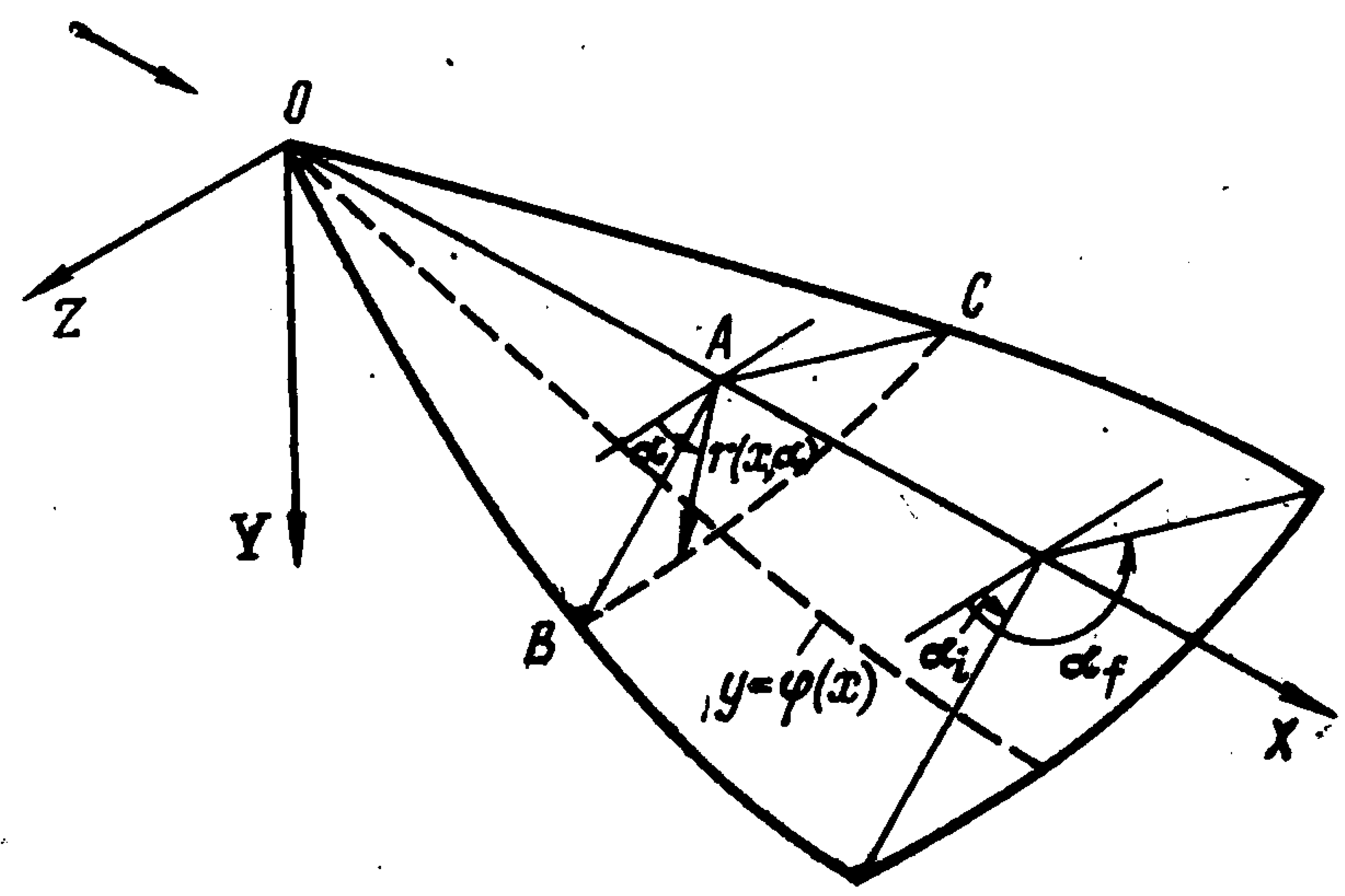
УДК 533.69

ОБОБЩЕННЫЕ ЗАКОНЫ ПОДОБИЯ ПРИ ОБТЕКАНИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛ

