

## ДИНАМИКА РАЗМОТКИ НИТИ

М. Ю. Очан

(Москва)

Исследуется движение тяжелой гибкой нити, разматывающейся с ротора. Учитывается аэродинамическое сопротивление. Показана возможность осуществления установившегося процесса и дано его исследование.

Быстровращающиеся роторы часто изготавливаются путем многослойной навивки нити [1]. При обрыве одного из периферийных витков действие аэродинамического сопротивления может предотвратить полную размотку нити. Представляет интерес исследование возможности стационарного процесса вращения неполомной размотанной нити в случае постоянной угловой скорости ротора и действия аэродинамического сопротивления, а также определение формы и натяжения свободной части нити (не лежащей на роторе), предельного радиуса разматывания и силы взаимодействия этой части нити с ротором.

Будем считать, что стационарный процесс возможен, и найдем форму и натяжение свободной части нити. Полагаем, что нить совершает плоское движение, вращаясь с постоянной угловой скоростью, равной скорости ротора. Поперечными размерами нити пренебрегаем. Нить считаем гибкой. Радиус ротора полагаем равным единице.

Считаем, что отнесенная к единице длины сила аэродинамического сопротивления, действующая на элемент нити, направлена по нормали к этому элементу и равна

$$(1) \quad F_c = A |V_n - V_0|^2 \sin^2 \varphi, \quad A = \text{const}$$

Здесь  $V_n$  — скорость нити,  $V_0$  — скорость потока,  $\varphi$  — угол между касательной к элементу и направлением относительной скорости нити. Эта модель аэродинамического сопротивления широко применяется при исследовании формы неподвижной нити в потоке воздуха (см. [2], стр. 105).

Рассматривая равновесие элемента нити (фигура) и проектируя силы инерции и внешние силы на нормаль и на касательную к нити (учитывая, что  $F_c$  направлена по нормали к нити), имеем

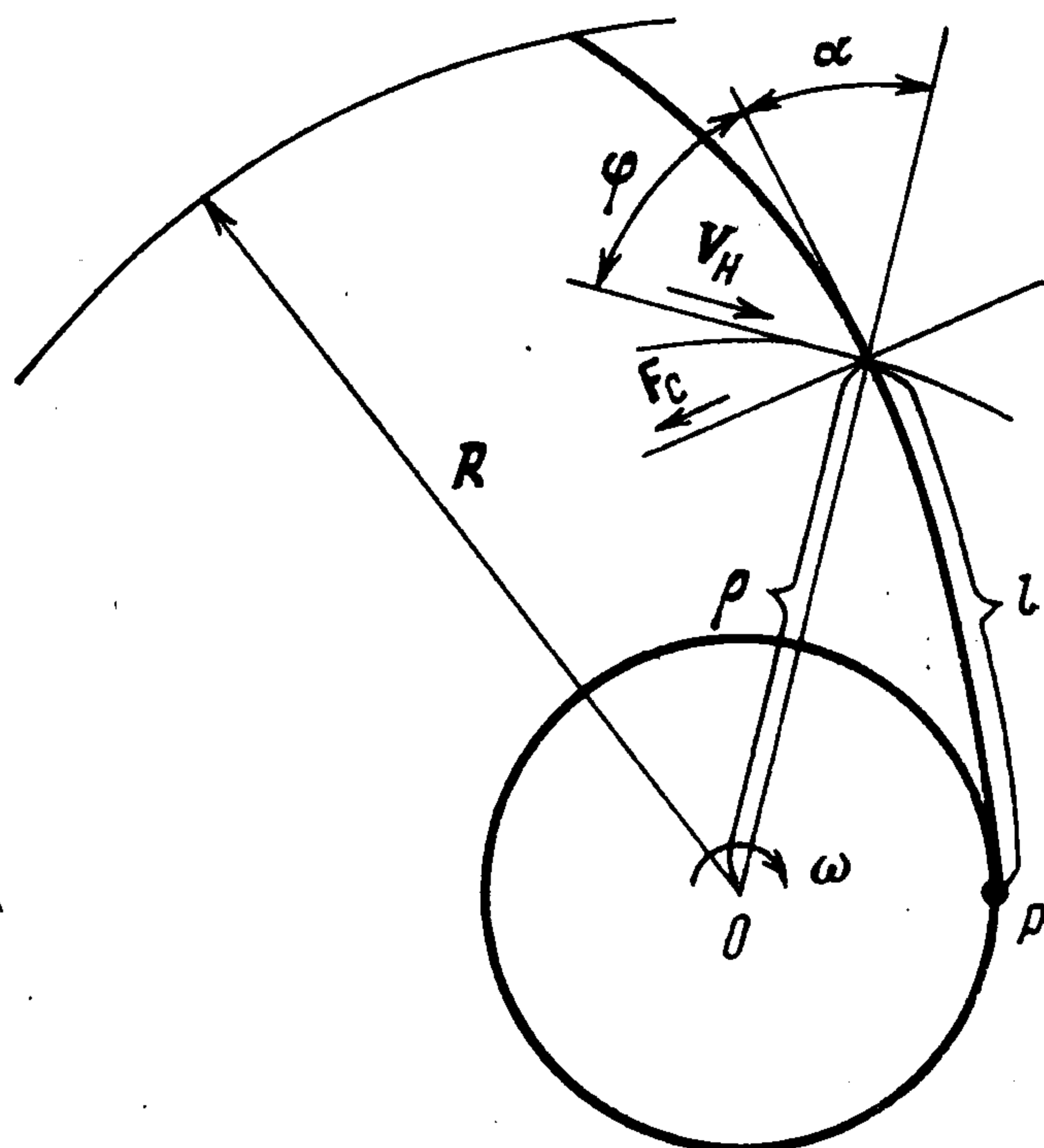
$$(2) \quad T_l' = -\gamma \omega^2 \rho \cos \alpha$$

