Зададим преобразование функциями

$$\chi(\theta) = \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}\theta), \quad Q(\theta) = \sqrt{2}/\operatorname{tg}\theta \tag{4.1}$$

Тождество (3.3) с учетом (4.1) дает два линейно-независимых набора коэффициентов

$$a_0^{(0)} = a_1^{(0)} = a_0^{(1)} = a_2^{(1)} = 0, \quad a_1^{(1)} = 1, \quad a_2^{(0)} = -2$$

$$a_0^{(1)} = a_2^{(0)} = a_1^{(1)} = 0, \quad a_2^{(1)} = -1, \quad a_0^{(0)} = -\sqrt{2}, \quad a_1^{(0)} = \sqrt{2}$$

Соотношения подобия (3.4) имеют вид

$$c_x^{(1)} = B_1^{(1)} y_f^{(1)2} - 2E c_y^{(0)}, \quad c_y^{(1)} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} E\left(2c_x^{(0)} - \pi B_1^{(0)} y_f^{(0)2}\right) - \sqrt{2} y_f^{(0)2} \left(A_2^{(1)} - B_1^{(1)}\right)$$

$$E = \left(A_2^{(1)} - B_1^{(1)}\right) / \left(A_2^{(0)} - B_1^{(0)}\right)$$

Воспользовавшись формулами (2.2), (4.1), запишем уравнение соответственного контура в параметрической форме

$$x^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{x^{(0)}} \frac{\varphi^{(0)}(t)\,dt}{\varphi^{\cdot(0)}(t)} \left(\int_0^t \varphi^{(0)}(u)\,du\right)^{1/2}, \quad y^{(1)} = 2\left(\int_0^{x^{(0)}} \varphi^{(0)}(t)\,dt\right)^{1/2}$$

В частном случае, если $y^{(0)} = a x^{(0)n}$, уравнение соответственного контура имеет вид

$$y^{(1)} = b x^{(1)(n+1)/(3-n)}, \quad b = a^{(5+n)/2(3-n)} \frac{2}{\sqrt{n+1}} x_f^{(1)(n+1)/(n-3)},$$

$$x_f^{(1)} = \frac{\sqrt{2(n+1)}}{n(3-n)}$$

На фиг. 2 изображены исходные и соответственные (отмечены штрихами) контуры тел для случая $n = 1/2$ (*1*) и $n = 1/7$ (*2*).

Поступила 24 V 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бунимович А. И.* Соотношения между силами, действующими на теле, движущиеся в разреженном газе, в потоке света и в гиперзвуковом ньютоновском потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 4.
2. *Бунимович А. И., Дубинский А. В.* Обобщенные законы подобия при обтекании тел в условиях «закона локальности». ПММ, 1973, т. 37, вып. 5.
3. *Jaslow H.* Nonaffine similarity laws inherent in Newtonian impact theory. AIAA Journal, 1970, vol. 8, No. 11.
4. *Гонор А. А., Черный Г. Г.* Поперечный контур тела минимального волнового сопротивления. В кн.: Теория оптимальных аэродинамических форм. М., «Мир», 1969.
5. *Майкапар Г. И.* О вариационных задачах Ньютона для неполотих тел. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.

УДК 518.12:533.6

ОБОСНОВАНИЕ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА «ДИСКРЕТНЫХ ВИХРЕЙ» РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. К. Лифанов, Я. Е. Полонский

(Москва)

Дается обоснование сходимости численного метода дискретных вихрей (см., например, [1–4]) при решении действительных одномерных сингулярных интегральных уравнений первого рода. Показано, что в классе функций, неограниченных на одном конце отрезка интегрирования и ограниченных на другом, существует единственное решение, и для него выполняется условие Чаплыгина — Жуковского.