А. И. Бунимович, А. В. Дубинский

(Москва)

Показано, что в условиях закона локальности [1], т. е. в случаях, когда поток импульса на поверхности тела в основном зависит от местного угла между нормалью к поверхности и направлением скорости полета (например, гиперзвуковое течение газа в ньютоновской постановке, течение разреженного газа, воздействие света и т. д.), могут быть установлены обобщенные законы подобия, связывающие между собой аэродинамические характеристики пространственных афинно-неподобных тел, обтекаемых в общем случае, газом при различных режимах (например, основное тело обтекается нью-



Фиг. 1

тоновским потоком, соответственное — свободно-молекулярным потоком разреженного газа). Разработаны методы построения соответственных тел, приведены примеры применения предложенных законов подобия.

Частный случай таких законов при обтекании профилей (плоскопараллельный поток) и некоторых дополнительных ограничениях рассматривался в предположениях закона локальности в работе [2], а для ньютоновского гиперзвукового течения газа — в работе [3].

1. Постановка задачи. Рассмотрим обтекание пространственного тела, обладающего свойством гомотетии [4], потоком под нулевым углом атаки в условиях «закона локальности».

Уравнение поверхности тела (фиг. 1) представляется в виде

$$r(x,\alpha)=\frac{\rho(\alpha)^{\prime}}{\rho(\pi/2)}\varphi(x)=\rho_*(\alpha)\varphi(x),\quad \varphi(0)=0,\quad \alpha_i\leqslant\alpha\leqslant\alpha_f,\quad 0\leqslant x\leqslant x_f \tag{1.1}$$

где функции $\rho(\alpha)$ и $\varphi(x)$ характеризуют соответственно линии пересечения поверхности тела с некоторой плоскостью, перпендикулярной оси OX и с плоскостью XOY.

Выражения для коэффициентов сопротивления C_x и подъемной силы — c_y в условиях закона локальности [1] существенно упрощаются, если интегрирование по α и x можно разделить. Это имеет место для тонких тел ($\rho_*^2\varphi'^2\ll 1$), а для произвольной функции $\varphi(x)$ лишь в том случае, если функция $\rho_*(\alpha)$ удовлетворяет уравнению

$$1/\rho_*^2+\rho_*'^2/\rho_*^4=C=\mathrm{const} \tag{1.2}$$

т. е. граница сечения плоскостями ABC, перпендикулярными оси OX, состоит из отрезков дуг окружностей с центром в точке A и отрезков прямых (эти случаи указаны в работе [5], где рассматривался гиперзвуковой ньютоновский поток). Таким образом этот класс охватывает, в частности, полутела вращения и тела, поперечное сечение которых имеет форму многоугольника.

Считая, что функция $\rho_*(\alpha)$ задана, можно записать выражение для характеристик c_x, c_y в виде

$$c_x = P_1, \quad c_y = P_2, \quad P_i = \int_0^1 \varphi(\bar{x})^\nu f_i(\theta)\, d\bar{x}, \quad \bar{x} = \frac{x}{x_f}, \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{d\varphi(\bar{x})}{d\bar{x}} \tag{1.3}$$

где функции $f_i(\theta)$ определяются характером обтекания и формой поперечного сечения тела, $\nu = 1$.

Заметим, что формулы для коэффициентов c_x, c_y в случае обтекания профиля, нижняя граница которого задается функцией $\varphi(x)$, а верхняя — осью OX, получаются из (1.3) при $\nu = 0$ [2].

Для пространственных тел, характеристики которых представляются в виде (1.3), могут быть найдены преобразования (в общем случае, неаффинные), переводящие исходные тела в соответственные, того же класса, и установлены законы подобия, с помощью которых осуществляется пересчет аэродинамических характеристик исходного и соответственного тел.