$$(3) \quad TK = \gamma \omega^2 \rho \sin \alpha - F_c$$

Здесь  $\omega$  — угловая скорость ротора,  $\gamma$  — плотность нити, т. е. масса единицы длины нити,  $\rho$  — радиус-вектор элемента нити, имеющий начало в центре вращения,  $\alpha$  — угол между касательной к элементу и  $\rho$ ,  $l$  — длина дуги, отсчитываемая от точки  $P$ ,  $K$  — кривизна нити,  $T$  — натяжение нити.

Пусть  $R$  — величина наибольшего радиус-вектора нити, которую назовем радиусом задевания. Тогда, замечая, что  $\cos \alpha = \rho_l'$ , и интегрируя (2) с учетом условия  $T = 0$  при  $\rho = R$ , имеем

$$(4) \quad T(\rho) = \frac{1}{2} \gamma \omega^2 (R^2 - \rho^2)$$



Заметим, что натяжение внешнего витка нити, лежащей на роторе, должно быть больше, чем  $\gamma\omega^2$ , иначе этот виток не сможет удержаться на роторе. Учитывая теперь, что натяжение нити не имеет скачка в точке  $P$ , т. е. в точке касания свободного участка с ротором, а также вспоминая, что радиус ротора равен единице, получаем из (4)  $\frac{1}{2}\gamma\omega^2(R^2 - 1) \geq \gamma\omega^2$ . Отсюда находим, что в случае стационарного процесса  $R \geq \sqrt{3}$ , каково бы ни было аэродинамическое сопротивление.

Найдем  $F_c$  как функцию от  $\rho$  и  $\alpha$ . Будем считать скорость ротора достаточно большой, чтобы можно было пренебречь толщиной пограничного слоя на роторе, и полагать, что воздух, окружающий ротор, неподвижен. Учитывая теперь, что  $V_H = \omega\rho$ , запишем формулу (1) так:

$$(5) \quad F_c = A\omega^2\rho^2 \sin^2 \varphi = A\omega^2\rho^2 \cos^2 \alpha$$

Замечая, кроме того, что  $K = \rho^{-1}(\rho \sin \alpha)_\rho'$  (см. [3, 4]), получаем из (2)

$$\frac{R^2 - \rho^2}{2\rho} (\rho \sin \alpha)_\rho' = \rho \sin \alpha - a\rho^2 \cos^2 \alpha, \quad a = \frac{A}{\gamma}$$

Путем замены  $y = \rho \sin \alpha$  из последнего уравнения получим уравнение Риккати

$$(6) \quad y_\rho' = 2\rho \frac{y + ay^2 - a\rho^2}{R^2 - \rho^2}$$

Здесь в правой части имеется неизвестная постоянная  $R$  (радиус задевания), которая может быть определена после интегрирования уравнения (6) со следующими краевыми условиями:

$$(7) \quad y = 1 \text{ при } \rho = 1$$

$$(8) \quad y + ay^2 - a\rho^2 = 0 \text{ при } \rho = R$$

Условие (7) означает, что свободный участок нити не имеет перелома в точке контакта с ротором, и нить касается ротора. Условие (8) означает, что производная  $y_\rho'$  ограничена при  $\rho = R$ , т. е. кривизна в точке  $\rho = R$  конечна.