1. Постановка задачи. Расчетная схема. Рассматривается действительное одномерное сингулярное интегральное уравнение (СИУ) первого рода

$$\int_a^b \gamma(x) \frac{K(x_0, x)}{x - x_0} dx = f(x_0) \tag{1.1}$$

при следующих условиях (условия А): $f(x_0)$ удовлетворяет условию Гельдера [5] с показателем α, $H(\alpha)$, для $a < x_0 < b$; $H(x_0, x)$ удовлетворяет условию $H(\alpha)$ по x_0 и x в области $a \leqslant x_0, x \leqslant b$; $\gamma(x)$ — искомая функция, которая разыскивается в классе функций, ограниченных при $x = b$ и неограниченных при $x = a$. Функция $\gamma(x)$ при $x = a$ обращается в бесконечность порядка ν $(0 < \nu < 1)$ и, следовательно, представима в виде $\gamma(x) = \varphi(x)(x - a)^{-\nu}$, где $\varphi(x)$ удовлетворяет условию $H(\alpha)$ для $a \leqslant x \leqslant b$.

Расчетная схема рассматриваемого метода состоит в том, что отрезок $[a, b]$ делится на n равных частей длины h и на расстоянии $^1/_4 h$ от левого конца каждого частичного участка располагаются расчетные точки x_i, в которых вычисляются значения искомой функции $\gamma(x_i)$. На таком же удалении от правого конца помещаются контрольные точки x_{0j} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, в которых выполняются граничные условия. Следовательно, каждая контрольная точка x_{0j} расположена в середине между соседними расчетными точками x_j и x_{j+1}, за исключением точки x_{0n}, которая делит отрезок $[x_n, b]$ в отношении 2 : 1.

Численный метод дискретных вихрей состоит в том, что СИУ (1.1) заменяется системой n линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i) \frac{K(x_{0j}, x_i)}{x_i - x_{0j}} h = f(x_{0j}), \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{1.2}$$

относительно значений искомой функции $\gamma(x)$ в расчетных точках x_i, и параметр x_0 принимает значения x_{0j} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

Ниже будет показано, что при увеличении n решения системы (1.2) приближаются к значениям решения СИУ (1.1) в точках x_i.

2. Существование и единственность решения. Выполнение условия Чаплыгина — Жуковского. Применяя метод регуляризации [5], представим СИУ (1.1) в виде

$$\int_a^b \frac{\gamma(x)}{x - x_0} dx + \int_0^b k(x_0, x)\gamma(x) dx = \varphi(x_0) \tag{2.1}$$

$$k(x_0, x) = \frac{K(x_0, x) - K(x_0, x_0)}{K(x_0, x_0)}, \quad \varphi(x_0) = \frac{f(x_0)}{K(x_0, x_0)}$$

и будем считать, что $K(x_0, x_0) \neq 0$ для $a \leqslant x_0 \leqslant b$ (уравнение нормального типа).

Уравнение (2.1), имеющее при условиях А нулевой индекс, эквивалентно, в смысле разыскания решений, уравнению типа Фредгольма второго рода

$$\gamma(x_0) - \frac{1}{\pi^2}\int_a^b N(x_0, x)\gamma(x) dx = -\frac{1}{\pi^2}\sqrt{\frac{b - x_0}{x_0 - a}} I_\varphi(x_0) \tag{2.2}$$

$$I_\varphi(x_0) = \int_a^b \sqrt{\frac{x - a}{b - x}} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} dx$$

$$N(x_0, x) = \sqrt{\frac{b - x_0}{x_0 - a}} \int_a^b \sqrt{\frac{t - a}{b - t}} \frac{k(t, x)}{t - x_0} dt$$

При $x_0 = b$ из (2.2) находим $N(b, x) = 0$ и $\gamma(b) = 0$. Следовательно, решение СИУ (1.1), ограниченное при $x = b$, с необходимостью обращается в нуль при $x = b$. В задачах аэродинамики, которые описываются математически СИУ (1.1) и условиями

А (обтекание пластинки, решетки профилей и др.), соотношение $\gamma(b) = 0$ означает, что в получаемом решении автоматически обеспечивается выполнение постулата Чаплыгина — Жуковского.