2. Соответственные тела. В дальнейшем величины $x^{(\nu)}$, $y^{(\nu)}$ ($\nu = 0, 1$) будем считать безразмерными (отнесенными к $x_f^{(0)}$). Пусть форма исходного тела задана функцией $\rho(\theta)$ и уравнением линии пересечения поверхности тела с плоскостью $Z = 0$

$$y^{(0)} = \varphi(x^{(0)}),\ \varphi(0) = 0,\ \varphi \geqslant 0,\ \varphi^\cdot \geqslant 0 \text{ при } 0 \leqslant x^{(0)} \leqslant 1$$

Уравнение $y^{(0)} = \varphi(x^{(0)})$ можно записать в параметрическом виде

$$x^{(0)} = F^{-1}(\xi), \quad y^{(0)} = \varphi[F^{-1}(\xi)] \tag{2.1}$$

$$\xi = \int_0^{x^{(0)}} \varphi(t)^{\nu_0}\Phi_0[\theta^{(0)}(t)]\, dt = F(x^{(0)}), \qquad \theta^{(0)}(t) = \operatorname{arctg}\varphi^\cdot(t)$$

Здесь ψ, Φ_i — достаточно гладкие, неотрицательные на $(0, \pi/2)$ функции, задающие преобразование, $\nu_j = 0$ в случае обтекания профиля, $\nu_j = 1$ при обтекании гомотетичного тела.

Если форма поперечного сечения тела, получающегося в результате преобразования, известна, то форма поверхности тела определится, если задать уравнения $y^{(1)} = y^{(1)}(\xi)$, $x^{(1)} = x^{(1)}(\xi)$. Функции $y^{(1)}(\xi)$, $x^{(1)}(\xi)$ находятся из соотношений

$$y^{(1)\nu_1} x^{\cdot(1)}\Phi_1(\theta^{(1)}) = 1, \quad y^{(1)} = x^{(1)}\operatorname{tg}\theta^{(1)}, \quad \theta^{(1)}(\xi) = \chi\left(\operatorname{arctg}\frac{y^{\cdot(0)}}{x^{\cdot(0)}}\right)$$

и имеют вид

$$x^{(1)} = (\nu_1 + 1)^{-\nu_1/(\nu_1+1)} \int_0^{x^{(0)}} Q(\theta)\,\varphi(t)^{\nu_0} U(t)^{-\nu_1/(\nu_1+1)} dt, \tag{2.2}$$

$$y^{(1)} = [(\nu_1 + 1)\, U(x^{(0)})]^{-1/(\nu_1+1)}$$

$$U(x) = \int_0^x Q(\theta)\ \operatorname{tg}[\chi(\theta)]\,\varphi(s)^{\nu_0} ds, \quad \theta = \theta^{(0)}, \quad Q(\theta) = \frac{\Phi_0(\theta)}{\Phi_1[\psi(\theta)]} \tag{2.3}$$

где величина $x^{(0)}$ выбрана в качестве параметра.

3. Соотношения подобия. Аэродинамические характеристики исходного (индекс нуль) и соответственного (индекс единица) тел после перехода к интегрированию по ξ можно записать в виде

$$P_i^{(0)} = \int_0^{\xi_f} \frac{f_i^{(0)}(\theta)\, d\xi}{\Phi_0(\theta)}, \quad P_j^{(1)} = \int_0^{\xi_f} \frac{f_j^{(1)}[\psi(\theta)]\, d\xi}{\Phi_1[\chi(\theta)]}, \ \xi_f = F(1), \quad i = 1, 2, \ldots, n_0, \tag{3.1}$$

$$j = 1, 2, \ldots, n_1$$

где n_0, n_1 — количество рассматриваемых характеристик для исходного и соответственного тела.