Введя новые переменные  $t$  и  $u(t)$ , связанные с  $\rho$  и  $y$  соотношениями

$$(9) \quad t = 2a\sqrt{R^2 - \rho^2}, \quad \frac{t}{2a} u_t' = uy$$

имеем из уравнения (6)

$$(10) \quad tu_{tt}'' + 3tu_t' + (t - 4a^2R^2)u = 0$$

Будем считать пока, что величина  $\sqrt{1 + 4a^2R^2}$  не равна целому числу. Тогда, интегрируя, имеем

$$(11) \quad u = \frac{1}{t} [c_1 J_\nu + c_2 J_{-\nu}], \quad \nu = \sqrt{1 + 4a^2R^2}$$

Здесь  $c_1$  и  $c_2$  — постоянные интегрирования,  $J_\nu = J_\nu(t)$ ,  $J_{-\nu} = J_{-\nu}(t)$  — функции Бесселя порядков  $\nu$  и  $-\nu$ .

Учитывая рекуррентные соотношения для функций Бесселя и возвращаясь к  $y$ , получим

$$(12) \quad 2ay = -1 + \frac{\nu(-c_1 J_\nu + c_2 J_{-\nu}) + t(c_1 J_{\nu-1} + c_2 J_{-\nu-1})}{c_1 J_\nu + c_2 J_{-\nu}}$$

Условие (8) можно переписать следующим образом:

$$2ay|_{\rho=R} = -1 \pm \sqrt{1 + 4a^2R^2}$$

Будем считать, что  $\sin \alpha > 0$  (это неравенство соблюдается, в частности, когда кривая не имеет перегибов). Тогда функция  $y$  всюду положительна, и последнее условие с учетом (11) можем записать так:

$$(13) \quad 2ay|_{t=0} = \nu - 1$$

Физический смысл имеют только  $\nu > 1$  и, кроме того, пока рассматриваем не целые  $\nu$ , поэтому, разделив числитель и знаменатель последнего слагаемого в (12) на  $J_{-\nu}$ , получим

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \frac{1}{2a} (-\nu - 1) \quad \text{при } c_2 \neq 0$$

Таким образом, при  $c_2 \neq 0$  условие (13) не удовлетворяется. Следовательно,  $c_2 = 0$ . После подстановки  $c_2 = 0$  в (12) уничтожается также  $c_1$ . В результате имеем

$$(14) \quad y = \frac{1}{2a} \left[ -1 - \nu + t \frac{J_{\nu-1}(t)}{J_{\nu}(t)} \right]$$

Здесь  $y$ ,  $t$  и  $\nu$  выражаются через исходные величины  $\rho$  и  $\alpha$  следующим образом:

$$(15) \quad t = 2a \sqrt{R^2 - \rho^2}, \quad y = \rho \sin \alpha, \quad \nu = \sqrt{1 + 4a^2 R^2}$$

Учитывая, что  $\lim_{t \rightarrow 0} t J_{\nu-1} / J_{\nu} = 2\nu$ , можно заметить, что это решение удовлетворяет условию (13).

В случае целого  $\nu$ , представляя решение уравнения (10) в виде суммы функции Бесселя и функции Неймана и проделывая аналогичные выкладки, находим, что формула (14) справедлива и для целых  $\nu$ .

В (14) осталась неизвестной величина  $\nu$ , которая должна быть найдена из условия (7). Как видно из (9), значение  $\rho = 1$  соответствует значению  $t = t_0 = 2a \sqrt{R^2 - 1}$ . В результате,  $\nu$  находится из следующей системы трансцендентных уравнений:

$$(16) \quad 2a + 1 + \nu = t_0 J_{\nu-1}(t_0) / J_{\nu}(t_0), \quad t_0 = 2a \sqrt{R^2 - 1}, \quad \nu = \sqrt{1 + 4a^2 R^2}$$

Таким образом, при заданной величине  $a$  отсюда находим  $\nu$ , причем попутно находим величину радиуса задевания  $R$ . В результате согласно (4) будет известно натяжение каждой точки нити, а также натяжение в точке соприкосновения с ротором, т. е. сила и момент, с которыми свободный участок нити действует на ротор.

При значениях  $\nu$ , равных половине целого нечетного числа, функция  $J_{\nu}$ , а следовательно, и  $y$  выражаются через элементарные функции. При  $\nu = 1.5$  имеем

$$J_{\nu-1}(t) / J_{\nu}(t) = t \sin t / (\sin t - t \cos t)$$

Используя рекуррентное соотношение

$$J_{\nu-1}(t) / J_{\nu}(t) = t [2\nu - t J_{\nu-2}(t) / J_{\nu-1}(t)]^{-1}$$

находим  $y$  в (14) при каждом последующем  $\nu$ .

Первое из уравнений (16) принимает вид

$$2a + 2.5 = \frac{t_0^2 \sin t_0}{\sin t_0 - t_0 \cos t_0} \quad \text{при } \nu = 1.5$$

$$2a + 3.5 = \frac{t_0^2 (\sin t_0 - t_0 \cos t_0)}{(3 - t_0^2) \sin t_0 - 3t_0 \cos t_0} \quad \text{при } \nu = 2.5$$

и т. д. В результате из (16) получаем, что  $a = 0.12$ ,  $R^2 = 21$  при  $\nu = 1.5$ , соответствуют  $a = 0.38$ ,  $R^2 = 9.1$  при  $\nu = 2.5$ ,  $a = 0.75$ ,  $R^2 = 5$  при  $\nu = 3.5$  и т. д. Таким образом, с возрастанием аэродинамического сопротивления радиус задевания уменьшается.