Если в СИУ (1.1) ядро $K(x_0, x) \equiv 1$, то получим СИУ Коши

$$\int_a^b \frac{\gamma(x)}{x - x_0} dx = f(x_0) \tag{2.3}$$

В этом случае из (2.1) и (2.2) находим $k(x_0, x) \equiv 0$, $N(x_0, x) \equiv 0$, и единственное решение СИУ (2.3) будет

$$\gamma(x_0) = -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{b - x_0}{x_0 - a}}\, I_f(x_0) \tag{2.4}$$

Делая в уравнении (2.2) замену переменной [5], приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, в котором ядро и правая часть — ограниченные функции. Следовательно, решение этого уравнения существует и единственно. Поэтому уравнение (2.2) и эквивалентное ему в смысле разыскания решений уравнение (1.1) имеют единственное решение.

3. Численное решение СИУ Коши. Для СИУ Коши (2.3) составим систему n линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma(x_i)}{x_i - x_{0j}} h = f(x_{0j}), \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{3.1}$$

Определитель системы (3.1) равен

$$\Delta^{(n)} = h^n \prod_{1 \leqslant m < p \leqslant n} (x_m - x_p)(-x_{0m} + x_{0p}) \Big/ \prod_{m,\, p=1}^{n} (x_m - x_{0p}) \tag{3.2}$$

и в нуль не обращается.

Обозначим $\Delta_i^{(n)}$ определитель, который получается из $\Delta^{(n)}$ заменой в нем i-го столбца на столбец из правых частей системы (3.1), и $\Delta_{i,j}^{(n)}$ — определитель, получаемый из $\Delta^{(n)}$ вычеркиванием в нем j-й строки и i-го столбца ($i, j = 1, 2, \ldots, n$).

Используя (3.1) и (3.2), можно написать

$$\begin{gathered}\gamma(x_i) = \frac{\Delta_i^{(n)}}{\Delta^{(n)}} = \frac{1}{\Delta^{(n)}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}^{(n)} f(x_{0j}) = \\ = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i} \prod_{p=1}^{n} (x_i - x_{0p}) \prod_{m=1}^{n} (x_m - x_{0j}) \times \\ \times \left[\prod_{p=1}^{i-1} (x_p - x_i) \prod_{p=i+1}^{n} (x_i - x_p) \prod_{p=1}^{j-1} (-x_{0p} + x_{0j}) \prod_{p=j+1}^{n} (-x_{0j} + x_{0p}) \right]^{-1} \frac{f(x_{0j})}{h}\end{gathered} \tag{3.3}$$

Формулу (3.3), используя особенности расположения точек x_i и x_{0j}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, можно преобразовать к виду

$$\begin{gathered}\gamma(x_i) = -\frac{1}{2^2} P_i^-(n) \sum_{j=1}^{n} P_j^+(n) \frac{f(x_{0j})}{x_{0j} - x_i} h \\ P_k^{\pm}(n) = \prod_{m=1}^{k-1} \left(1 \pm \frac{1}{2m}\right) \prod_{m=1}^{n-k} \left(1 \mp \frac{1}{2m}\right)\end{gathered} \tag{3.4}$$

Используя известную из теории гамма-функций [6] формулу

$$\frac{(\beta + 1)(\beta + 2) \ldots (\beta + n)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} = \frac{n^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} + O(n^{\beta - 1})$$

при $\beta = {}^1/_2$ и $\beta = -{}^1/_2$ находим

$$(3.5)\qquad P_i^-(n) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{n-i+{}^3/_4}{i-{}^3/_4}} + O([i(n-i+1)]^{-1/2}) + O((n-i+1)^{1/2} i^{-3/2})$$

$$P_j^+(h) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{j-{}^1/_4}{n-j+{}^1/_4}} + O([j(n-j+1)]^{-1/2}) + O(j^{1/2}(n-j+1)^{-3/2})$$