Очевидно, что

$$\int_0^{\xi_f} \frac{\operatorname{tg}\theta d\xi}{\Phi_0(\theta)} = \frac{1}{\nu_0+1} y_f^{(0)\nu_0+1}, \quad \int_0^{\xi_f} \frac{\operatorname{tg}[\chi(\theta)]\, d\xi}{\Phi_1[\chi(\theta)]} = \frac{1}{\nu_1+1} y_f^{(1)\nu_1+1} \tag{3.2}$$

Предположим, что существует некоторая совокупность констант $a_k^{(q)}$, не всех равных нулю, таких, что выполняется тождество

$$\sum_{i=0}^{n_0} a_i^{(0)} f_i^{(0)}(\theta) + Q(\theta) \sum_{j=0}^{n_1} a_j^{(1)} f_j^{(1)} [\psi(\theta)] = 0, \quad f_0^{(0)} = \theta, \quad f_0^{(1)} = \operatorname{tg}[\psi(\theta)] \tag{3.3}$$

Тогда, разделив (3.3) на $\Phi_0(\theta)$ и воспользовавшись (2.2), (2.3), (3.2), после интегрирования по ξ в пределах от 0 до ξ_f получим соотношение между аэродинамическими характеристиками исходного и соответственного тел, не зависящее от формы исходного тела

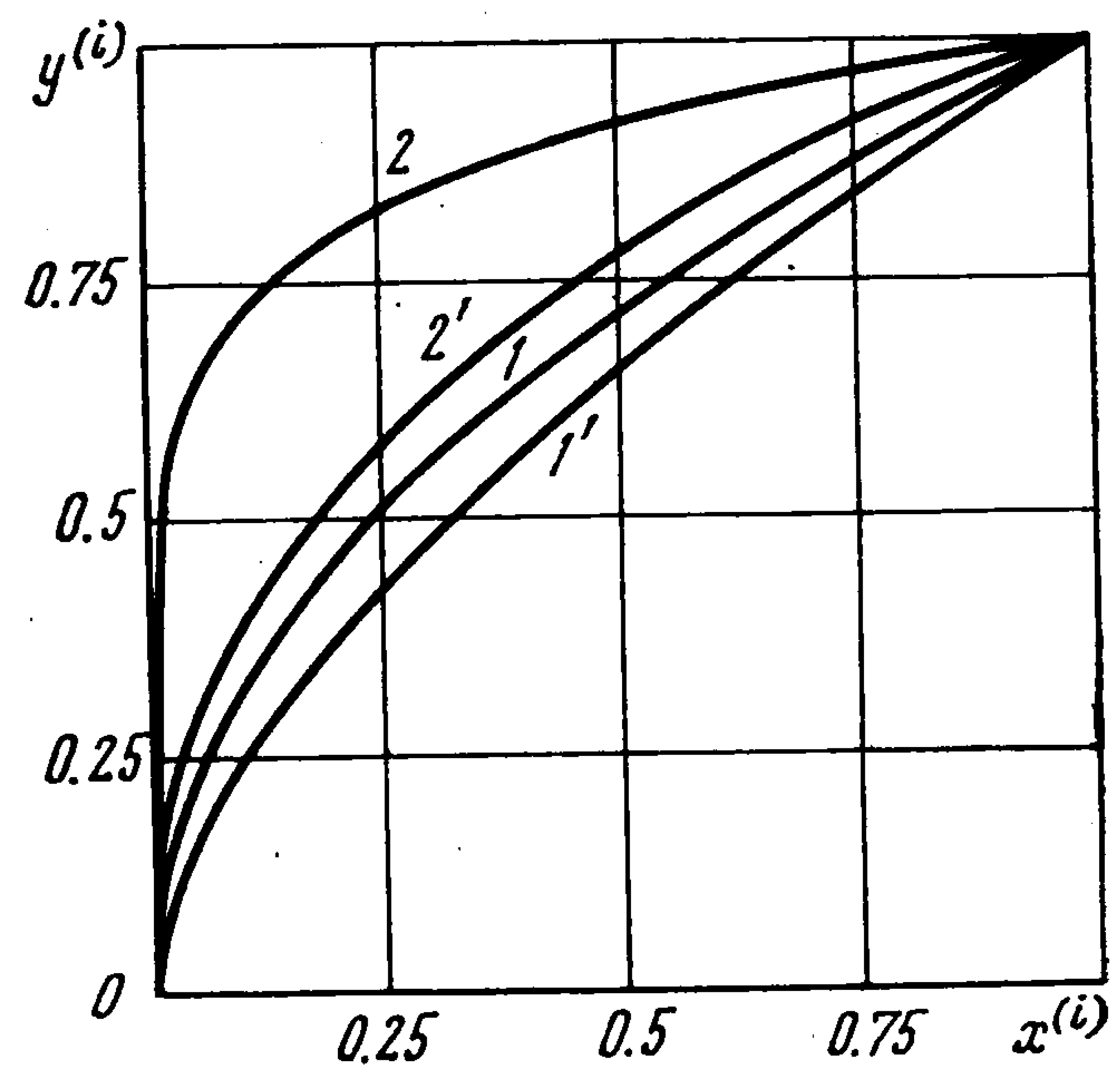
$$\sum_{i=1}^{n_0} a_i^{(0)} P_i^{(0)} + \frac{1}{\nu_0+1} y_f^{(0)\nu_0+1} + \sum_{j=1}^{n_1} a_j^{(1)} P_j^{(1)} + \frac{1}{\nu_1+1} y_f^{(1)\nu_1+1} = 0 \tag{3.4}$$