Натяжение в точке контакта  $P$  подсчитывается по формуле (4). Подставляя в (4)  $\rho = 1$  и найденные выше значения  $R$ , получаем, что величина  $T(1) / (\gamma \omega^2)$  равна 10, 4.1, 2.5 и т. д. при  $a = 0.12$ ,  $0.38$ ,  $0.75$  и т. д. Как видим,  $T(1)$ , а следовательно, и момент, действующий на ротор со стороны нити, уменьшаются с возрастанием аэродинамического сопротивления.

Рассмотрим случай малого  $a$ , что соответствует большой удельной массе нити или малому аэродинамическому сопротивлению.

Величину  $t_0 J_{\nu-1} / J_\nu$  в (16) можно представить следующим образом:

$$(17) \quad t_0 \frac{J_{\nu-1}(t_0)}{J_\nu(t_0)} = 2\nu \frac{1 - (t_0/2)^{2\nu-1} + S(t_0)}{1 - (t_0/2)^2(\nu+1)^{-1} + s(t_0)}, \quad \begin{matrix} S = O(t_0^4) \\ s = O(t_0^4) \end{matrix}$$

Исследуя с учетом этого разложения систему (16) при  $t_0 \rightarrow 0$ , находим

$$(18) \quad t_0 \rightarrow 0, \quad \nu \rightarrow 1, \quad aR^2 \rightarrow 2 \quad \text{при } a \rightarrow 0$$

Таким образом,  $R \rightarrow \infty$  при  $a \rightarrow 0$ , т. е., как и следовало ожидать, при  $a = 0$  (что соответствует вращению нити в вакууме) стационарного процесса при неполностью размотанной нити быть не может. Из (4) находим, что  $Ta \rightarrow \gamma\omega^2$  при  $a \rightarrow 0$ ,  $\rho \neq R$ , т. е. натяжение на каждом фиксированном радиусе беспрестанно возрастает с уменьшением  $a$ .

Так как  $t_0 \rightarrow 0$  при  $a \rightarrow 0$ , то при достаточно малом  $a$  имеем  $t_0/2 < 1$ . В результате при достаточно малом  $a$  по признаку Лейбница для знакопеременного убывающего ряда согласно (17) имеем:

$$0 < s < \frac{(t_0/2)^4}{2(\nu+2)(\nu+1)}, \quad S > s$$

Теперь получаем из (17)

$$t_0 \frac{J_{\nu-1}(t_0)}{J_\nu(t_0)} > 2\nu \frac{1 - (t_0/2)^{2\nu-1}}{1 - (t_0/2)^2(\nu+1)^{-1}}$$

Подставляя это неравенство в (16), имеем (учитывая, что  $\nu > 1$ )

$$\nu < 2 + a - \sqrt{a^2 + 1 - 6a}$$

Так как  $\nu = \sqrt{1 + 4a^2R^2}$ , то

$$R^2 < \frac{1}{2a^2} [2 - a + a^2 - (2 + a) \sqrt{a^2 + 1 - 6a}]$$

Пусть, например,  $a \leq 0.12$ . Тогда

$$(19) \quad R^2 < 2/a + 9.5$$

При  $a = 0.12$  из этого неравенства имеем  $R^2 < 25$ , тогда как точное значение  $R^2$ , найденное выше, в этом случае равно 21. Итак, радиус задевания  $R$ , беспрестанно возрастая с убыванием  $a$ , в соответствии с (18) остается меньше величины  $\sqrt{2/a + 9.5}$ .

Из (4) и (19) получаем такое неравенство для натяжения в точке  $P$  (при  $\rho = 1$ ):

$$T|_{\rho=1} < \gamma\omega^2 (1/a + 4.25)$$

Автор благодарит Н. В. Гулиа за ценные советы при подготовке этой работы.

Поступила 10 VII 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гулиа Н. В. Инерционные аккумуляторы энергии. Изд. Воронежск. ун-та, 1970.
2. Алексеев Н. И. Статистика и установившееся движение гибкой нити. М., «Легкая индустрия», 1970.
3. Очан М. Ю. Исследование установившегося перемоточного процесса в центробежном аккумуляторе механической энергии. Машиноведение, 1970, № 3.
4. Гулиа Н. В., Очан М. Ю. Исследование процесса перемотки ленты в роторах с переменными параметрами. В сб.: Механика машин, вып. 29—30, М., «Наука», 1971.