Из выбора точек x_i и x_{0j} ($i, j = 1, 2, \ldots, n$) следует

$$(3.6)\qquad \sqrt{\frac{n-i+{}^3/_4}{i-{}^3/_4}} = \sqrt{\frac{b-x_i}{x_i-a}},\quad \sqrt{\frac{j-{}^1/_4}{n-j+{}^1/_4}} = \sqrt{\frac{x_{0j}-a}{b-x_{0j}}}$$

Поэтому формулы (3.3), (3.5), (3.6) дают

$$(3.7)\qquad \gamma(x_i) = -\frac{1}{\pi^2}\sqrt{\frac{b-x_i}{x_i-a}}\, S_f^i + \alpha(i, n-i+1),$$

$$S_f^i = \sum_{j=1}^{n}\sqrt{\frac{x_{0j}-a}{b-x_{0j}}}\,\frac{f(x_{0j})}{x_{0j}-x_i}\,h$$

где $\alpha(i, n-i+1)$ стремится к нулю при неограниченном увеличении i и $n-i$ так, что точки x_i лежат в отрезке $[a+\Delta, b-\delta]$, Δ и δ — произвольные фиксированные положительные числа. Сравнивая полученные значения $\gamma_e(x_i)$ в (3.7) со значениями $\gamma_e(x_i)$ точного решения (2.4) СИУ (2.3) в точке $x = x_i$, получаем, что для доказательства сходимости $\gamma(x_i)$ к $\gamma_e(x_i)$ надо рассмотреть сходимость суммы S_f^i к значению интеграла $I_f(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Так как $f(x)$ удовлетворяет условию $H(\alpha)$, а $\sqrt{1+x}$ — условию $H({}^1/_2)$, то получим

$$(3.8)\qquad |\Delta I_{f(x_i)}| = |I_f(x_i) - S_f^i| \leqslant O\left[n^{-\alpha}\left(i-\frac{1}{2}\right)^{-1/2}(n-i+1)^{1/2}\ln n\right] +$$
$$+ O[n^{1/2}(n-i+1)^{-1}\ln n] + O\left[\left(n-i+\frac{1}{2}\right)^{-1/2}\left(i-\frac{1}{2}\right)^{1/2}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{i-{}^1/_2}+\frac{1}{n-i+{}^1/_2}\right)\right] +$$
$$+ O\left[n^{1/2}\left(n-i+\frac{1}{2}\right)^{-1/2}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{n-i+{}^1/_2}}\right)\right],\quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Теперь из (3.7) и (3.8) получаем

$$|\gamma_e(x_i) - \gamma(x_i)| \leqslant \frac{1}{\pi^2}\sqrt{\frac{b-x_i}{x_i-a}}\,|\Delta I_f(x_i)| + \alpha(i, n-i+1) =$$
$$= \beta(i, n-i+1)$$

где $\beta(i, n-i+1)$ стремится к нулю при неограниченном увеличении i и $n-i+1$ так, что точки x лежат в отрезке $[a+\Delta, b-\delta]$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Значения $\gamma(x_i)$, найденные из решения системы (3.1) для всех точек x_i, лежащих на отрезке $[a+\Delta, b-\delta]$, где Δ, δ — произвольные фиксированные положительные числа, равномерно сходятся к значению, в тех же точках, точного решения СИУ Коши.

4. Численное решение СИУ первого рода. Будем теперь рассматривать СИУ (1.1), Перепишем систему (1.2) в виде

$$(4.1)\qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma(x_i)}{x_i-x_{0j}}\,h = \varphi(x_{0j}) - \sum_{p=1}^{n} k(x_{0j}, x_p)\,\gamma(x_p)\,h,\quad j = 1, 2, \ldots, n$$

где $k(x_{0j}, x_i)$ и $\varphi(x_{0j})$ — значения соответствующих функций, определяемых в (2.1).