Так как возможно существование нескольких линейно-независимых совокупностей величин $a_k^{(q)}$, то соответственно могут иметь место несколько различных соотношений вида (3.4).

Таким образом, преобразование определяется двумя функциями Q и ψ. Заметим, что режимы обтекания исходного и соответственного тел могут быть различными. В случае, если соответственное тело геометричное ($\nu_1 = 1$), функция $\rho^{(1)}$ задается.

4. *Пример*. Пусть исходное и соответственное тела обтекаются либо гиперзвуковым ньютоновским потоком, либо свободно-молекулярным гиперзвуковым потоком разреженного газа, причем режимы обтекания могут быть для этих тел различными.

Предположим, что исходным является полутело вращения, ограниченное сверху плоскостью $Y = 0$; соответственное будем искать в классе гомотетичных тел, имеющих в сечении плоскостью, параллельной YOZ, форму треугольника с вершинами $(y, z) = (0, 1)$, $(1, 0)$, $(0-1)$.



Фиг. 2

Выражения [1] для аэродинамических характеристик приводят к формулам

$$P_1^{(0)} = \frac{c_x^{(1)} - 0.5 B_1^{(0)} y_f^{(0)2}}{\pi (A_2^{(0)} - B_1^{(0)})} = \int_0^1 \varphi^{(0)}(x^{(0)}) \frac{\operatorname{tg}^3 \theta^{(0)} dx^{(0)}}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta^{(0)}}$$

$$P_2^{(0)} = -\frac{c_y^{(0)}}{2 (A_2^{(0)} - B_1^{(0)})} = \int_0^1 \varphi^{(0)}(x^{(0)}) \frac{\operatorname{tg}^2 \theta^{(0)} dx^{(0)}}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta^{(0)}}$$

$$P_1^{(1)} = \frac{c_x^{(1)} - B_1^{(1)} y_f^{(1)2}}{2 (A_2^{(1)} - B_1^{(1)})} = \int_0^1 \varphi^{(1)}(x^{(1)}) \frac{\operatorname{tg}^3 \theta^{(1)} dx^{(1)}}{2 + \operatorname{tg}^2 \theta^{(1)}}$$

$$P_2^{(1)} = \frac{c_y^{(1)}}{2 (A_2^{(1)} - B_1^{(1)})} = \int_0^1 \varphi^{(1)}(x^{(1)}) \frac{\operatorname{tg}^2 \theta^{(1)} dx^{(1)}}{2 + \operatorname{tg}^2 \theta^{(1)}}$$

