = \varepsilon - (1 - \varepsilon)f \tag{10}$$

Особые точки уравнения (10) находятся из условия

$$-W\varepsilon + H(\varepsilon_K + \varepsilon) = 0 \tag{11}$$

Уравнение (11) имеет тривиальное решение $\varepsilon = 0$, соответствующее стационарному состоянию слоя. Поскольку рассматриваются волны малой амплитуды, интерес представляют только корни, мало отличающиеся от $\varepsilon = 0$. Заметим, что при $\varepsilon = 0$ касательная к графику функции $H(\varepsilon_K + \varepsilon)$ имеет тангенс угла наклона $h(\varepsilon_K) = c$, где c — скорость звука. Корни (11) соответствуют пересечению прямой $y = W\varepsilon$ с графиком $y = H(\varepsilon_K + \varepsilon)$; $W - c = \delta$ мало, т. е. всего имеется, вообще говоря, три решения на отрезке $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1 - \varepsilon_K$.

Следует различать три случая: 1) $\varepsilon_K < 1/2$, 2) $\varepsilon_K > 1/2$, 3) $\varepsilon_K \sim 1/2$. В случаях 1) и 2), учитывая, что изучаются состояния, мало отличающиеся от стационарных, следует рассмотреть только наименьший из корней, ввиду чего функцию $h(\varepsilon_K + \varepsilon)$ линеаризуем. Случай 3) не рассматривается ввиду его неопределенности, отражающей, по-видимому, какой-то дефект модели.

Уравнение (11) теперь имеет вид $(c - W)\varepsilon + 1/2 h_\varepsilon'(\varepsilon_K)\varepsilon^2 = 0$, т. е. особыми точками будут $\varepsilon = 0$ и

$$\varepsilon_* = \frac{2\delta}{h_\varepsilon'(\varepsilon_K)} = \frac{(1 - \varepsilon_K)^2}{1 - 2\varepsilon_K} \frac{\delta}{3} \tag{12}$$

Типы особых точек 1) $\varepsilon = 0$; особая точка — седло, 2) $\varepsilon = \varepsilon_*$; а) устойчивый узел при $\mu_1 < \mu_c$, б) устойчивый фокус при $\mu_1 > \mu_c$, где $\mu_c = 2(\nu\delta)^{1/2}$. При $\varepsilon_K < 1/2$ будет $\varepsilon_* > 0$; при $\varepsilon_K > 1/2$ будет $\varepsilon_* < 0$. Рассматриваемое решение отвечает сепаратрисе, выходящей из начала координат (седла) на фазовой плоскости. Соответствующее решение при $\mu_1 > \mu_c$ соответствует цугу затухающих (вялых) солитонов в слое [6]. Величина ε_* соответствует среднему перепаду амплитуд в цуге, в дальнейшем будем называть ε_* амплитудой цуга. Тогда (12) связывает амплитуда цуга со скоростью его распространения. Аналогично, при $\mu_c < \mu_1$, когда цугов волн нет, ε_* играет роль амплитуды, и (11) связывает скорость распространения и амплитуду. Пространственный масштаб волнового процесса, описываемого квазистационарным решением указанного типа можно определить только численно. Можно предположить, что он не велик, поскольку диссипативный член в уравнении (9) порядка β, а дисперсионный — порядка β^2.

Рассмотренные квазистационарные решения можно применять для описания структуры сильных разрывов — ударных волн в кипящем слое, для чего ищется решение уравнения (10), ведущее из точки равновесия в точку равновесия, т. е. сепаратриса [7]. При $\varepsilon_K < {}^1/_2$ можно сшить только разрывы уплотнения (ε в области перед разрывом меньше, чем после разрыва) и при $\varepsilon_K > {}^1/_2$ — разрыв разряжения. Разрыв будет осциллирующим при $\mu_c > \mu_1$. Одномерный пузырь или поршень можно интерпретировать как пару разрывов, плотность слоя между которыми меньше, чем вне их. Из сказанного следует, что если такой поршень двигается по слою со средним значением $\varepsilon_K < {}^1/_2$ и $\mu_c > \mu_1$, то передняя граница будет осциллирующая, а задняя четкая (она не сшивается), при $\varepsilon_K > {}^1/_2$ и $\mu_c > \mu_1$, наоборот, осциллировать будет задняя граница.

Уплотнения и размытости на передней части границы пузырей в кипящем слое неоднократно наблюдались экспериментально [8]. Их теоретическому описанию посвящен ряд работ (см., например, [2, 3]). Работ, где изучались бы осцилляции на границах пузырей, не имеется, хотя некоторые эксперименты говорят в пользу их существования (см. фотографии в [8]).

Поступила 3 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Anderson T. B., Jackson R.* A fluid mechanical description of fluidized beds. Industr. and Engng. Chem., Fundamentals, 1967, vol 6, No. 4.
2. *Murray J. D.* On the mathematics of fluidization, pt 1. J. Fluid Mech., 1965, vol 21, p. 465—493.
3. *Murray J. D.* On the mathematics of fluidization, pt 2. J. Fluid Mech., 1965, vol 22, p. 57—80.
4. *Голо В. Л.* Параметр взаимодействия в кипящем слое. Успехи матем. наук, 1975, т. 30, вып. 1.
5. *Аэров М. Э., Тодес О. М.* Гидравлические и тепловые основы работы аппаратов со стационарным и кипящим слоем. М., «Химия», 1968.
6. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., Атомиздат, 1964.
7. *Сагдеев Р. З.* Коллективные процессы и ударные волны в разряженной плазме. В сб.: Вопросы теории плазмы, вып. 4, М. «Наука», 1973.
8. *Partridge B. A., Lyall E.* Initial motion of a bubble in a fluidized bed. J. Fluid Mech., 1967, vol 28, p. 429—431.