Разрешим эту систему относительно неизвестных $\gamma(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Получим формулу, аналогичную (3.4), где вместо $f(x_{0j})$ будет фигурировать правая часть выражения (4.1).

Пользуясь формулами (3.5), (3.6) и (3.8), получим

$$\gamma(x_i) - \frac{1}{\pi^2}\int_a^b N(x_i, t)\gamma(t)\,dt = -\frac{1}{\pi^2}\sqrt{\frac{b-x_i}{x_i-a}}\,I_f(x_i) + \beta(i, n-i) \tag{4.2}$$

где $\beta(i, n-i) \to 0$ при $n \to \infty$ для всех точек $x_i \in [a+\Delta, b-\delta]$.

Значение точного решения в точке x_i найдем из (2.2)

$$\gamma_f(x_i) - \frac{1}{\pi^2}\int_a^b N(x_i, t)\gamma_e(t)\,dt = -\frac{1}{\pi^2}\sqrt{\frac{b-x_i}{x_i-a}}\,I_f(x_i) \tag{4.3}$$

Из сравнения (4.2) и (4.3) получаем, что теорема 1 справедлива для системы (4.1) и СИУ (1.1).

5. **Обтекание пластинки.** В виде примера рассмотрим обтекание тонкой пластинки идеальной несжимаемой жидкостью. Заменив пластинку вихревым слоем с интенсивностью $\gamma(x)$, имеем для нее СИУ (2.3), где $f(x_0) = -2\pi$ (примем также $a = 0$, $b = 1$). Его точное решение

$$\gamma_e(x) = 2\sqrt{(1-x)/x} \tag{5.1}$$

В соответствии с расчетной схемой метода

$$x_i = h(i - {}^3/_4), \quad x_0 = h(j - {}^1/_4), \quad h = \frac{1}{n}; \quad i, \ldots = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.2}$$

С учетом (5.2) система линейных уравнений численного метода «дискретных вихрей», соответствующая СИУ (2.3), будет

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{j-i+{}^1/_2}\gamma(x_i) = 2\pi, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.3}$$

Ниже приведены вычисленные при $n = 20$ значения $\Delta_i = \gamma(x_i) - \gamma_e(x_i)$, где $\gamma(x_i)$ определено из решения системы (5.3), $\gamma_e(x_i)$ — по формуле (5.1)

$x_i \cdot 10^4$	125	625	1125	1625	2125	2625	3125
$\Delta_i \cdot 10^2$	202.2	7.1	1.7	0.6	0.3	0.1	0.1
$x_i \cdot 10^4$	3625	4125	4625	5125	5625	6125	6625
$\Delta_i \cdot 10^2$	0	0	0	0	0	0	0
$x_i \cdot 10^4$	7125	7625	8125	8625	9125	9625	—
$\Delta_i \cdot 10^2$	−0.1	−0.1	−0.1	−0.1	−0.3	−0.9	—

Видно, что значительное расхождение между $\gamma_e(x_i)$ и $\gamma(x_i)$ имеется лишь в первой точке $x_1 = 0.0125$. Этого и следовало ожидать, так как $\gamma_e(0) = \infty$. В этой точке относительная ошибка составляет 11.3%, в последней точке x_{20} составляет 2.3% и в остальных точках она не превышает 1%.

Поступила 24 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белоцерковский С. М.* Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. М., «Наука», 1965.
2. *Белоцерковский С. М., Гиневский А. С., Полонский Я. Е.* Силовые и моментные аэродинамические характеристики решеток тонких профилей. В сб.: Промышленная аэродинамика, вып. 22, М., Оборонгиз, 1962.
3. *Белоцерковский С. М., Гиневский А. С., Полонский Я. Е.* Аэродинамические силы, действующие на решетку профилей при нестационарном обтекании. Промышленная аэродинамика, вып. 20, М., Оборонгиз, 1961.
4. *Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Г.* Крыло в нестационарном потоке газа. М., «Наука», 1971.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения, М., «Наука», 1968.
6. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М., Изд-во иностр. лит., 1951.