Зададим преобразование функциями

$$\chi(\theta) = \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}\theta), \quad Q(\theta) = \sqrt{2}/\operatorname{tg}\theta \tag{4.1}$$

Тождество (3.3) с учетом (4.1) дает два линейно-независимых набора коэффициентов

$$a_0^{(0)} = a_1^{(0)} = a_0^{(1)} = a_2^{(1)} = 0, \quad a_1^{(1)} = 1, \quad a_2^{(0)} = -2$$

$$a_0^{(1)} = a_2^{(0)} = a_1^{(1)} = 0, \quad a_2^{(1)} = -1, \quad a_0^{(0)} = -\sqrt{2}, \quad a_1^{(0)} = \sqrt{2}$$

Соотношения подобия (3.4) имеют вид

$$c_x^{(1)} = B_1^{(1)} y_f^{(1)2} - 2Ec_y^{(0)}, \quad c_y^{(1)} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} E\,(2c_x^{(0)} - \pi B_1^{(0)} y_f^{(0)2}) - \sqrt{2} y_f^{(0)2} (A_2^{(1)} - B_1^{(1)})$$

$$E = (A_2^{(1)} - B_1^{(1)})/(A_2^{(0)} - B_1^{(0)})$$

Воспользовавшись формулами (2.2), (4.1), запишем уравнение соответственного контура в параметрической форме

$$x^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{x^{(0)}} \frac{\varphi^{(0)}(t)\,dt}{\varphi^{\cdot(0)}(t)} \left(\int_0^t \varphi^{(0)}(u)\,du \right)^{1/2}, \quad y^{(1)} = 2\left(\int_0^{x^{(0)}} \varphi^{(0)}(t)\,dt \right)^{1/2}$$

В частном случае, если $y^{(0)} = ax^{(0)n}$, уравнение соответственного контура имеет вид

$$y^{(1)} = bx^{(1)(n+1)/(3-n)}, \quad b = a^{(5+n)/2(3-n)} \frac{2}{\sqrt{n+1}} x_f^{(1)(n+1)/(n-3)},$$

$$x_f^{(1)} = \frac{\sqrt{2(n+1)}}{n(3-n)}$$

На фиг. 2 изображены исходные и соответственные (отмечены штрихами) контуры тел для случая $n = 1/2$ (*1*) и $n = 1/7$ (*2*).

Поступила 24 V 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бунимович А. И.* Соотношения между силами, действующими на теле, движущиеся в разреженном газе, в потоке света и в гиперзвуковом ньютоновском потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 4.
2. *Бунимович А. И., Дубинский А. В.* Обобщенные законы подобия при обтекании тел в условиях «закона локальности». ПММ, 1973, т. 37, вып. 5.
3. *Jaslow H.* Nonaffine similarity laws inherent in Newtonian impact theory. AIAA Journal, 1970, vol. 8, No. 11.
4. *Гонор А. А., Черный Г. Г.* Поперечный контур тела минимального волнового сопротивления. В кн.: Теория оптимальных аэродинамических форм. М., «Мир», 1969.
5. *Майкапар Г. И.* О вариационных задачах Ньютона для неподогих тел. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.

УДК 518.12:533.6

ОБОСНОВАНИЕ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА «ДИСКРЕТНЫХ ВИХРЕЙ» РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. К. Лифанов, Я. Е. Полонский

(Москва)

Дается обоснование сходимости численного метода дискретных вихрей (см., например, [1–4]) при решении действительных одномерных сингулярных интегральных уравнений первого рода. Показано, что в классе функций, неограниченных на одном конце отрезка интегрирования и ограниченных на другом, существует единственное решение, и для него выполняется условие Чаплыгина — Жуковского.